

2024 届高三第四次六校联考试题

数学

命题人：惠州一中数学备课组

审题人：惠州一中数学备课组

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.  $(x - 3y)^5$  展开式中第 3 项的系数是

- A. 90                      B. -90                      C. -270                      D. 270

2. 在等差数列  $\{a_n\}$  中，若  $a_3 + a_7 = 10$ ， $a_6 = 7$ ，则公差  $d =$

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

3. 已知向量  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  满足  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2$ ，且  $|\vec{a}| = 1$ ，则向量  $\vec{b}$  在向量  $\vec{a}$  上的投影向量为

- A. 1                      B. -1                      C.  $\vec{a}$                       D.  $-\vec{a}$

4. 在  $\triangle ABC$  中，“ $\tan A \tan B < 1$ ”是“ $\triangle ABC$  为钝角三角形”的

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

5. 已知三棱锥  $P-ABC$ ， $\triangle ABC$  是以  $AC$  为斜边的直角三角形， $\triangle PAC$  为边长是 2 的等边三角形，且平面  $ABC \perp$  平面  $PAC$ ，则三棱锥  $P-ABC$  外接球的表面积为

- A.  $\frac{16}{3}\pi$                       B.  $\frac{21}{3}\pi$                       C.  $\frac{21}{2}\pi$                       D.  $8\pi$

6. 血氧饱和度是呼吸循环的重要生理参数。人体的血氧饱和度正常范围是 95%~100%，当血氧饱和度低于 90% 时，需要吸氧治疗，在环境模拟实验室的某段时间内，可以用指数模型： $S(t) = S_0 e^{Kt}$  描述血氧饱和度  $S(t)$  随给氧时间  $t$ （单位：时）的变化规律，其中  $S_0$  为初始血氧饱和度， $K$  为参数。已知  $S_0 = 60\%$ ，给氧 1 小时后，血氧饱和度为 80%。若使得血氧饱和度达到 90%，则至少还需要给氧时间（单位：时）为（参考数据： $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10$ ）

- A. 0.3                      B. 0.5                      C. 0.7                      D. 0.9

7. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，过  $F_1$  的直线与双曲线  $C$  分别

在第一、二象限交于  $A, B$  两点， $\triangle ABF_2$  内切圆的半径为  $r$ ，若  $|BF_1| = 2a$ ， $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$ ，则双曲线  $C$  的离心率为

- A.  $\sqrt{7}$                       B.  $\frac{\sqrt{21}}{2}$                       C.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{53}}{3}$

8. 函数  $f(x) = \sin 3x - \sin 2x$  在开区间  $(-\pi, 2\pi)$  的零点个数为

- A. 5                      B. 6                      C. 7                      D. 8

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 给定数集  $A = \mathbb{R}$ ， $B = (0, +\infty)$ ， $x, y$  满足方程  $2^x - y = 0$ ，下列对应关系  $f$  为函数的是

- A.  $f: A \rightarrow B, y = f(x)$                       B.  $f: B \rightarrow A, y = f(x)$   
C.  $f: A \rightarrow B, x = f(y)$                       D.  $f: B \rightarrow A, x = f(y)$

10. 已知  $z$  为复数，设  $z, \bar{z}, iz$  在复平面上对应的点分别为  $A, B, C$ ，其中  $O$  为坐标原点，则

- A.  $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$                       B.  $\vec{OA} \perp \vec{OC}$                       C.  $|\vec{AC}| = |\vec{BC}|$                       D.  $\vec{OB} \parallel \vec{AC}$

11. 英国著名物理学家牛顿用“作切线”的方法求函数零点. 已知二次函数  $f(x)$  有两个不相等的实根  $b, c$ , 其中  $c > b$ . 在函数  $f(x)$  图像上横坐标为  $x_1$  的点处作曲线  $y = f(x)$  的切线, 切线与  $x$  轴交点的横坐标为  $x_2$ ; 用  $x_2$  代替  $x_1$ , 重复以上的过程得到  $x_3$ ; 一直下去, 得到数列  $\{x_n\}$ . 记  $a_n = \ln \frac{x_n - b}{x_n - c}$ , 且  $a_1 = 1$ ,  $x_n > c$ , 下列说法正确的是

A.  $x_1 = \frac{ec - b}{e - 1}$  (其中  $\ln e = 1$ )

B. 数列  $\{a_n\}$  是递减数列

C.  $a_6 = \frac{1}{32}$

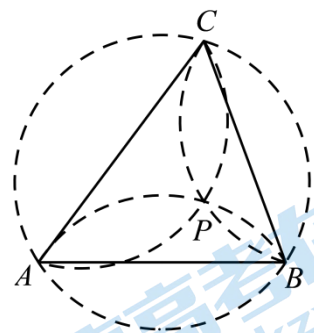
D. 数列  $\{a_n + \frac{1}{a_n}\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2^n - 2^{1-n} + 1$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 将 1 到 10 这 10 个正整数平均分成甲、乙两组, 每组 5 个正整数, 且甲组的中位数比乙组的中位数小 1, 则不同的平分方法共有 \_\_\_\_\_ 种.

13. 已知圆  $A: (x+2)^2 + y^2 = 1$ , 圆  $B: (x-2)^2 + y^2 = 4$ , 直线  $3x + 4y + t = 0$  上存在点  $P$ , 过点  $P$  向圆  $A$  引两条切线  $PC$  和  $PD$ , 切点是  $C$  和  $D$ , 再过点  $P$  向圆  $B$  引两条切线  $PE$  和  $PF$ , 切点是  $E$  和  $F$ , 若  $\angle CPD = \angle EPF$ , 则实数  $t$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

14. 某同学在学习和探索三角形相关知识时, 发现了一个有趣的性质: 将锐角三角形三条边所对的外接圆的三条圆弧 (劣弧) 沿着三角形的边进行翻折, 则三条圆弧交于该三角形内部一点, 且此交点为该三角形的垂心 (即三角形三条高线的交点). 如图, 已知锐角  $\triangle ABC$  外接圆的半径为 2, 且三条圆弧沿  $\triangle ABC$  三边翻折后交于点  $P$ . 若  $AB = 3$ , 则  $\sin \angle PAC =$  \_\_\_\_\_; 若  $AC: AB: BC = 6: 5: 4$ , 则  $PA + PB + PC$  的值为 \_\_\_\_\_.



四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知椭圆  $C_1$ , 抛物线  $C_2$  的焦点均在  $x$  轴上,  $C_1$  的中心和  $C_2$  的顶点均为坐标原点  $O$ , 从  $C_1, C_2$  上分别取两个点, 将其坐标记录于下表中:

$x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2
$y$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	0	$2\sqrt{2}$

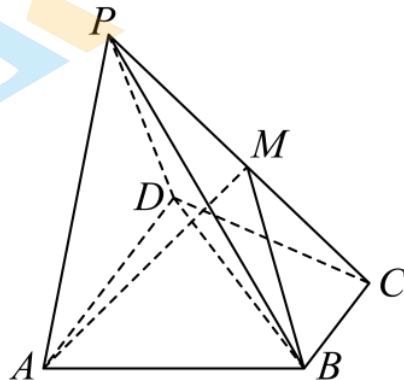
(1) 求  $C_1$  和  $C_2$  的标准方程;

(2) 若  $C_1$  和  $C_2$  交于不同的两点  $A, B$ , 求  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  的值.

16. (本小题满分 15 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $\triangle PAD$  为正三角形, 底面  $ABCD$  为直角梯形,  $AD \parallel BC$ ,  $AD \perp CD$ ,  $AD = 2BC = 2$ ,  $CD = \sqrt{3}$ ,  $PB = \sqrt{6}$ .

- (1) 求证: 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ;
- (2) 点  $M$  为棱  $PC$  的中点, 求  $BM$  与平面  $PCD$  所成角的正弦值.



17. (本小题满分 15 分)

某公司是一家集无人机特种装备的研发、制造与技术服务的综合型科技创新企业. 该公司生产的甲、乙两种类型无人运输机性能都比较出色, 但操控水平需要十分娴熟, 才能发挥更大的作用. 已知在单位时间内, 甲、乙两种类型无人运输机操作成功的概率分别为  $\frac{3}{4}$  和  $\frac{1}{2}$ , 假设每次操作能否成功相互独立.

- (1) 随机选择两种无人运输机中的一种, 求选中的无人运输机操作成功的概率.
- (2) 操作员连续进行两次无人机的操作有两种方案:

方案一: 在初次操作时, 随机选择两种无人运输机中的一种, 若初次操作成功, 则第二次继续使用该类型设备; 若初次操作不成功, 则第二次使用另一类型进行操作.

方案二: 在初次操作时, 随机选择两种无人运输机中的一种, 无论初次操作是否成功, 第二次均使用初次所选择的无人运输机进行操作.

假定方案选择及操作不相互影响, 试比较这两种方案的操作成功的次数的期望值.

18. (本小题满分 17 分)

已知函数  $f(x) = e^x + \cos x - 2$ ,  $g(x) = \sin x$ .

(1) 求证: 当  $x \in (0, +\infty)$ ,  $g(x) < x < f(x)$ ;

(2) 若  $x \in (0, +\infty)$ ,  $f(x) + g(x) > ax$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

19. (本小题满分 17 分)

已知集合  $A$  中含有三个元素  $x, y, z$ , 同时满足①  $x < y < z$ ; ②  $x + y > z$ ; ③  $x + y + z$  为偶数, 那么称集合  $A$  具有性质  $P$ .

已知集合  $S_n = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$ ), 对于集合  $S_n$  的非空子集  $B$ , 若  $S_n$  中存在三个互不相同的元素  $a, b, c$ , 使得  $a + b, b + c, c + a$  均属于  $B$ , 则称集合  $B$  是集合  $S_n$  的“期待子集”.

(1) 试判断集合  $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$  是否具有性质  $P$ , 并说明理由.

(2) 若集合  $B = \{3, 4, a\}$  具有性质  $P$ , 证明: 集合  $B$  是集合  $S_4$  的“期待子集”.

(3) 证明: 集合  $M$  具有性质  $P$  的充要条件是集合  $M$  是集合  $S_n$  的“期待子集”.