2023 北京八一学校高二 3 月月考

数　学

本试卷共 3 页，120 分.考试时长 90 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.

第一部分（选择题共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_3=-1$，公差 d=2，则 a_7=（　）

A. 7　　B. 9　　C. 11　　D. 13

2. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$且满足$a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}\left(n\in N^*\right)$，则$a_{12}=$（　）

A. 2　　B. –1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{12}$

3. 设$\{a_n\}$是等比数列，且$a_1+a_2+a_3=1$，$a_2+a_3+a_4=2$，则$a_6+a_7+a_8=$（　）

A. 12　　B. 24　　C. 30　　D. 32

4. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_{13}=S_{13}=13$，则$a_1=$（　）

A. –14　　B. –13　　C. –12　　D. –11

5. 已知等比数列$\{a_n\}$中, $a_1=3$,且$4a_1,2a_2,a_3$成等差数列,则$a_3+a_4+a_5=$(　)

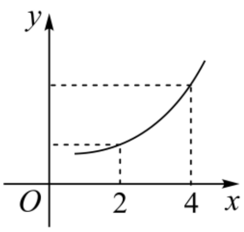
A. 33　　B. 72　　C. 84　　D. 189

6. 已知S_n是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则“$a_n>0$”是“$\{S_n\}$是递增数列”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 函数$y=f(x)$的图象如图所示，$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数，则下列数值排序正确的是（　）



A. $2f'(4)<2f'(2)<f(4)-f(2)$

B. $2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$

C. $2f'(2)<2f'(4)<f(4)-f(2)$

D. $f(4)-f(2)<2f'(4)<2f'(2)$

8. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_n=2a_{n+1}$，则 $S_n=$

A. 2^{n-1}　　B. $(\frac{3}{2})^{n-1}$　　C. $(\frac{2}{3})^{n-1}$　　D. $\frac{1}{2^{n-1}}$

9. 任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘 3 加 1；若是偶数，就将该数除以 2.反复进行上述运算，经过有限次步骤，必进入循环圈 1→4→2→1.这就是数学史上著名的“冰雹猜想”（又称“角谷猜想”）.如果对于正整数 m，经过 n 步变换，第一次到达 1，就称为 n 步“雹程”.如取 $m=3$，由上述运算法则得出：3→10→5→16→8→4→2→1，共需经过 7 个步骤变成 1，得 $n=7$.则下列命题错误的是（　）

A. 若 $n=2$，则 m 只能是 4　　B. 当 $m=17$ 时，$n=12$

C. 随着 m 的增大，n 也增大　　D. 若 $n=7$，则 m 的取值集合为 $\{3,20,21,128\}$

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_n=\frac{S_n}{n}+2(n-1)$，$(n\in N^*)$，若 $S_1+\frac{S_2}{2}+\frac{S_3}{3}+\cdots+\frac{S_m}{m}-(m-1)^2=2023$，则 m 的值为（　）

A. 1007　　B. 1006　　C. 1012　　D. 1013

第二部分（非选择题 共 70 分）

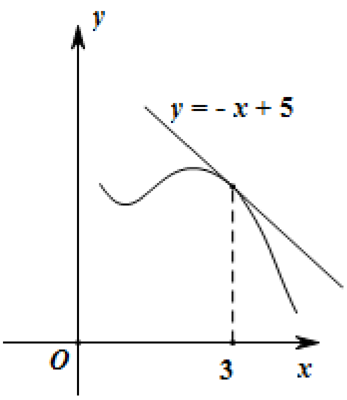
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_2=2$，$a_5=16$，则 S_6 的值为__________.

12. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,1+\Delta x]$ 上的平均变化率是__________.

13. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_1+3^2a_2+\cdots+3^na_n=4n^2$，则 $a_4=$______.

14. 如图，函数 $y=f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y=-x+5$，则 $f(3)+f'(3)=$__________.



15. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}-\frac{3}{2}(n\geq 2,n\in N^*)$，且 $a_1=1$，记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $3\lambda\cdot(S_n+n)\leq 4$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，则实数 λ 的最大值为__________.

三、解答题（本大题共 4 小题，共 45 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求S_n，并求S_n的最小值.

17. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且$a_n=2a_{n-1}-n+2(n\geq 2,n\in N_+)$.

（1）求a_2，a_3，并证明$\{a_n-n\}$是等比数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式；

（3）数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

18. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}\left(n\in N^*\right)$，数列$\{b_n\}$满足：$b_1=a_1$，$b_2=3$，$b_n+b_{n+2}=2b_{n+1}\left(n\in N^*\right)$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{c_n\}$，$c_1=a_1$，$c_{n+1}-c_n=b_n\left(n\in N^*\right)$，求数列$\{c_n\}$的通项公式；

（3）若不等式$k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot a_{n+1}-b_n+6\geq 0$对任意$n\in \mathbf{N}^*$恒成立，写出一个符合条件的$k$的值.

19. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1\in N^*$，$a_1\leq 36$，且$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leq 18,\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}(n=1,2,\ldots)$. 记集合$M=\{a_n\mid n\in N^*\}$.

（I）若$a_1=6$，写出集合M的所有元素；

（II）若集合M存在一个元素是3的倍数，证明：M的所有元素都是3的倍数；

（III）求集合M的元素个数的最大值.

参考答案

第一部分（选择题共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】A

【解析】

【分析】根据 $a_3=-1$，公差 d=2，利用等差数列的性质求解即可.

【详解】因为等差数列$\{a_n\}$中，且 $a_3=-1$，公差 d=2，

所以 $a_7=a_3+4d=7$.

故选：A

【点睛】本题主要考查等差数列的基本性质，属于基础题.

2.【答案】C

【解析】

【分析】先写出数列$\left\{a_n\right\}$的前几项，发现其周期，进而求得 a_{12} 的值.

【详解】由 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，

可得 $a_2=-1$，$a_3=\dfrac{1}{2}$，$a_4=2$，$a_5=-1, a_6=\dfrac{1}{2}$，

则数列的值以 3 为周期重复，则 $a_{12}=a_3=\dfrac{1}{2}$

故选：C

3.【答案】D

【解析】

【分析】根据已知条件求得 q 的值，再由 $a_6+a_7+a_8=q^5\left(a_1+a_2+a_3\right)$ 可求得结果.

【详解】设等比数列$\left\{a_n\right\}$的公比为 q，则 $a_1+a_2+a_3=a_1\left(1+q+q^2\right)=1$，

$a_2+a_3+a_4=a_1q+a_1q^2+a_1q^3=a_1q\left(1+q+q^2\right)=q=2$，

因此，$a_6+a_7+a_8=a_1q^5+a_1q^6+a_1q^7=a_1q^5\left(1+q+q^2\right)=q^5=32$.

故选：D.

【点睛】本题主要考查等比数列基本量的计算，属于基础题.

4.【答案】D

【解析】

【分析】由求和公式得出 a_1.

【详解】由题意，得 $S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=\frac{13(a_1+13)}{2}=13$，解得 $a_1=-11$.

故选：D

5.【答案】C

【解析】

【分析】先根据条件求出公比，再代入求结果.

【详解】由题意可设公比为 q，则 $4a_2=4a_1+a_3$，

$\therefore 4q=4+q^2$

$\therefore q=2$.

$\therefore a_3+a_4+a_5=a_1q^2(1+q+q^2)=3\times4\times(1+2+4)=84$

故选：C

【点睛】本题考查等比数列基本量计算，考查基本分析求解能力，属基础题.

6.【答案】A

【解析】

【分析】$a_n>0$，则 $S_n>S_{n-1}$，$\{S_n\}$ 是递增数列，充分性；a_1 的符号不确定，不必要，得到答案.

【详解】若 $a_n>0$，则 $S_n>S_{n-1}$，$\{S_n\}$ 是递增数列，“$a_n>0$”是“$\{S_n\}$ 是递增数列”的充分条件；

若 $\{S_n\}$ 是递增数列，则 $S_n>S_{n-1}$，$a_n>0(n\geq2)$，但是 a_1 的符号不确定，“$a_n>0$”不是“$\{S_n\}$ 是递增数列”的必要条件.

故选：A

7.【答案】B

【解析】

【分析】由导数的几何意义判断

【详解】由图象可知 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

故 $f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{4-2}<f'(4)$，即 $2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$

故选：B

8.【答案】B

【解析】

【分析】

由 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 把已知式转化 $\{S_n\}$ 的递推式，从而知 $\{S_n\}$ 是等比数列，可求得其通项公式.

【详解】由已知 $S_n=2a_{n+1}$ 得 $S_n=2(S_{n+1}-S_n)$，即 $2S_{n+1}=3S_n$，$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{3}{2}$，而 $S_1=a_1=1$，所以 $S_n=(\frac{3}{2})^{n-1}$.

故选：B.

【点睛】本题考查由 S_n 与 a_n 的关系式求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式，解题关键是利用 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 把已知式转化 $\{S_n\}$ 的递推式.

9.【答案】C

【解析】

【分析】根据“冰雹猜想”进行推理即可判定.

【详解】对于 A，$n=2$，逆推 $1\to2\to4$，m 只能是 4，故 A 对；

对于 B，$m=17$ 时，$17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$，$n=12$，故 B 对；

对于 C，$m=3$ 时，$n=7$，$m=4$ 时，$4\to2\to1$，$n=2$，故 C 错，

对于 D，$n=7$ 时，逆推 $1\to2\to4\to8\to16\to\begin{cases}32\to64\to\begin{cases}128\\21\end{cases}\\5\to10\to\begin{cases}20\\3\end{cases}\end{cases}$，故 D 对.

故选：C.

10.【答案】C

【解析】

【分析】由 $S_n-S_{n-1}=a_n\left(n\geq2\right)$，结合题干条件得出数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是以 $\dfrac{S_1}{1}=1$ 为首项，以 2 为公差的等差数列，通过数列的前 n 项和公式即可求解.

【详解】$\because a_n=\dfrac{S_n}{n}+2\left(n-1\right)$，$\therefore S_n-S_{n-1}=\dfrac{S_n}{n}+2\left(n-1\right)$，$\left(n\geq2\right)$

整理可得，$\left(n-1\right)S_n-nS_{n-1}=2n\left(n-1\right)$，两边同时除以 $n\left(n-1\right)$ 可得 $\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=2$，

$\therefore$ 数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是以 $\dfrac{S_1}{1}=1$ 为首项，以 2 为公差的等差数列，

$\therefore S_1+\dfrac{S_2}{2}+\dfrac{S_3}{3}+\cdots+\dfrac{S_n}{n}-\left(n-1\right)^2=n\times1+\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}\times2-\left(n-1\right)^2$

$=n^2-\left(n-1\right)^2=2n-1$，

由题意可得，$2m-1=2023$，解可得 $m=1012$.

故选：C.

第二部分（非选择题 共 70 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】63

【解析】

【分析】由已知求出首先和公比即可得出.

【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

则$\begin{cases}a_2=a_1q=2\\a_5=a_1q^4=16\end{cases}$，解得$a_1=1,q=2$，

$\therefore S_6=\dfrac{1\times\left(1-2^6\right)}{1-2}=63$.

故答案为：63.

12.【答案】$-\dfrac{1}{1+\Delta x}$

【解析】

【分析】根据给定条件求出函数值的增量，再利用平均变化率的意义计算即得.

【详解】依题意，在区间[1，$1+\Delta x$]内的函数值的增量为：

$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=\dfrac{1}{1+\Delta x}-1=\dfrac{-\Delta x}{1+\Delta x}$，

于是得$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{1}{1+\Delta x}$，

所以所求的平均变化率为$-\dfrac{1}{1+\Delta x}$.

故答案为：$-\dfrac{1}{1+\Delta x}$

13.【答案】$\dfrac{28}{81}$

【解析】

【分析】利用$n=3$与$n=4$时两式相减即可求得a_4的值.

【详解】由$3a_1+3^2a_2+\cdots+3^na_n=4n^2$可得，

当$n=3$时，$3a_1+3^2a_2+3^3a_3=4\times3^2=36$，

当$n=4$时，$3a_1+3^2a_2+3^3a_3+3^4a_4=4\times4^2=64$，

两式相减得$3^4a_4=64-36=28$，解之得$a_4=\dfrac{28}{81}$

故答案为：$\dfrac{28}{81}$

14.【答案】1

【解析】

【详解】由图可知$f(3)=2, f'(3)=-1,\therefore f(3)+f'(3)=1$.

15.【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】

【分析】由已知可得数列$\{a_n+1\}$是以2为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，求其通项公式，得到数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，代入$3\lambda\cdot(S_n+n)\le 4$，分离参数$\lambda$求解.

【详解】由$a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}-\frac{3}{2}\left(n\ge 2,n\in N^*\right)$，得$a_n+1=-\frac{1}{2}(a_{n-1}+1)\left(n\ge 2,n\in N^*\right)$，

$\because a_1=1$，$\therefore$数列$\{a_n+1\}$是以2为首项，以$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，

$\therefore a_n+1=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则$a_n=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1$.

$$\therefore S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2\times\frac{1\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}-n=\frac{4}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]-n$$

由$3\lambda\cdot(S_n+n)\le 4$，得$3\lambda\cdot\frac{4}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\le 4$，$\therefore\lambda\le\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

当$n=1$时，$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$有最小值为$\frac{2}{3}$，$\therefore\lambda\le\frac{2}{3}$，即实数$\lambda$的最大值为$\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$.

三、解答题（本大题共4小题，共45分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.【答案】(1) $a_n=2n-9$；(2) $S_n=n^2-8n$，最小值为–16.

【解析】

【分析】(1) 方法一：根据等差数列前n项和公式，求出公差，再代入等差数列通项公式即得结果；

(2) 方法二：根据等差数列前n项和公式得S_n，根据二次函数的性质即可求出.

【详解】(1) **[方法一]：【通性通法】【最优解】 公式法**

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$S_3=-15$得，$3\times(-7)+\frac{3\times 2}{2}d=-15$，解得：$d=2$，所以$a_n=2n-9$.

[方法二]：函数+待定系数法

设等差数列$\{a_n\}$通项公式为$a_n=kn+b$，易得$k+b=-7$，由$S_3=-15$，即$3a_2=-15$，即$2k+b=-5$，解得：$k=2,b=-9$，所以$a_n=2n-9$.

(2) **[方法1]：邻项变号法**

由 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$ 可得 $S_n=n^2-8n$．当 $a_n<0$，即 $2n-9<0$，解得 $1\le n\le 4$，所以 S_n 的最小值为

$S_4=4a_1+6d=-16$，

所以 S_n 的最小值为 -16．

[方法 2]：函数法

由题意知 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$，即 $S_n=n^2-8n=(n-4)^2-16$，

所以 S_n 的最小值为 $S_4=4^2-4?8=-16$，所以 S_n 的最小值为 -16．

【整体点评】（1）方法一：直接根据基本量的计算，利用等差数列前 n 项和公式求出公差，即可得到通项公式，是该题的通性通法，也是最优解；

方法二：根据等差数列的通项公式的函数形式特征，以及等差数列前 n 项和的性质，用待定系数法解方程组求解；

（2）方法一：利用等差数列前 n 项和公式求 S_n，再利用邻项变号法求最值；

方法二：利用等差数列前 n 项和公式求 S_n，再根据二次函数性质求最值.

17.【答案】（1）$a_2=4$，$a_3=7$，证明见解析；

（2）$a_n=2^{n-1}+n\left(n\in \mathrm{N}_+\right)$；

（3）$S_n=2^n-1+\dfrac{n(n+1)}{2}\left(n\in \mathrm{N}_+\right)$

【解析】

【分析】（1）利用赋值法即可求得 a_2，a_3，利用等比数列定义即可证得 $\{a_n-n\}$ 是等比数列；

（2）先求得数列 $\{a_n-n\}$ 的通项公式，进而求得 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（3）利用分组求和法即可求得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

【小问 1 详解】

由 $a_1=2$，$a_n=2a_{n-1}-n+2\left(n\ge 2,n\in \mathrm{N}_+\right)$ 得 $a_2=4$，$a_3=7$，

$\because a_n-n=2a_{n-1}-2n+2=2\left[a_{n-1}-(n-1)\right]$，$\therefore \dfrac{a_n-n}{a_{n-1}-(n-1)}=2$，

又 $a_1-1=1$，$\therefore \{a_n-n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列.

【小问 2 详解】

由（1）知 $a_n-n=1\times 2^{n-1}$，$\therefore a_n=2^{n-1}+n\left(n\in \mathrm{N}_+\right)$.

【小问 3 详解】

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$S_n=(2^0+1)+(2^1+2)+(2^2+3)+\cdots+(2^{n-1}+n)$

$=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})+(1+2+3+\cdots+n)$

$=\dfrac{1-2^n}{1-2}+\dfrac{n(n+1)}{2}=2^n-1+\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in N_+)$

18.【答案】(1）$a_n=3^{n-1}(n\in N^*)$，$b_n=2n-1(n\in N^*)$；

（2）$c_n=(n-1)^2+1$；

（3）1（答案不唯一，满足$k\in\left[\dfrac{3}{32},+\infty\right)$即可）.

【解析】

【分析】(1）先利用a_n与S_n的关系求得数列$\{a_n\}$的通项公式，再利用递推关系求得数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）利用叠加法即可求得数列$\{c_n\}$的通项公式；

（3）将题给条件转化为关于k的不等式$k\ge\dfrac{2n-7}{2^n}$恒成立，利用数列的单调性求得数列$\left\{\dfrac{2n-7}{2^n}\right\}$的最大值，进而求得$k$的取值范围，进而得到一个符合条件的$k$的值.

【小问1详解】

数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=\dfrac{3}{2}a_n-\dfrac{1}{2}(n\in N^*)$①，

当$n=1$时，$S_1=a_1=\dfrac{3}{2}a_1-\dfrac{1}{2}$，解得$a_1=1$.

当$n\ge2$时，$S_{n-1}=\dfrac{3}{2}a_{n-1}-\dfrac{1}{2}(n\in N^*)$②，

①②相减得：$a_n=\dfrac{3}{2}a_n-\dfrac{3}{2}a_{n-1}$，则$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=3$（常数），

则数列$\{a_n\}$是以1为首项，3为公比的等比数列.则$a_n=3^{n-1}(n\ge2)$

当$n=1$时，$a_1=3^{1-1}=1$，即满足上式.故$a_n=3^{n-1}(n\in N^*)$.

数列$\{b_n\}$满足：$b_1=a_1=1$，$b_2=3$，$b_n+b_{n+2}=2b_{n+1}(n\in N^*)$，

则数列$\{b_n\}$是以1为首项，2为公差的等差数列，故$b_n=2n-1(n\in N^*)$.

【小问2详解】

$c_1=a_1=1$，$c_{n+1}-c_n=b_n=2n-1$

则$c_n=(c_n-c_{n-1})+(c_{n-1}-c_{n-2})+\cdots+(c_3-c_2)+(c_2-c_1)+c_1$

$=[2(n-1)-1]+[2(n-2)-1]+\cdots+(2\times2-1)+(2\times1-1)+1$

$=\frac{1}{2}(n-1)\left[2(n-1)-1+1\right]+1=(n-1)^2+1$

【小问 3 详解】

不等式 $k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot a_{n+1}-b_n+6\geq 0$ 即 $k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot 3^n-(2n-1)+6\geq 0$

化简得 $k\geq\frac{2n-7}{2^n}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

设 $p_n=\frac{2n-7}{2^n}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，则 $p_{n+1}-p_n=\frac{2(n+1)-7}{2^{n+1}}-\frac{2n-7}{2^n}=\frac{9-2n}{2^{n+1}}$，

当 $1\leq n<5$ 时，$p_{n+1}>p_n$，数列 $\{p_n\}$ 为单调递增数列；

当 $n\geq 5$ 时，$p_{n+1}\leq p_n$，数列 $\{p_n\}$ 为单调递减数列，

由 $\frac{1}{16}=p_4<p_5=\frac{3}{32}$，所以当 $n=5$ 时，p_n 取得最大值 $\frac{3}{32}$，

所以要使 $k\geq\frac{2n-7}{2^n}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，$k\geq\frac{3}{32}$.

故实数 k 的取值范围为 $\left[\frac{3}{32},+\infty\right)$.则一个符合条件的 k 的值为 1.

19.【答案】(I) $M=\{6,12,24\}$；(II) 证明见解析；(III) 8.

【解析】

【分析】(I) $a_1=6$，利用 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_{n>18}\end{cases}$ 可求得集合 M 的所有元素为 6，12，24；

(II) 因为集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，所以不妨设 a_k 是 3 的倍数，由

$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_{n>18}\end{cases}$ $(n=1，2，\ldots)$，可归纳证明对任意 $n\geqslant k$，a_n 是 3 的倍数；

(III) 分 a_1 是 3 的倍数与 a_1 不是 3 的倍数讨论，即可求得集合 M 的元素个数的最大值.

【详解】解：(I) 若 $a_1=6$，由于 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_{n>18}\end{cases}$ $(n=1，2，\ldots)$，$M=\{a_n\mid n\in N^*\}$.

故集合 M 的所有元素为 6，12，24，

$\therefore M=\{6,12,24\}$；

(II) 因为集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，所以不妨设 a_k 是 3 的倍数，由

$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18\\ 2a_n-36, & a_{n>18}\end{cases}$ $(n=1，2，\ldots)$，可归纳证明对任意 $n\geqslant k$，a_n 是 3 的倍数.

如果 $k=1$，M 的所有元素都是 3 的倍数；

如果 $k>1$，因为 $a_k=2a_{k-1}$，或 $a_k=2a_{k-1}-36$，所以 $2a_{k-1}$ 是 3 的倍数；于是 a_{k-1} 是 3 的倍数；

类似可得，a_{k-2}，$\cdots$，a_1 都是 3 的倍数；

从而对任意 $n\geqslant1$，a_n 是 3 的倍数；

综上，若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，则集合 M 的所有元素都是 3 的倍数

（III）对 $a_1\leqslant36$，$a_n=\begin{cases}2a_{n-1}, & a_n\leqslant18\\ 2a_{n-1}-36, & a_{n>18}\end{cases}(n=1，2，\ldots)$，可归纳证明对任意 $n\geqslant k$，$a_n<36(n=2，3，\ldots)$

因为 a_1 是正整数，$a_2=\begin{cases}2a_1, a_1\leqslant18\\ 2a_1-36, a_1>18\end{cases}$，所以 a_2 是 2 的倍数．

从而当 $n\geqslant2$ 时，a_n 是 2 的倍数．

如果 a_1 是 3 的倍数，由（II）知，对所有正整数 n，a_n 是 3 的倍数．

因此当 $n\geqslant3$ 时，$a_n\in\{12，24，36\}$，这时 M 的元素个数不超过 5．

如果 a_1 不是 3 的倍数，由（II）知，对所有正整数 n，a_n 不是 3 的倍数．

因此当 $n\geqslant3$ 时，$a_n\in\{4，8，16，20，28，32\}$，这时 M 的元素个数不超过 8．

当 $a_1=1$ 时，$M=\{1，2，4，8，16，20，28，32\}$，有 8 个元素．

综上可知，集合 M 的元素个数的最大值为 8．

考点：1.分段函数形数列通项公式求值；2.归纳法证明；3.数列元素分析．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。