绝密★启用前

# 高三数学考试

**注意事项：**

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：集合与常用逻辑用语，函数与导数，不等式，三角函数与解三角形，平面向量，复数，数列，立体几何初步。

**一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知集合 $A=\{1,5,a^2\}$，$B=\{1,2a+3\}$，且 $B\subseteq A$，则 $a=$

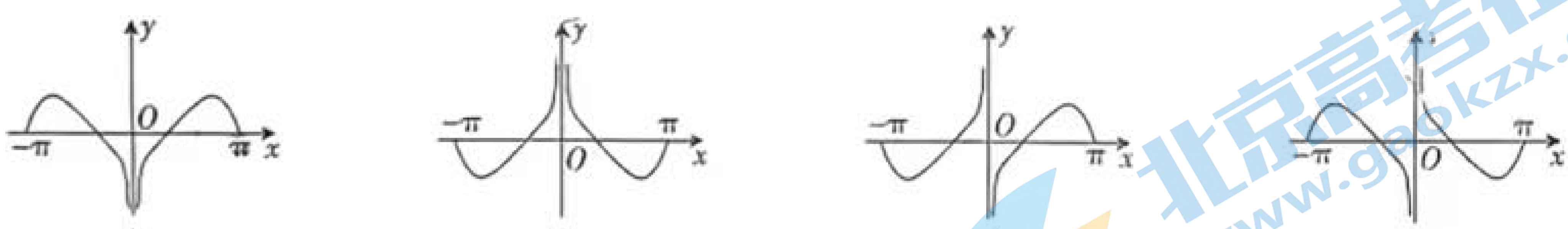
A. $-1$　　B. 1　　C. $-3$　　D. 3

2. 命题"$\forall x\in(0,1)$，$\sin x>-x^2+2x-1$"的否定为

A. $\exists x\notin(0,1)$，$\sin x\leqslant -x^2+2x-1$　　B. $\exists x\in(0,1)$，$\sin x\leqslant -x^2+2x-1$

C. $\forall x\notin(0,1)$，$\sin x>-x^2+2x-1$　　D. $\forall x\in(0,1)$，$\sin x\leqslant -x^2+2x-1$

3. 函数 $f(x)=(e^{\log_2|x|}-e^{-\log_2|x|})\cdot\sin x$ 在区间$[-\pi,\pi]$上的图象大致为




A　　B　　C　　D

4. 若 $p:x^2-9\leqslant 0$，$q:\log_{0.5}(x-1)>-1$，则 $p$ 是 $q$ 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

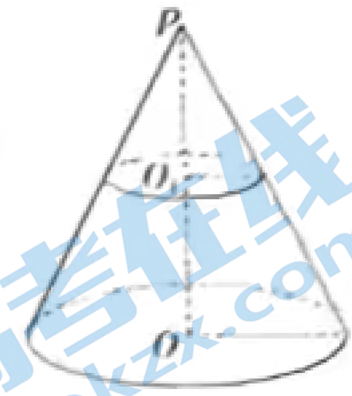
5. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AA_1=2AD=2CD$，点 $E$ 是线段 $CD$ 的中点，则异面直线 $D_1E$ 与 $BC_1$ 所成角的余弦值为

A. $\frac{8\sqrt{85}}{85}$　　B. $\frac{8}{9}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{85}}{85}$

6. 当强度为 $x$ 的声音对应的等级为 $f(x)$分贝时，有 $f(x)=10\lg\frac{x}{A_0}$(其中 $A_0$ 为常数)，某挖掘机的声音约为 90 分贝，普通室内谈话的声音约为 50 分贝，则该挖掘机的声音强度与普通室内谈话的声音强度的比值为

A. $e^4$　　B. $10^4$　　C. $\frac{9}{5}$　　D. $10^{\frac{9}{5}}$

7. 如图，在圆锥 $PO$ 中，用一个平行于底面的平面去截圆锥 $PO$，可得一个圆锥 $PO_1$ 和一个圆台 $O_1O$，若圆锥 $PO_1$ 的体积是圆锥 $PO$ 体积的 $\frac{1}{8}$，则圆锥 $PO_1$ 与圆台 $O_1O$ 的侧面积的比值为



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

8. 已知函数 $f(x)=\sin x-2ax-ax\cos x$，$\forall x\geqslant 0$，$f(x)\leqslant 0$，则实数 $a$ 的取值范围是

A. $[\frac{1}{4},+\infty)$　　B. $(0,\frac{1}{4}]$　　C. $[\frac{1}{3},+\infty)$　　D. $(0,\frac{1}{3}]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $z(2+i)=i^2$，则下列说法正确的是

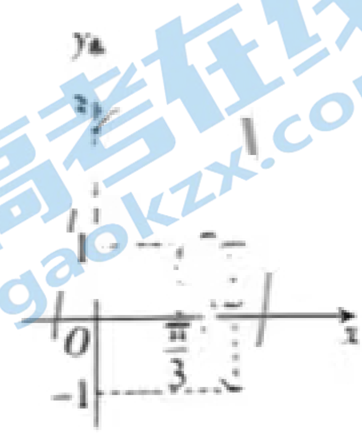
A. $z$ 在复平面内对应的点的坐标为$(\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$

B. $z=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

C. $z$ 在复平面内对应的点与点$(\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$关于原点对称

D. $|z|=\frac{\sqrt{5}}{5}$

10. 如图，这是函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$的部分图象，则



A. $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$

B. $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+1$

C. $f(x)=1-2\cos(2x+\frac{5\pi}{6})$

D. $f(x)=1-2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$

11. 已知 $m>1$，$n>1$，且 $m+n=3$，则

A. $\log_3 m+\log_3 n\leqslant 2-\log_3 4$　　B. $\ln\frac{e^m}{e}\geqslant\ln(2e^{\frac{n}{2}}-e^{\frac{3}{2}})$

C. $\frac{2}{2m-1}+\frac{1}{n-1}\geqslant\frac{8}{3}$　　D. $m^2+n^2\geqslant 9$

12. 意大利数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时，发现了这样一个数列：1，1，2，3，5，8，…. 这个数列的前两项均是 1，从第三项开始，每一项都等于前两项之和. 人们把这样的一列数组成的数列$\{F_n\}$称为斐波那契数列. 现将数列$\{F_n\}$中的各项除以 3 所得余数按原顺序构成的数列记为$\{G_n\}$，则下列说法正确的是

A. $\sum^{2024} F_i=F_{2026}-1$　　B. $\sum^{2024} F_i^2=F_{2023}F_{2024}$

C. $G_{2024}=0$　　D. $\sum_{1} G_i=2277$

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．把答案填在答题卡中的横线上．**

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=-2$，则 $|\boldsymbol{b}|=$ ____▲____．

14. 若 $\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$，则 $\tan\theta=$ ____▲____．

15. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $S_3=13$，且 $a_5=a_4+6a_3$，则满足 $S_n<41$ 的 $n$ 的最大值为 ____▲____．

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足 $f(x)+f(x+4)=f(21)$，$f(8-x)=f(x-4)$，$f(0)=1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2025}f(k)=$ ____▲____．

**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17.（10分）

记△$ABC$ 的内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，已知 $\cos A=\frac{2c-a}{2b}$．

（1）求 $B$；

（2）若 $c=3$，$b=\sqrt{13}$，求△$ABC$ 的面积．

18.（12分）

设函数 $f(x)=x^2-3x+\ln x$．

（1）求 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值；

（2）设函数 $g(x)=f(x)-3x+3\ln x$，关于 $x$ 的方程 $g(x)=2m-1$ 有3个不同的根，求 $m$ 的取值范围．

19.（12分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，且 $S_n=2a_n-2$，数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，$b_3+b_4+b_5=21$，$b_6=11$．

（1）求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

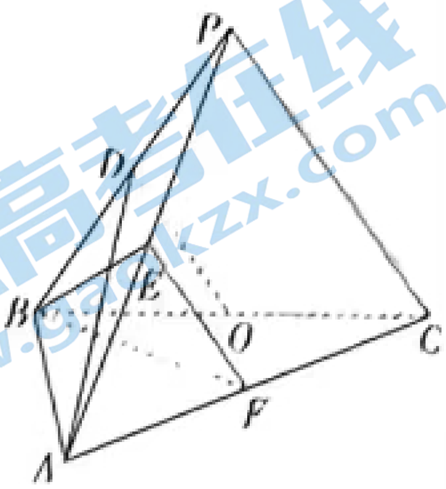
（2）求数列 $\{\frac{b_n}{a_n}\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$．

20.(12 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$AB\perp BC$,$AB=2$,$BC=2\sqrt{2}$,$\triangle PBC$ 为等边三角形,$BP$,$AP$,$BC$ 的中点分别为 $D$,$E$,$O$,且 $AD=\sqrt{3}DO$.

(1)证明:平面 $ABC\perp$ 平面 $PBC$.

(2)若 $F$ 为 $AC$ 的中点,求点 $C$ 到平面 $BEF$ 的距离.




21.(12 分)

近期随着某种国产中高端品牌手机的上市,我国的芯片技术迎来了重大突破.某企业原有 1000 名技术人员,年人均投入 $a$ 万元($a>0$),现为加强技术研发,该企业把原有技术人员分成技术人员和研发人员,其中技术人员 $x$ 名($x\in\mathbf{N}$ 且 $100\leqslant x\leqslant 500$),调整后研发人员的年人均投入增加($0.2x$)%,技术人员的年人均投入调整为 $a\left(m-\dfrac{3x}{1000}\right)$万元.

(1)若要使调整后研发人员的年总投入不低于调整前 1000 名技术人员的年总投入,则调整后的研发人员的人数最少为多少?

(2)为了激发研发人员的工作热情和保持技术人员的工作积极性,企业决定在投入方面要同时满足以下两个条件:①研发人员的年总投入始终不低于技术人员的年总投入;②技术人员的年人均投入始终不减少.请问是否存在这样的实数 $m$,满足以上两个条件?若存在,求出 $m$ 的取值范围;若不存在,说明理由.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=e^{4x-1}-4a\ln(2x)$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点$\left(\dfrac{1}{2},f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$处的切线方程;

(2)当 $a>0$ 时,若关于 $x$ 的不等式 $f(x)$ $a+a\ln(2a)$ 恒成立,求实数 $a$ 的取值范围.

# 高三数学考试参考答案

1. D 【解析】本题考查集合间的基本关系，考查数学运算的核心素养.

若 $2a+3=5$，则 $a=1$，此时 $a^2=1$，不满足互异性；若 $a^2=2a+3$，则解得 $a=3$ 或 $a=-1$，显然，$a=3$ 符合题意，而当 $a=-1$ 时，$a^2=1$，不满足互异性.

2. B 【解析】本题考查常用逻辑用语，考查逻辑推理的核心素养.

全称量词命题的否定为存在量词命题，故原命题的否定为 $\exists x\in(0,1)$，$\sin x\leqslant -x^2+2x-1$.

3. C 【解析】本题考查函数的图象与性质，考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

因为 $f(-x)=(e^{\log_2|-x|}-e^{-\log_2|-x|})\cdot\sin(-x)=-(e^{\log_2|x|}-e^{-\log_2|x|})\cdot\sin x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，A，B 错误. 又当 $0<x<1$ 时，$\log_2|x|<0<-\log_2|x|$，所以 $e^{\log_2|x|}<e^{-\log_2|x|}$，$\sin x>0$，从而 $f(x)=(e^{\log_2|x|}-e^{-\log_2|x|})\cdot\sin x<0$，C 正确，D 错误.

4. B 【解析】本题考查常用逻辑用语，考查逻辑推理的核心素养.

由 $x^2-9\leqslant0$，得 $-3\leqslant x\leqslant3$，由 $\log_{0.5}(x-1)>-1$，得 $1<x<3$，所以 $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件.

5. A 【解析】本题考查异面直线所成的角，考查直观想象的核心素养.

设 $AD=CD=2$，则 $AA_1=4$，易知 $AD_1\parallel BC_1$，所以异面直线 $D_1E$ 与 $BC_1$ 所成的角为 $\angle AD_1E$. 经计算可知 $D_1E=\sqrt{17}$，$AD_1=2\sqrt5$，$AE=\sqrt5$，所以 $\cos\angle AD_1E=\dfrac{17+20-5}{2\sqrt{17}\times2\sqrt5}=\dfrac{8\sqrt{85}}{85}$.

6. B 【解析】本题考查函数的应用，考查数学建模的核心素养.

设该挖掘机的声音强度为 $x_1$，普通室内谈话的声音强度为 $x_2$，由题意知 $\begin{cases}10\lg\dfrac{x_1}{A_0}=90,\\10\lg\dfrac{x_2}{A_0}=50,\end{cases}$ 化简得 $\begin{cases}\dfrac{x_1}{A_0}=10^9,\\\dfrac{x_2}{A_0}=10^5,\end{cases}$ 所以 $\dfrac{x_1}{x_2}=10^4$.

7. D 【解析】本题考查旋转体的体积与侧面积，考查直观想象的核心素养.

设圆锥 $PO_1$，$PO$ 的底面圆半径分别为 $r$，$R$，它们的母线长分别为 $l$，$L$，因为 $\dfrac{V_{PO_1}}{V_{PO}}=(\dfrac{r}{R})^3=\dfrac18$，所以 $\dfrac{r}{R}=\dfrac12$，从而 $\dfrac{l}{L}=\dfrac12$，即 $R=2r$，$L=2l$. 所以 $\dfrac{S_{PO_1侧}}{S_{OO_1侧}}=\dfrac{\pi rl}{\pi\cdot2r\cdot2l-\pi rl}=\dfrac13$.

8. C 【解析】本题考查导数在研究函数中的应用，考查逻辑推理的核心素养.

$\forall x\geqslant0$，$f(x)\leqslant0$ 等价于 $\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\leqslant ax$. 记 $g(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}-ax$，即 $g(x)\leqslant0$ 在 $[0,+\infty)$ 上

恒成立. $g'(x)=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}-a=-3(\frac{1}{2+\cos x}-\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}-a$.

当 $\frac{1}{3}-a\leqslant 0$，即 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\leqslant g(0)=0$，即 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立；

当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时，记 $h(x)=\frac{\sin x}{3}-ax$，则 $h'(x)=\frac{\cos x}{3}-a$，存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $h'(x_0)=0$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)>h(0)=0$，即 $\frac{\sin x}{3}>ax$，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\frac{\sin x}{2+\cos x}\geqslant\frac{\sin x}{3}>ax$，即 $f(x)>0$，不符合题意；

当 $a\leqslant 0$ 时，$f(\frac{\pi}{2})=1-\pi a>0$，不符合题意.

综上，$a$ 的取值范围是 $[\frac{1}{3},+\infty)$.

9. BCD **【解析】本题考查复数的运算与几何意义，考查数学运算的核心素养.**

由题可得 $z=\frac{-1}{2+i}=\frac{-(2-i)}{4-i^2}=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$，即 $z$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(-\frac{2}{5},\frac{1}{5})$，与点 $(\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$ 关于原点对称，A 错误，C 正确；$\bar{z}=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$，B 正确；$|z|=\sqrt{(-\frac{2}{5})^2+(\frac{1}{5})^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，D 正确.

10. BC **【解析】本题考查三角函数的图象与性质，考查直观想象与数学运算的核心素养.**

因为 $\begin{cases}A+b=3,\\-A+b=-1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}A=2,\\b=1.\end{cases}$ 又 $\frac{1}{4}T=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，则 $\omega=2$，故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)+1$. 将点 $(\frac{\pi}{3},1)$ 的坐标代入 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)+1$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+1$，B 正确；若 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$，则 $f(\frac{\pi}{3})=2$，A 错误；而 $1-2\cos(2x+\frac{5\pi}{6})=1-2\cos(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+1$，C 正确；若 $f(x)=1-2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$，则 $f(0)=0$，D 错误.

11. ABC **【解析】本题考查不等式，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.**

因为 $mn\leqslant(\frac{m+n}{2})^2$，所以 $\log_3 m+\log_3 n=\log_3(mn)\leqslant\log_3(\frac{m+n}{2})^2=2-\log_3 4$，当且仅当 $m=n$ 时，等号成立，A 正确；易知 $e^m+e^n\geqslant 2\sqrt{e^m e^n}$，即 $e^m+e^n\geqslant 2e^{\frac{m}{2}}e^{\frac{n}{2}}$，所以 $e^m\geqslant 2e^{\frac{m}{2}}e^{\frac{n}{2}}-e^n$，$\frac{e^m}{e^{\frac{n}{2}}}\geqslant 2e^{\frac{m}{2}}-e^{\frac{n}{2}}>2e^{\frac{1}{2}}-e^{\frac{2}{2}}>0$，故 $\ln\frac{e^m}{e^{\frac{n}{2}}}\geqslant\ln(2e^{\frac{m}{2}}-e^{\frac{n}{2}})$，B 正确；

因为 $\frac{2}{2m-1}+\frac{1}{n-1}=\frac{2}{2m-1}+\frac{2}{2n-2}$，$m+n=3$，所以 $2m-1+2n-2=3$，$\frac{2}{2m-1}+\frac{1}{n-1}$

$\frac{1}{3}(\frac{2}{2m-1}+\frac{2}{2n-2})(2m-1+2n-2)=\frac{1}{3}(4+\frac{4n-4}{2m-1}+\frac{4m-2}{2n-2})$，因为$\frac{4n-4}{2m-1}+\frac{4m-2}{2n-2}\geqslant 2\sqrt{4}=4$，所以$\frac{1}{3}(4+\frac{4n-4}{2m-1}+\frac{4m-2}{2n-2})\geqslant\frac{8}{3}$，当且仅当$m=\frac{5}{4}$，$n=\frac{7}{4}$时，等号成立，C正确；$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=9-2mn<9$，D错误.

12. ACD 【解析】本题考查数学文化与数列的求和，考查数学抽象与数学运算的核心素养.

对于A，因为$F_{n+2}-F_{n+1}=F_n$，所以$F_3-F_2=F_1$，$F_4-F_3=F_2$，$F_5-F_4=F_3$，…，$F_{2026}-F_{2025}=F_{2024}$，上式两边分别相加得$F_{2026}-F_2=\sum_{i=1}^{2024}F_i$，又$F_1=F_2=1$，所以$\sum_{i=1}^{2024}F_i=F_{2026}-1$，A正确.

对于B，因为$F_{n+1}=F_{n+2}-F_n$，所以$F_{n+1}^2=F_{n+2}F_{n+1}-F_{n+1}F_n$，所以$F_2^2=F_3F_2-F_2F_1$，$F_3^2=F_4F_3-F_3F_2$，$F_4^2=F_5F_4-F_4F_3$，…，$F_{2024}^2=F_{2025}F_{2024}-F_{2024}F_{2023}$，上式两边分别相加得$F_2^2+F_3^2+\cdots+F_{2024}^2=F_{2025}F_{2024}-1$，所以$\sum_{i=1}^{2024}F_i^2=F_{2024}F_{2025}$，B错误.

对于C，由题意知$G_1=1$，$G_2=1$，$G_3=2$，$G_4=0$，$G_5=2$，$G_6=2$，$G_7=1$，$G_8=0$，$G_9=1$，$G_{10}=1$，…，所以数列$\{G_n\}$是最小正周期为8的数列，故$G_{2024}=G_8=0$，C正确.

对于D，$\sum_{i=1}^{2024}G_i=253\times(1+1+2+0+2+2+1+0)=2277$，D正确.

13. 3 【解析】本题考查平面向量的夹角与模，考查数学运算的核心素养.

因为$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-2|\boldsymbol{b}|\times\frac{1}{2}=-2$，所以$|\boldsymbol{b}|=3$.

14. $-3$ 【解析】本题考查三角恒等变换，考查数学运算的核心素养.

因为$\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=-\frac{1}{2}$，所以$\tan\theta=-3$.

15. 4 【解析】本题考查等比数列的性质与求和，考查数学运算的核心素养.

设公比为$q$，因为$a_5=a_4+6a_3$，所以$q^2-q-6=0$，解得$q=3$. 又由$S_3=13$，即$a_1+3a_1+9a_1=13$，解得$a_1=1$，所以$S_n=\frac{3^n-1}{2}$. 由$\frac{3^n-1}{2}<41$，得$3^n<83$，所以$n$的最大值为4.

16. 2024 【解析】本题考查抽象函数，考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

由$f(8-x)=f(x-4)$可知$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，从而$f(4)=f(0)=1$. 又$f(x)+f(x+4)=f(21)$，令$x=0$，得$f(21)=f(0)+f(4)=2$，则$f(1)+f(5)=f(2)+f(6)=f(3)+f(7)=f(4)+f(8)=2$. 由$f(x)+f(x+4)=2$，得$f(x+4)+f(x+8)=2$，可推出$f(x+8)=f(x)$，故$f(x)$的最小正周期为8，则$f(21)=f(5)=2$，$f(1)=0$. 因为$2025=8\times 253+1$，所以$\sum_{k=1}^{2025}f(k)=253[f(1)+f(2)+\cdots+f(8)]+f(1)=2024$.

17. 解：(1)因为$\cos A=\frac{2c-a}{2b}$，所以$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2c-a}{2b}$， ………………………………… 2分

整理得$a^2+c^2-b^2=ac$，

所以$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$， ……………………………………………………… 4分

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c=3$，$b=\sqrt{13}$，

所以 $13=a^2+9-3a$，即 $a^2-3a-4=0$， …………………………………………………… 7 分

解得 $a=4$. ……………………………………………………………………………………… 9 分

所以$\triangle ABC$的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$. ……………………… 10 分

评分细则：

第一问另解：

因为 $\cos A=\frac{2c-a}{2b}$，所以 $2b\cos A=2c-a$. ……………………………………………… 1 分

由正弦定理得 $2\cos A\sin B=2\sin(A+B)-\sin A$，

整理得 $2\sin A\cos B-\sin A=0$. ……………………………………………………………… 3 分

因为 $\sin A>0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 4 分

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………………… 5 分

18. 解：(1)因为 $f(x)=x^2-3x+\ln x$，所以 $f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$. ……… 2 分

令 $f'(x)<0$，解得 $\frac{1}{2}<x<1$，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$， …………………… 3 分

所以 $f(x)$在$(0,\frac{1}{2})$上单调递增，在$(\frac{1}{2},1]$上单调递减. ……………………………… 4 分

所以 $f(x)$在$(0,1]$上的最大值为 $f(\frac{1}{2})=-\frac{5}{4}-\ln 2$. ……………………………………… 5 分

(2) $g(x)=x^2-6x+4\ln x$，它的定义域是$(0,+\infty)$，且 $g'(x)=2x-6+\frac{4}{x}=\frac{2(x-2)(x-1)}{x}$， …………………………………………………………………………… 7 分

当 $x\in(0,1)\cup(2,+\infty)$时，$g'(x)>0$，当 $x\in(1,2)$时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增. ……………………………………… 9 分

因为方程 $g(x)=2m-1$ 有 3 个不同的根，$g(1)=-5$，$g(2)=4\ln 2-8$，……………… 10 分

所以 $4\ln 2-8<2m-1<-5$，解得 $2\ln 2-\frac{7}{2}<m<-2$，即 $m$ 的取值范围为$(2\ln 2-\frac{7}{2},-2)$. …………………………………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出 $f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$，得 2 分，正确写出单调区间，累计得 4 分，第一问都正确，累计得 5 分.

【2】第二问，写出 $g'(x)=2x-6+\frac{4}{x}=\frac{2(x-2)(x-1)}{x}$，累计得 7 分，正确写出单调区间，累计得 9 分，正确计算出两个极值，累计得 10 分，直至求出正确答案，累计得 12 分.

【3】采用其他方法，参照本评分标准依步骤给分.

19. 解：(1)当 $n=1$ 时，$a_1=2a_1-2$，解得 $a_1=2$. ……………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=2a_n-2$，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$，

两式相减得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$，……………………………… 3 分

所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，故 $a_n=2^n$. ……………………………… 4 分

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d$，由 $b_3+b_4+b_5=21$，可得 $b_4=7$，……………………………… 5 分

又 $b_6=11$，所以 $7+2d=11$，解得 $d=2$，故 $b_n=2n-1$. ……………………………… 6 分

(2)令 $c_n=\frac{b_n}{a_n}$，则由(1)可知 $c_n=\frac{2n-1}{2^n}$，……………………………… 7 分

则 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，①

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，② ……………………………… 8 分

①−②，得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$，……………………………… 11 分

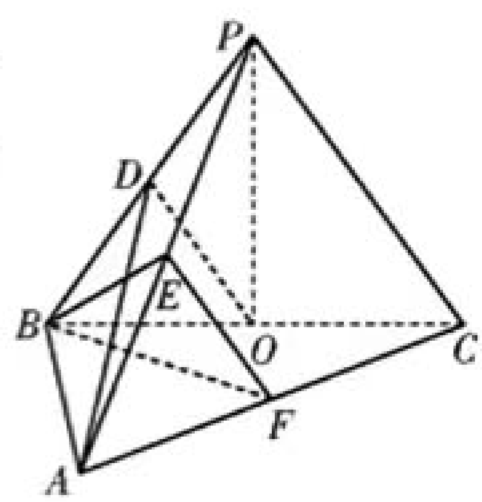
所以 $T_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$. ……………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出 $a_1=2$，得 1 分，写出 $a_n=2^n$，累计得 4 分，写出 $b_4=7$，累计得 5 分，求出 $b_n=2n-1$，累计得 6 分.

【2】第二问，求出 $c_n=\frac{2n-1}{2^n}$，累计得 7 分，求出 $\frac{1}{2}T_n=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$，累计得 11 分，直到给出正确结论得 12 分.

20. (1)证明：因为 $\triangle PBC$ 为等边三角形，$D$，$O$ 分别是 $BP$，$BC$ 的中点，且 $BC=2\sqrt{2}$，所以 $DO=BD=\sqrt{2}$，……………………………… 1 分



所以 $AD=\sqrt{3}DO=\sqrt{6}$. ……………………………… 2 分

又 $AB=2$，所以 $AB^2+BD^2=AD^2$，即 $AB\perp BD$. ……………………………… 4 分

因为 $AB\perp BC$，$BC\cap BD=B$，所以 $AB\perp$ 平面 $PBC$.

又 $AB\subset$ 平面 $ABC$，所以平面 $ABC\perp$ 平面 $PBC$. ……………………………… 5 分

(2)解：连接 $PO$，由已知可得 $PO\perp BC$，

又由(1)可知平面 $PBC\perp$ 平面 $ABC$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABC$. ……………………………… 6 分

因为 $F$ 为 $AC$ 的中点，所以点 $C$ 到平面 $BEF$ 的距离等于点 $A$ 到平面 $BEF$ 的距离.

在直角△$ABC$ 中，可知 $BF=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{\sqrt{8+2^2}}{2}=\sqrt{3}$， ………………………………… 7 分

在直角△$ABP$ 中，可知 $BE=\dfrac{AP}{2}=\dfrac{\sqrt{8+2^2}}{2}=\sqrt{3}$， ………………………………… 8 分

因为 $EF$ 是△$ACP$ 的中位线，所以 $EF=\dfrac{PC}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，△$BEF$ 的面积 $S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3-(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ………………………………… 9 分

设点 $A$ 到平面 $BEF$ 的距离为 $d$，则三棱锥 $A-BEF$ 的体积 $V_{A-BEF}=\dfrac{\sqrt{5}}{6}d$. ………… 10 分

又△$ABF$ 的面积 $S_{\triangle ABF}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$，点 $E$ 到平面 $ABF$ 的距离为 $\dfrac{OP}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，所以三棱锥 $E-ABF$ 的体积 $V_{E-ABF}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………… 11 分

由 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}d=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，得 $d=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$，即点 $C$ 到平面 $BEF$ 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$. ………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问中，求出 $AD=\sqrt{3}$ $DO=\sqrt{6}$，得 2 分，证出 $AB\perp BD$，累计得 4 分，证出平面 $ABC\perp$ 平面 $PBC$，累计得 5 分.

【2】第二问中，证出 $PO\perp$ 平面 $ABC$，累计得 6 分，计算出 $S_{\triangle BEF}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，累计得 9 分，计算出 $V_{E-ABF}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，累计得 11 分，直至正确求出点 $C$ 到平面 $BEF$ 的距离，累计得 12 分.

21. 解：(1) 依题意可得调整后研发人员的年人均投入为 $(1+\dfrac{2x}{1000})a$ 万元， ………………… 1 分

则 $(1000-x)(1+\dfrac{2x}{1000})a\geqslant1000a$. 因为 $a>0$，所以 $\dfrac{2}{1000}x^2-x\leqslant0$，解得 $0\leqslant x\leqslant500$，……… ………………………………… 3 分

因为 $x\in\mathbf{N}$ 且 $100\leqslant x\leqslant500$，所以 $100\leqslant x\leqslant500$，故 $500\leqslant1000-x\leqslant900$，

即要使这 $(1000-x)$ 名研发人员的年总投入不低于调整前 1000 名技术人员的年总投入，则调整后的研发人员的人数最少为 500. ………………………………… 5 分

(2) 由条件①研发人员的年总投入始终不低于技术人员的年总投入，得 $(1000-x)(1+\dfrac{2x}{1000})a\geqslant x(m-\dfrac{3x}{1000})a$， ………………………………… 6 分

上式两边同除以 $ax$，得 $(\dfrac{1000}{x}-1)(1+\dfrac{2x}{1000})\geqslant m-\dfrac{3x}{1000}$，整理得 $m\leqslant\dfrac{1000}{x}+\dfrac{x}{1000}+1$. …… ………………………………… 7 分

由条件②技术人员年人均投入不减少，得 $a(m-\frac{3x}{1000})\geqslant a$，解得 $m\geqslant\frac{3x}{1000}+1$. ……… 8 分

假设存在这样的实数 $m$，使得技术人员在已知范围内调整后，满足以上两个条件，

即 $\frac{3x}{1000}+1\leqslant m\leqslant\frac{1000}{x}+\frac{x}{1000}+1(100\leqslant x\leqslant 500)$ 恒成立. ……………………………… 9 分

设 $f(x)=\frac{1000}{x}+\frac{x}{1000}+1=\frac{1}{1000}(x+\frac{1000^2}{x})+1$，易知 $f(x)$ 在 $(0,1000]$ 上单调递减，

因为 $x\in\mathbf{N}$ 且 $100\leqslant x\leqslant 500$，所以 $f(x)$ 在 $[100,500]$ 上单调递减，则 $f(x)_{\min}=\frac{1000}{500}+\frac{500}{1000}+1=3.5$，当 $x=500$ 时，等号成立，所以 $m\leqslant 3.5$. ……………………………………… 10 分

又因为 $100\leqslant x\leqslant 500$，当 $x=500$ 时，$(\frac{3x}{1000}+1)_{\max}=2.5$，所以 $m\geqslant 2.5$， ……………… 11 分

所以 $2.5\leqslant m\leqslant 3.5$，即存在这样的 $m$ 满足条件，$m$ 的取值范围为 $[2.5,3.5]$. ………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出调整后研发人员的年人均投入为 $(1+\frac{2x}{1000})a$ 万元，得 1 分，写出 $0\leqslant x\leqslant 500$，累计得 3 分，写出调整后的研发人员的人数最少为 500，累计得 5 分.

【2】第二问，求出 $(1000-x)(1+\frac{2x}{1000})a\geqslant x(m-\frac{3x}{1000})a$，累计得 6 分，求出 $m\geqslant\frac{3x}{1000}+1$，累计得 8 分，写出 $\frac{3x}{1000}+1\leqslant m\leqslant\frac{1000}{x}+\frac{x}{1000}+1(100\leqslant x\leqslant 500)$ 恒成立，累计得 9 分，直到给出正确结论得 12 分.

22. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{4x-1}-4\ln(2x)$，所以 $f'(x)=4e^{4x-1}-\frac{4}{x}$， ……………… 2 分

$f'(\frac{1}{2})=4e-8$，$f(\frac{1}{2})=e$，所以切线方程为 $y-e=(4e-8)(x-\frac{1}{2})$，

即 $y=(4e-8)x-e+4$. ……………………………………………………………… 4 分

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f(x)\geqslant a+a\ln(2a)$，即 $e^{4x-1}-4a\ln(2x)-a-a\ln(2a)\geqslant 0$.

……………………………………………………………………………………… 5 分

设 $g(x)=e^{4x-1}-4a\ln(2x)-a-a\ln(2a)$，则 $g'(x)=4e^{4x-1}-\frac{4a}{x}$. ………………………… 6 分

因为 $a>0$，所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，当 $x\to 0$ 时，$g'(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g'(x)\to+\infty$，所以存在唯一的 $x_0>0$，使 $g(x_0)=4e^{4x_0-1}-\frac{4a}{x_0}=0$，

且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$.

由 $g'(x_0)=4e^{4x_0-1}-\frac{4a}{x_0}=0$，得 $a=x_0e^{4x_0-1}$，则 $\ln(2a)=\ln(2x_0)+4x_0-1$. …………… 8 分

所以 $g(x)_{\min}=e^{4x_0-1}-4a\ln(2x_0)-a-a\ln(2a)=e^{4x_0-1}-x_0e^{4x_0-1}[4\ln(2x_0)+1+\ln(2a)]=e^{4x_0-1}[1-5x_0\ln(2x_0)-4x_0^2]\geqslant 0$. ………………………………………………………… 9 分

因为 $1-5x_0\ln(2x_0)-4x_0^2=x_0[\frac{1}{x_0}-5\ln(2x_0)-4x_0]\geqslant 0$，所以 $\frac{1}{x_0}-5\ln(2x_0)-4x_0\geqslant 0$. ……

………………………………………………………………………………………… 10 分

设 $h(x)=\frac{1}{x}-5\ln(2x)-4x$，易知它在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，注意到 $h(\frac{1}{2})=0$，所以 $0<x_0\leqslant\frac{1}{2}$. $a=x_0e^{4x_0-1}$，设 $u(x)=xe^{4x-1}(0<x\leqslant\frac{1}{2})$，则 $u'(x)=(4x+1)e^{4x-1}>0$，…… 11 分

可知 $u(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}]$ 上单调递增，则 $a\in(0,\frac{e}{2}]$，即实数 $a$ 的取值范围是 $(0,\frac{e}{2}]$. …… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出 $f'(x)=4e^{4x-1}-\frac{4}{x}$，得 2 分，正确求出曲线 $y=f(x)$ 的切线方程，累计得 4 分.

【2】第二问，写出 $g'(x)=4e^{4x-1}-\frac{4a}{x}$，累计得 6 分，推导出 $\ln(2a)=\ln(2x_0)+4x_0-1$，累计得 8 分，推出 $e^{4x_0-1}[1-5x_0\ln(2x_0)-4x_0^2]\geqslant 0$，累计得 9 分. 证出 $u'(x)=(4x+1)e^{4x-1}>0$，累计得 11 分，求出实数 $a$ 的取值范围是 $(0,\frac{e}{2}]$，累计得 12 分.

【3】采用其他方法，参照本评分标准依步骤给分.

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！