海淀区高三年级第一学期期中练习

数　　学（文科）　2016.11

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $A=\{x|x>2\}$，$B=\{x|(x-1)(x-3)<0\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{x|x>1\}$　　B．$\{x|2<x<3\}$　　C．$\{x|1<x<3\}$　　D．$\{x|x>2$ 或 $x<1\}$

2．已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,x)$，$\boldsymbol{b}=(-2,4)$．若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 x 的值为

A．-2　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

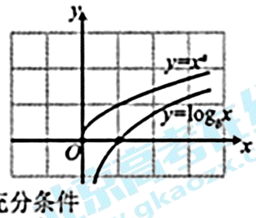
3．已知命题 p：$\forall x>0$，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，命题 q：若 $a>b$，则 $ac>bc$．下列命题为真命题的是

A．q　　B．$\neg p$　　C．$p\vee q$　　D．$p\wedge q$

4．若角 θ 的终边过点 $P(3,-4)$，则 $\tan(\theta+\pi)=$

A．$\frac{3}{4}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$-\frac{4}{3}$

5．已知函数 $y=x^a$，$y=\log_b x$ 的图象如图所示，则



A．$b>1>a$　　B．$b>a>1$

C．$a>1>b$　　D．$a>b>1$

6．设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，则“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．给定条件：① $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(-x_0)=-f(x_0)$；

② $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(1-x)=f(1+x)$．

下列三个函数：$y=x^3$，$y=|x-1|$，$y=\cos\pi x$ 中，同时满足条件①②的函数个数是

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

8. 已知定义在R上的函数$f(x)=\begin{cases}2^x+a, x\leq 0,\\ \ln(x+a), x>0.\end{cases}$若方程$f(x)=\frac{1}{2}$有两个不相等的实数根，则$a$的取值范围是

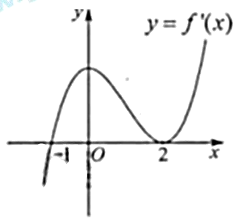
A. $-\frac{1}{2}\leq a\leq\frac{1}{2}$　　B. $0\leq a<\frac{1}{2}$　　C. $0\leq a<1$　　D. $-\frac{1}{2}<a\leq 0$

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

9. 计算$\lg 2-\lg\frac{1}{4}+3\lg 5=$ ___.

10. 已知$\sin\theta=\frac{2}{3}$，则$\cos 2\theta=$___.



11. 已知函数$y=f(x)$的导函数有且仅有两个零点，其图象如图所示，则函数$y=f(x)$在$x=$___处取得极值.

12. 在正方形$ABCD$中，E是线段CD的中点. 若$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BD}$，则$\lambda-\mu=$ ___.

13. 在$\triangle ABC$中，$\cos A=\frac{13}{14}$，$7a=3b$，则$B=$___.

14. 去年某地的月平均气温y（℃）与月份x（月）近似地满足函数$y=a+b\sin(\frac{\pi}{6}x+\varphi)$（$a,b$为常数，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）．其中三个月份的月平均气温如表所示：

x	5	8	11
y	13	31	13

则该地2月份的月平均气温约为___℃，$\varphi=$___.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})-\cos 2x$.

（Ⅰ）求 $f(0)$ 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间.

16.（本小题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,且 $a_2=-1$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n-b_{n-1}=a_n(n=2, 3, 4,\cdots)$，且 $b_1=b_3=1$.

（Ⅰ）求 a_1 的值；

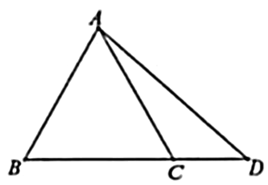
（Ⅱ）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

17.（本小题满分 13 分）

如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 在边 BC 的延长线上，且 $BC=2CD$，$AD=\sqrt{7}$.

（Ⅰ）求 $\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle D}$ 的值；

（Ⅱ）求 CD 的长.



18.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\frac{ax-1}{e^x}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $a<0$ 时，求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值.

19.（本小题满分 13 分）

已知$\{a_n\}$是等比数列，$a_2=2$，且公比$q>0$，$-2,a_1,a_3$成等差数列.

（Ⅰ）求q的值；

（Ⅱ）已知$b_n=a_na_{n+2}-\lambda na_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$，设$S_n$是数列$\{b_n\}$的前$n$项和．若$S_1>S_2$，且$S_k<S_{k+1}(k=2,3,4,\cdots)$，求实数$\lambda$的取值范围.

20.（本小题满分 14 分）

已知函数$f(x)=x^3-9x$，$g(x)=3x^2+a$.

（Ⅰ）若曲线$y=f(x)$与曲线$y=g(x)$在它们的交点处具有公共切线，求a的值；

（Ⅱ）若存在实数b使不等式$f(x)<g(x)$的解集为$(-\infty,b)$，求实数a的取值范围；

（Ⅲ）若方程$f(x)=g(x)$有三个不同的解x_1,x_2,x_3，且它们可以构成等差数列，写出实数a的值.（只需写出结果）

海淀区高三年级第一学期期中练习参考答案

数学（文科） 2016.11

阅卷须知:

1.评分参考中所注分数，表示考生正确做了该步应得的该步骤分数。

2.其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分。

一、选择题（本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	D	A	C	B	B

二、填空题（本大题共 6 小题, 每小题 5 分，有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分，共 30 分）

9. 3	10. $\frac{1}{9}$	11. -1
12. $\frac{1}{2}$	13. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$	14. $-5;\frac{\pi}{6}$

（第 13 题，丢一解扣 3 分. 第 14 题，前空 3 分，后空 2 分）

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80 分)

15.（本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）$f(0)=\cos(-\frac{\pi}{3})-\cos 0$

$=\frac{1}{2}-1$（每个三角函数值各 2 分）

$=-\frac{1}{2}$

（Ⅱ）因为 $f(x)=\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\cos 2x$

$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

函数 $y=\sin x$ 的单调增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

（没有 k 范围，扣 1 分）

得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

16. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n-b_{n-1}=a_n(n\ge 2,n\in N^*)$，

所以 $b_2-b_1=a_2=-1$，

又因为 $b_1=1$，所以 $b_2=0$，

所以 $a_3=b_3-b_2=1-0=1$，

又因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $d=a_3-a_2=1-(-1)=2$，

所以 $a_1=a_2-d=-1-2=-3$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，数列 $\{a_n\}$ 是以为 -3 为首项，2 为公差的等差数列，

所以 $a_n=-3+(n-1)\cdot 2=2n-5$，

由条件，当 $n\ge 2$ 时，$b_n-b_{n-1}=2n-5$

$b_{n-1}-b_{n-2}=2\cdot(n-1)-5$

…

$b_2-b_1=-1$，

将上述各等式相加整理得，$b_n-b_1=\frac{-1+(2n-5)}{2}\cdot(n-1)=n^2-4n+3$，

（求和公式 2 分，结果 1 分）

所以 $b_n=b_1+n^2-4n+3=n^2-4n+4\quad(n\ge 2)$.

当 $n=1$ 时，$b_1=1$ 也满足上式，

所以 $b_n=n^2-4n+4\quad(n\in\mathbf{N}^*)$.

17. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 ΔABC 为等边三角形，所以 $AC=BC$，

又因为 $BC=2CD$，所以 $AC=2CD$，

在 ΔACD 中，由正弦定理可得

$$\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle D},$$

即 $\dfrac{\sin\angle CAD}{\sin\angle D}=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅱ）法一：设 $CD=x$，则 $BC=2x$，

所以 $BD=3x$.

在 ΔABD 中，$AD=\sqrt{7},AB=2x,\angle B=\dfrac{\pi}{3}$，

由余弦定理可得

$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\angle B$，

即 $7=4x^2+9x^2-2x\cdot 3x$，

解得 $x=1$，

所以 $CD=1$.

法二：取 BC 中点 E，连接 AE.

在等边三角形 ΔABC 中，

$AE\perp BC$，$AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BC$，

设 $CD=x$，则 $BC=2x$，

所以 $AE=\sqrt{3}x$，$DE=2x$，

在直角三角形 ΔAED 中，

$AD^2=AE^2+DE^2=7x^2=7$，

解得 $x=1$，即 $CD=1$.

18.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$，$x\in\mathbf{R}$

所以 $f'(x)=\dfrac{-x+2}{e^x}$，

由 $f'(x)=0$ 得 $x=2$.

$f'(x),f(x)$ 随 x 的变化如下：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,2)$，单调递减区间为 $(2,+\infty)$.

（Ⅱ）由 $f(x)=\dfrac{ax-1}{e^x}$ 得

$f'(x)=\dfrac{-ax+a+1}{e^x}$，$x\in[0,1]$.

令 $f'(x)=0$，因为 $a<0$，解得 $x=1+\dfrac{1}{a}<1$.

①当 $1+\dfrac{1}{a}\leqslant 0$ 时，即 $-1\leqslant a<0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in[0,1]$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=-1$；

②当 $0<1+\dfrac{1}{a}<1$ 时，即 $a<-1$ 时，$f'(x),f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的情况如下：

x	0	$(0,1+\dfrac{1}{a})$	$1+\dfrac{1}{a}$	$(1+\dfrac{1}{a},1)$	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	极小值	↗	

所以 $f(x)_{\min}=f(1+\dfrac{1}{a})=\dfrac{a}{e^{1+\frac{1}{a}}}$，

综上，当 $-1\leqslant a<0$ 时，$f(x)_{\min}=-1$；当 $a<-1$ 时，$f(x)_{\min}=\dfrac{a}{e^{1+\frac{1}{a}}}$.

19.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $-2,a_1,a_3$ 成等差数列，所以 $2a_1=-2+a_3$ ①，

又因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_2=2,q>0$，

所以 $a_3=2q,a_1=\dfrac{2}{q}$，

代入①，可得 $2\times\dfrac{2}{q}=-2+2q$，

即 $q^2-q-2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-1$（舍），

所以$q=2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得$a_n=2^{n-1}$，

所以$b_n=a_na_{n+2}-\lambda na_{n+1}=4^n-\lambda n\cdot 2^n$.

由$S_1>S_2$，所以$S_2-S_1<0$，即$b_2<0$，

所以$4^2-2\lambda\cdot 4<0$，解得$\lambda>2$；

由$S_k<S_{k+1}(k\geqslant 2,k\in \mathbf{N}^*)$，即$b_{k+1}>0$对$\forall k\geqslant 2$且$k\in\mathbf{N}^*$恒成立，

由$b_{k+1}=4^{k+1}-\lambda(k+1)2^{k+1}>0$可得$\lambda<\dfrac{2^{k+1}}{k+1}$.

设$c_k=\dfrac{2^{k+1}}{k+1}$ $(k\geqslant 2,k\in\mathbf{N}^*)$，只需$\lambda<(c_k)_{\min}$ $(k\geqslant 2,k\in\mathbf{N}^*)$即可.

因为$\dfrac{c_{k+1}}{c_k}=\dfrac{2^{k+2}}{k+2}\times\dfrac{k+1}{2^{k+1}}=\dfrac{k+(k+2)}{k+2}>1$，

（也可以：因为$c_{k+1}-c_k=\dfrac{2^{k+2}}{k+2}-\dfrac{2^{k+1}}{k+1}=2^{k+1}\cdot(\dfrac{2}{k+2}-\dfrac{1}{k+1})=2^{k+1}\cdot\dfrac{k}{(k+2)\cdot(k+1)}>0$）

所以数列$\{c_k\}$在$k\geqslant 2$且$k\in\mathbf{N}^*$上单调递增的，

所以$(c_k)_{\min}=c_2=\dfrac{2^3}{3}=\dfrac{8}{3}$，

所以$\lambda<\dfrac{8}{3}$；

又因为$\lambda>2$，所以$\lambda\in(2,\dfrac{8}{3})$.

20.（本小题满分14分）

解：（Ⅰ）设$f(x)$与$g(x)$的交点坐标为(x_0,y_0)，则由条件，有$\begin{cases}f'(x_0)=g'(x_0),\\ f(x_0)=g(x_0),\end{cases}$

即$\begin{cases}3x_0{}^2-9=6x_0,\\ x_0{}^3-9x_0=3x_0{}^2+a,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_0=3\\ a=-27\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=-1\\ a=5\end{cases}$，所以$a=-27$或$a=5$.

（Ⅱ）若存在实数b使不等式$f(x)<g(x)$的解集为$(-\infty,b)$，

即$x^3-3x^2-9x<a$的解集为$(-\infty,b)$.

令 $h(x)=x^3-3x^2-9x$，

则 $y=h(x)$ 的图象在直线 $y=a$ 下方的部分对应点的横坐标 $x\in(-\infty,b)$.

$h'(x)=3x^2-6x-9$，由 $h'(x)=0$ 解得 $x_1=3,x_2=-1$，

$f'(x),f(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$h(x)$	+	0	−	0	+
$h'(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因为 $h(a^2+5)=(a^2+5)(a^4+7a^2+1)>a^2+5\geq 2\sqrt{5}|a|\geq a$，即 $h(a^2+5)>a$；

$h(-a^2-2)=-(a^2+2)(a^4+7a^2+1)<-(a^2+2)\leq -2\sqrt{2}|a|\leq a$，即 $h(-a^2-2)<a$，

（或者：因为当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，当 $x\to-\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$）

又因为 $h(x)_{极大值}=h(-1)=5$，$h(x)_{极小值}=h(3)=-27$，

所以当 $a>5$ 或 $a\leqslant -27$ 满足条件.

（两个区域各1分）

（III）$a=-11$.

扫描二维码，关注北京高考官方微信！

查看更多北京高考相关资讯！