海淀区高三年级第二学期期末练习

数　学（理科）

2019.5

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

（1）已知集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 6\}$，则 $A\cap B=$

（A）$[1,3]$　　（B）$[3,5]$　　（C）$[5,6]$　　（D）$[1,6]$

（2）复数 $z=a+\mathrm{i}$（$a\in\mathbf{R}$）的实部是虚部的 2 倍，则 a 的值为

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）-2　　（D）2

（3）若直线 l: $\begin{cases}x=1+t,\\ y=2+at\end{cases}$（$t$ 为参数）经过坐标原点，则直线 l 的斜率是

（A）-2　　（B）-1　　（C）1　　（D）2

（4）在 $(x-2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数是

（A）-80　　（B）-10　　（C）5　　（D）40

（5）把函数 $y=2^x$ 的图象向右平移 t 个单位长度，所得图象对应的函数解析式为 $y=\frac{2^x}{3}$，则 t 的值为

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\log_2 3$　　（C）$\log_3 2$　　（D）$\sqrt{3}$

（6）学号分别为 1，2，3，4 的 4 位同学排成一排，若学号相邻的同学不相邻，则不同的排法种数为

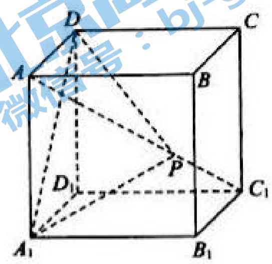
（A）2　　（B）4　　（C）6　　（D）8

（7）已知函数 $f(x)=\sin\omega x$（$\omega>0$），则“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{4},1)$”是“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2},0)$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

(8) 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是对角线 AC_1 上的动点（点 P 与 A，C_1 不重合）. 则下面结论中错误的是



(A) 存在点 P，使得平面 A_1DP // 平面 B_1CD_1

(B) 存在点 P，使得 $AC_1 \perp$ 平面 A_1DP

(C) S_1，S_2 分别是 $\triangle A_1DP$ 在平面 $A_1B_1C_1D_1$，平面 BB_1C_1C 上的正投影图形的面积，对任意点 P，都有 $S_1 \neq S_2$

(D) 对任意点 P，$\triangle A_1DP$ 的面积都不等于 $\frac{\sqrt{2}}{6}$

第二部分（非选择题　共110分）

二、 填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分 .

(9) 已知直线 l_1：$x-y+1=0$ 与 l_2：$x+ay+3=0$ 平行，则 $a=$________，l_1 与 l_2 之间的距离为________.

(10) 已知函数 $f(x)=(x+t)(x-t^2)$ 是偶函数，则 $t=$________.

(11) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-8n$，$n=1,2,3,\cdots$，则满足 $a_n>0$ 的 n 的最小值为________.

(12) 已知圆 C：$(x-1)^2+y^2=4$ 与曲线 $y=|x-1|$ 相交于 M，N 两点，则线段 MN 的长度为________.

(13) 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，点 E 为 BC 的中点，点 F 在线段 DC 上. 若 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}$，且点 P 在直线 AC 上，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$________.

(14) 已知集合 $A_0=\{x\mid 0<x<1\}$. 给定一个函数 $y=f(x)$，定义集合 $A_n=\{y\mid y=f(x),\ x\in A_{n-1}\}$，若 $A_n\cap A_{n-1}=\varnothing$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，则称该函数 $y=f(x)$ 具有性质"$\mathscr{P}$".

(Ⅰ) 具有性质"$\mathscr{P}$"的一个一次函数的解析式可以是________;

(Ⅱ) 给出下列函数：① $y=\frac{1}{x}$；② $y=x^2+1$；③ $y=\cos(\frac{\pi}{2}x)+2$，其中具有性质"$\mathscr{P}$"的函数的序号是________.（写出所有正确答案的序号）

三、 解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

（15）（本小题满分 13 分）

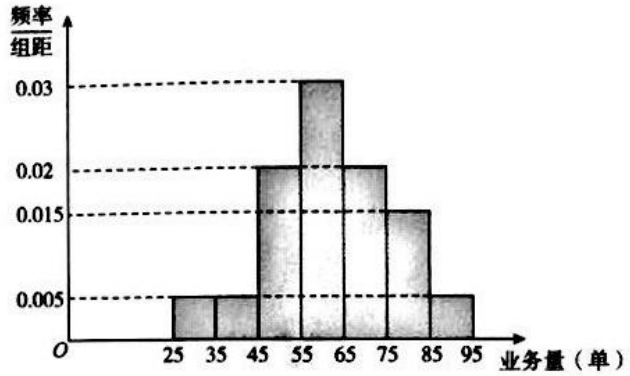
在△ ABC 中，$a=7$，$b=8$，$A=\frac{\pi}{3}$．

（Ⅰ）求 $\sin B$ 的值；

（Ⅱ）若△ ABC 是钝角三角形，求 BC 边上的高．

（16）（本小题满分 13 分）

某快餐连锁店招聘外卖骑手．该快餐连锁店提供了两种日工资方案：方案（1）规定每日底薪 50 元，快递业务每完成一单提成 3 元；方案（2）规定每日底薪 100 元，快递业务的前 44 单没有提成，从第 45 单开始，每完成一单提成 5 元．该快餐连锁店记录了每天骑手的人均业务量．现随机抽取 100 天的数据，将样本数据分为 [25，35)，[35，45)，[45，55)，[55，65)，[65，75)，[75，85)，[85，95] 七组，整理得到如图所示的频率分布直方图．



（Ⅰ）随机选取一天，估计这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单的概率；

（Ⅱ）从以往统计数据看，新聘骑手选择日工资方案（1）的概率为 $\frac{1}{3}$，选择方案（2）的概率为 $\frac{2}{3}$．若甲、乙、丙三名骑手分别到该快餐连锁店应聘，三人选择日工资方案相互独立，求至少有两名骑手选择方案（1）的概率；

（Ⅲ）若仅从人均日收入的角度考虑，请你利用所学的统计学知识为新聘骑手做出日工资方案的选择，并说明理由．（同组中的每个数据用该组区间的中点值代替）

（17）（本小题满分 14 分）

如图 1 所示，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$BC \parallel AD$，$CE \perp AD$，垂足为 E，$AD=3BC=3$，$EC=1$. 将 $\triangle DEC$ 沿 EC 折起到 $\triangle D_1EC$ 的位置，使平面 $D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$，如图 2 所示，点 G 为棱 AD_1 上一个动点．

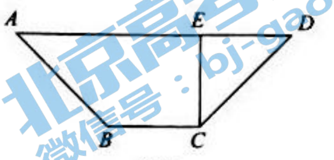


图 1

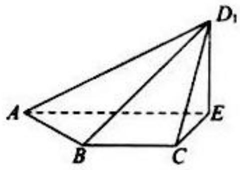


图 2

（Ⅰ）当点 G 为棱 AD_1 中点时，求证：$BG \parallel$ 平面 D_1CE；

（Ⅱ）求证：$AB \perp$ 平面 D_1BE；

（Ⅲ）是否存在点 G，使得二面角 $G-BE-D_1$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$？若存在，求出 AG 的长；若不存在，请说明理由．

（18）（本小题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 A 与上顶点 B 的距离为 $\sqrt{6}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和焦点的坐标；

（Ⅱ）点 P 在椭圆 C 上，线段 AP 的垂直平分线与 y 轴相交于点 Q，若 $\triangle PAQ$ 为等边三角形，求点 P 的横坐标．

（19）（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=e^{ax}(x^2-\dfrac{a+2}{a})$，其中 $a \neq 0$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的倾斜角；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的极小值小于 0，求实数 a 的取值范围．

（20）（本小题满分 13 分）

对于给定的奇数 m（$m \geqslant 3$），设 A 是由 $m \times m$ 个数组成的 m 行 m 列的数表，数表中第 i 行，第 j 列的数 $a_{ij} \in \{0, 1\}$，记 $c(i)$ 为 A 的第 i 行所有数之和，$r(j)$ 为 A 的第 j 列所有数之和，其中 $i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$.

对于 $i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$，若 $|ma_{ij}-c(i)| < \dfrac{m}{2}$ 且 $|ma_{ij}-r(j)| < \dfrac{m}{2}$ 同时成立，则称数对 (i, j) 为数表 A 的一个“好位置”．

1	1	1
0	0	1
0	1	0

（Ⅰ）直接写出右面所给的 3×3 数表 A 的所有的“好位置”；

（Ⅱ）当 $m=5$ 时，若对任意的 $1 \leqslant i \leqslant 5$ 都有 $c(i) \geqslant 3$ 成立，求数表 A 中的“好位置”个数的最小值；

（Ⅲ）求证：数表 A 中的“好位置”个数的最小值为 $2m-2$.

海淀区高三年级第二学期期末练习参考答案

数 学 （理科） 2019.05

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. B　2. D　3. D　4. A　5. B　6. A　7. A　8. C

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $-1,\sqrt{2}$　　10. $0,1$　　11. 5

12. $2\sqrt{2}$　　13. $\frac{5}{2}$　　14. $y=x+1$（答案不唯一），① ②

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 北京高考在线网

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）在$\triangle ABC$中，因为$a=7$，$b=8$，$A=\frac{\pi}{3}$，

所以由正弦定理$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$

得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{8}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

（Ⅱ）方法 1：

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

得$49=64+c^2-2\times 8\times c\times\frac{1}{2}$

即$c^2-8c+15=0$，解得$c=5$或$c=3$

因为$b>a,b>c$，所以$\angle B$为$\triangle ABC$中最大的角，

当$c=5$时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}>0$，与$\triangle ABC$为钝角三角形矛盾，舍掉

当$c=3$时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}<0$，$\triangle ABC$为钝角三角形，

所以$c=3$

设BC边上的高为h，所以$h=c\sin B=\frac{12\sqrt{3}}{7}$

方法 2：

因为$b>a$，所以$B>A=\frac{\pi}{3}$，所以$C<\frac{\pi}{3}$，

所以$\angle B$为$\triangle ABC$中最大的角

因为$\triangle ABC$为钝角三角形，所以B为钝角

因为 $\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，所以 $\cos B=-\frac{1}{7}$

所以 $\sin C=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

设 BC 边上的高为 h，所以 $h=b\sin C=\frac{12\sqrt{3}}{7}$

16.（共 13 分）搜索北京高考在线网，获取更多试题及答案

解：（I）设事件 A 为"随机选取一天，这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单"

依题意，连锁店的人均日快递业务量不少于 65 单的频率分别为：$0.2, 0.15, 0.05$

因为 $0.2+0.15+0.05=0.4$

所以 $P(A)$ 估计为 0.4 .

（II）设事件 B 为"甲、乙、丙三名骑手中至少有两名骑手选择方案（1）"

设事件 C_i 为"甲乙丙三名骑手中恰有 $i(i=0,1,2,3)$ 人选择方案（1）"，

则 $P(B)=P(C_2)+P(C_3)$

$=C_3^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1+C_3^3(\frac{1}{3})^3=\frac{6}{27}+\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$

所以三名骑手中至少有两名骑手选择方案（1）的概率为 $\frac{7}{27}$

（III）**方法 1：**

设骑手每日完成快递业务量为 X 件

方案（1）的日工资 $Y_1=50+3X(X\in\mathbf{N}^*)$，

方案（2）的日工资 $Y_2=\begin{cases}100, X\le 44, X\in\mathbf{N}^*\\100+5(X-44), X>44, X\in\mathbf{N}^*\end{cases}$

所以随机变量 Y_1 的分布列为

Y_1	140	170	200	230	260	290	320
P	0.05	0.05	0.2	0.3	0.2	0.15	0.05

所以 $EY_1=140\times0.05+170\times0.05+200\times0.2+230\times0.3$

$+260\times0.2+290\times0.15+320\times0.05=236$

同理随机变量 Y_2 的分布列为

Y_1	100	130	180	230	280	330
P	0.1	0.2	0.3	0.2	0.15	0.05

$EY_2=100\times0.1+130\times0.2+180\times0.3+230\times0.2+280\times0.15+330\times0.05$

$=194.5$

因为 $EY_1>EY_2$，所以建议骑手应选择方案（1）

方法 2：

快餐店人均日快递量的期望是：

$30\times0.05+40\times0.05+50\times0.2+60\times0.3+70\times0.2+80\times0.15+90\times0.05=62$

因此，方案（1）日工资约为 $50+62\times3=236$

方案 2 日工资约为 $100+(62-44)\times5=190<\ 236$

故骑手应选择方案（1）

17.（共 14 分）关注北京高考资讯公众号，获取更多试卷及答案

解：（Ⅰ）**方法 1：**

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内，过 B 作 AE 的垂线，垂足为 F，

因为 $CE\perp AD$，所以 $BF\parallel EC$

又因为 $BC\parallel AD$，$BC=CE=1$，$AD=3$

所以四边形 $BCEF$ 为正方形，$AF=FE=ED=1$，F 为 AE 中点

在图 2 中，连结 GF

因为点 G 是 AD_1 的中点，

所以 $GF\parallel D_1E$

又因为 $BF\parallel EC$，$GF\cap BF=F$，$GF, BF\subset$ 平面 BFG，$D_1E,EC\subset$ 平面 D_1EC，

所以平面 $BFG\parallel$ 平面 CED_1

又因为 $BG\subset$ 面 GFB，所以 $BG\parallel$ 平面 D_1EC

方法 2：

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内，过 B 作 AE 的垂线，垂足为 F

因为 $CE\perp AD$，所以 $BF\parallel EC$

又因为 $BC\parallel AD$，$BC=CE=1$，$AD=3$

所以四边形 $BCEF$ 为正方形， F 为 AE 中点

在图 2 中，连结 GF

因为点 G 是 AD_1 的中点，

所以 $GF \parallel D_1E$

又 $D_1E \subset$ 平面 D_1EC， $GF \not\subset$ 平面 D_1EC

所以 $GF \parallel$ 平面 D_1EC

又因为 $BF \parallel EC$， $EC \subset$ 平面 D_1EC， $BF \not\subset$ 平面 D_1EC

所以 $BF \parallel$ 平面 D_1EC

又因为 $GF \cap BF = F$

所以平面 $BFG \parallel$ 平面 D_1EC

又因为 $BG \subset$ 面GFB ，所以 $BG \parallel$ 平面 D_1EC

方法 3：

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内，过 B 作 AE 的垂线，垂足为 F，

因为 $CE \perp AD$，所以 $BF \parallel EC$

又因为 $BC \parallel AD$ ， $BC = CE = 1$， $AD=3$

所以四边形 $BCEF$ 为正方形， $AF = FE = ED = 1$，得 $AE = 2$

所以 $BC \parallel AE$， $BC=\dfrac{1}{2}AE$

在图 2 中设点 M 为线段 D_1E 的中点，连结 MG, MC，

因为点 G 是 AD_1 的中点，

所以 $GM \parallel AE$， $GM=\dfrac{1}{2}AE$

所以 $GM \parallel BC$， $GM=BC$，所以四边形 $MGBC$ 为平行四边形

所以 $BG \parallel CM$

又因为 $CM \subset$ 平面 D_1EC， $BG \not\subset$ 平面 D_1EC

所以 $BG \parallel$ 平面 D_1EC

（II）因为平面 $D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$，

平面 $D_1EC \cap$ 平面 $ABCE = EC$,

$D_1E \perp EC$, $D_1E \subset$ 平面 D_1EC，

所以 $D_1E \perp$ 平面 $ABCE$

又因为 $AB \subset$ 平面 $ABCE$

所以 $D_1E \perp AB$

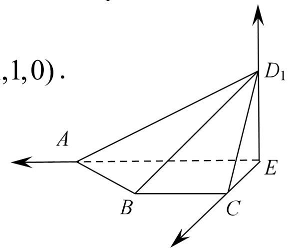
又 $AB=\sqrt{2},BE=\sqrt{2},AE=2$，满足 $AE^2=AB^2+BE^2$ ，

所以 $BE\perp AB$

又 $BE\cap D_1E=E$

所以 $AB\perp$ 平面 D_1EB

（III）因为 EA,EC,ED_1 三线两两垂直，如图，建立空间直角坐标系 $E-ACD_1$，



所以 $A(2,0,0)$， $D_1(0,0,1)$， $B(1,1,0)$， $\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,1),\overrightarrow{EB}=(1,1,0)$.

假设存在点 G 满足题意，

设 $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AD_1},0\le\lambda\le1$，则 $\overrightarrow{AG}=\lambda(-2,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AG}=(2,0,0)+\lambda(-2,0,1)=(2-2\lambda,0,\lambda)$

设平面 GBE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a+b=0\\ (2-2\lambda)a+\lambda c=0\end{cases}$

取 $a=\lambda$，则 $\boldsymbol{m}=(\lambda,-\lambda,2\lambda-2)$，

由（II），$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$ 为平面 BED_1 的法向量，

令 $\left|\cos<\overrightarrow{AB},\boldsymbol{m}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{m}|}\right|=\dfrac{|-2\lambda|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\lambda^2+(2\lambda-2)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 或 $\lambda=2$（舍）

所以存在点 G，使得二面角 $G-BE-D_1$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，且 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD_1}$，

得 $AG=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

18.（共 13 分）

解：（I）依题意，有 $\sqrt{4+b^2}=\sqrt{6}$

所以 $b^2=2$

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

所以 $c=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$，

焦点坐标分别为 $F_1(-\sqrt{2},0),F_2(\sqrt{2},0)$,

（Ⅱ）**方法 1：**

设 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$，且 $A(-2,0)$,

若点 P 为右顶点，则点 Q 为上（或下）顶点，$|AP|=4,|AQ|=\sqrt{6}$，$\triangle PAQ$ 不是等边三角形，不合题意，所以 $x_0\neq\pm2,y_0\neq0$.

设线段 PA 中点为 M，所以 $M(\frac{x_0-2}{2},\frac{y_0}{2})$

因为 $PA\perp MQ$，所以 $k_{PA}\cdot k_{MQ}=-1$

因为直线 PA 的斜率 $k_{Ap}=\frac{y_0}{x_0+2}$

所以直线 MQ 的斜率 $k_{MQ}=-\frac{x_0+2}{y_0}$

又直线 MQ 的方程为 $y-\frac{y_0}{2}=-\frac{x_0+2}{y_0}(x-\frac{x_0-2}{2})$

令 $x=0$，得到 $y_Q=\frac{y_0}{2}+\frac{(x_0+2)(x_0-2)}{2y_0}$

因为 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$

所以 $y_Q=-\frac{y_0}{2}$

因为△PAQ 为正三角形，

所以 $|AP|=|AQ|$，即 $\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}=\sqrt{2^2+\frac{y_0^2}{4}}$

化简，得到 $5x_0^2+32x_0+12=0$，解得 $x_0=-\frac{2}{5},x_0=-6$（舍）

即点 P 的横坐标为 $-\frac{2}{5}$.

方法 2：

设 $P(x_0,y_0)$，直线 AP 的方程为 $y=k(x+2)$.

当 $k=0$ 时，点 P 为右顶点，则点 Q 为上（或下）顶点，$|AP|=4,|AQ|=\sqrt{6}$，$\triangle PAQ$ 不是等边三角形，不合题意，所以 $k\neq0$.

联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=k(x+2)\end{cases}$

消元得 $(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$

所以 $\Delta=16>0$

所以 $x_0+(-2)=\dfrac{-8k^2}{1+2k^2}$

设线段 PA 中点为 M，所以 $x_M=\dfrac{x_0-2}{2}=\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}$， $y_M=k(\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}+2)=\dfrac{2k}{1+2k^2}$

所以 $M(\dfrac{-4k^2}{1+2k^2},\dfrac{2k}{1+2k^2})$

因为 $AP\perp MQ$，所以 $K_{MQ}=-\dfrac{1}{k}$

所以直线 MQ 的方程为 $y-\dfrac{2k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{-4k^2}{1+2k^2})$

令 $x=0$，得到 $y_Q=\dfrac{2k}{1+2k^2}-\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{4k^2}{1+2k^2}=\dfrac{-2k}{1+2k^2}$

因为 $\triangle PAQ$ 为正三角形， 所以 $|AP|=|AQ|$

所以 $\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{4}{1+2k^2}=\sqrt{4+(\dfrac{-2k}{1+2k^2})^2}$

化简，得到 $4k^4+k^2-3=0$，解得 $k^2=\dfrac{3}{4},k^2=-1$（舍）

所以 $x_0=\dfrac{-4k^2+2}{1+2k^2}=-\dfrac{2}{5}$，

即点 P 的横坐标为 $-\dfrac{2}{5}$.

方法 3：

设 $P(x_0,y_0)$，

当直线 AP 的斜率为 0 时，点 P 为右顶点，则点 Q 为上（或下）顶点，$|AP|=4,|AQ|=\sqrt{6}$，$\triangle PAQ$ 不是等边三角形，不合题意，所以直线 AP 的斜率不为0.

设直线 AP 的方程为 $x=ty-2$

联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ x=ty-2\end{cases}$

消元得，$(t^2+2)y^2-4ty=0$

所以 $y_0=\frac{4t}{t^2+2}$

设线段 PA 中点为 M

所以 $y_M=\frac{2t}{t^2+2}$，$x_M=\frac{-4}{t^2+2}$，

所以 $M(\frac{-4}{t^2+2},\frac{2t}{t^2+2})$

因为 $AP\perp MQ$，所以 $k_{MQ}=-\frac{1}{k}$

所以直线 MQ 的方程为 $y-\frac{2t}{t^2+2}=-t(x-\frac{-4}{t^2+2})$

令 $x=0$，得到 $y_Q=\frac{-2t}{t^2+2}$

因为△PAQ 为正三角形， 所以 $|AP|=|AQ|$

所以 $\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{|4t|}{t^2+2}=\sqrt{4+(\frac{2t}{t^2+2})^2}$

化简，得到 $3t^4-t^2-4=0$，解得 $t^2=\frac{4}{3},t^2=-1$（舍）

所以 $x_0=\frac{2t^2-4}{t^2+2}=-\frac{2}{5}$，

即点 P 的横坐标为 $-\frac{2}{5}$

19.（共 14 分）关注北京高考资讯公众号，获取更多试卷及答案

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=e^{ax}(x^2-\frac{a+2}{a})$，所以 $f'(x)=e^{ax}(ax^2+2x-(a+2))$

所以 $f'(1)=0$

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的倾斜角为 0

（Ⅱ）**方法 1**：

因为 $f'(x)=e^{ax}(ax^2+2x-(a+2))=e^{ax}(ax+(a+2))(x-1)$

令 $f'(x)=0$，得到 $x_1=-\frac{a+2}{a}$，$x_2=1$

当 $a>0$ 时，x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,1)$	1	$(1,+\infty)$

$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

而 $f(1)=e^a(1-\frac{a+2}{a})=e^a(1-1-\frac{2}{a})=e^a(-\frac{2}{a})<0$，符合题意

当 $a=-1$ 时，$x_1=-\frac{a+2}{a}=x_2=1$，

$f'(x)=-e^{ax}(x+1)^2\le 0$，$f(x)$ 没有极值，不符合题意

当 $-1<a<0$ 时，$x_1>1$，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,x_1)$	x_1	$(x_1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

而 $f(1)=e^a(-\frac{2}{a})>0$，不符合题意

当 $a<-1$ 时，$x_1<1$，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所　　以

$f(x_1)=e^{a(-\frac{a+2}{a})}[(-\frac{a+2}{a})^2-(\frac{a+2}{a})]<0$，　解得 $a<-2$

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

方法 2:

因为函数 $f(x)$ 的极小值小于 0，

所以 $f(x)<0$ 有解，即 $x^2-\frac{a+2}{a}<0$ 有解

所以 $\frac{a+2}{a}>0$，所以有 $a>0$ 或 $a<-2$

因为 $f'(x)=e^{ax}(ax^2+2x-(a+2))=e^{ax}(ax+(a+2))(x-1)$

令 $f'(x)=0$，得到 $x_1=-\frac{a+2}{a}, x_2=1$

当 $a>0$ 时， x， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

而 $f(1)=e^a(1-\frac{a+2}{a})=e^a(1-1-\frac{2}{a})=e^a(-\frac{2}{a})<0$，符合题意

当 $a<-2$ 时， $x_1<1$， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	$(x_1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

而 $f(x_1)=e^{a(-\frac{a+2}{a})}[(-\frac{a+2}{a})^2-(\frac{a+2}{a})]=e^{a(-\frac{a+2}{a})}\frac{2(a+2)}{a^2}<0$，符合题意

综上， a 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

20.（共 13 分）关注北京高考资讯公众号，获取更多试卷及答案

解:（Ⅰ）“好位置”有： $(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)$

（Ⅱ）因为对于任意的 $i=1,2,3,4,5$， $c(i)\ge 3$；

所以当 $a_{i,j}=1$ 时， $|5-c(i)|\le 5-3<\frac{5}{2}$，

当 $a_{i,j}=0$ 时， $|5a_{i,j}-c(i)|=c(i)>\frac{5}{2}$；

因此若 (i,j) 为“好位置”，

则必有 $a_{i,j}=1$，且 $5-r(j)<\frac{5}{2}$，即 $r(j)\geq 3$

设数表中共有 $n(n\geq 15)$ 个1，其中有 t 列中含1的个数不少于3，

则有 $5-t$ 列中含1的个数不多于2，

所以 $5t+2(5-t)\geq n\geq 15$，$t\geq \frac{5}{3}$，

因为 t 为自然数，所以 t 的最小值为2

因此该数表中值为1，且相应位置不为“好位置”的数个数最多不超过 $3\times 2=6$

所以，该数表好位置的个数不少于 $15-6=9$ 个

而下面的 5×5 数表显然符合题意

1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1

此数表的“好位置”的个数恰好为9

综上所述，该数表的“好位置”的个数的最小值为9

（III） 当 (i,j) 为“好位置”时，且 $a_{i,j}=1$ 时，

则有 $|m-c(i)|<\frac{m}{2}$，所以 $c(i)>\frac{m}{2}$，

注意到 m 为奇数，$c(i)\in\mathbf{N}^*$，所以有 $c(i)\geq\frac{m+1}{2}$

同理得到 $r(j)\geq\frac{m+1}{2}$

当 (i,j) 为“好位置”，且 $a_{i,j}=0$ 时，

则 $|m-c(i)|<\frac{m}{2}$，则必有 $c(i)<\frac{m}{2}$，

注意到 m 为奇数，$c(i)\in\mathbf{N}^*$，所以有 $c(i)\leq\frac{m-1}{2}$

同理得到 $r(j)\leq\frac{m-1}{2}$

因为交换数表的各行，各列，不影响数表中“好位置”的个数，

所以不妨设 $c(i)\geq\frac{m+1}{2},0\leq i\leq p,c(i)<\frac{m+1}{2},p+1\leq i\leq m$

$$r(j)\ge\frac{m+1}{2},0\le j\le q,r(j)<\frac{m+1}{2},q+1\le j\le m$$

其中 $0\le p,q\le m$， $p,q\in\mathbf{N}$

则数表 A 可以分成如下四个子表

A_1	A_3
A_2	A_4

其中 A_1 是 p 行 q 列， A_3 是 p 行 $m-q$ 列， A_2 是 $m-p$ 行 q 列， A_4 是 $m-p$ 行 $m-q$ 列

设 A_1， A_2， A_3， A_4 中 1 的个数分别为 x_1,x_2,x_3,x_4

则 A_1， A_2， A_3， A_4 中 0 的个数分别为 $pq-x_1,q(m-p)-x_2,$

$$p(m-q)-x_3,(m-p)(m-q)-x_4$$

则数表 A 中好位置的个数为 $x_1+(m-p)(m-q)-x_4$ 个

而 $x_1+x_3\ge p\times\frac{m+1}{2}$， $x_3+x_4\le(m-q)\times\frac{m-1}{2}$

所以 $x_1-x_4\ge p\times\frac{m+1}{2}-(m-q)\times\frac{m-1}{2}$

所以 $x_1+(m-p)(m-q)-x_4\ge x_1-x_4\ge(m-p)(m-q)+p\times\frac{m+1}{2}-(m-q)\times\frac{m-1}{2}$

而 $(m-p)(m-q)+p\times\frac{m+1}{2}-(m-q)\times\frac{m-1}{2}$

$=m^2-pm-qm+pq+p\times\frac{m+1}{2}-(m-q)\times\frac{m-1}{2}$

$=p\times\frac{m-1}{2}-q\times\frac{m+1}{2}+pq+\frac{m^2+m}{2}$

$=(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})-\frac{m^2-1}{4}+\frac{m^2+m}{2}$

$=(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}$

显然当 $(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})$ 取得最小值时，上式取得最小值，

因为 $0\le p,q\le m$，所以

$$(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}\ge(m-\frac{m+1}{2})(0-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}$$

$$(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}\ge(0-\frac{m+1}{2})(m-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}$$

当 $p=m$ 时，数表 A 中至少含有 $m\times\frac{m+1}{2}$ 个 1，

而 $m\times\frac{m+1}{2}>m+(m-1)\times\frac{m-1}{2}$，所以 q 至少为 2

此时 $(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}$

$\geq(m-\frac{m+1}{2})(2-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}=2m-1$

当 $p=m-1$ 时，数表 A 中至少含有 $(m-1)\times\frac{m+1}{2}$ 个 1

而 $(m-1)\times\frac{m+1}{2}>m\times\frac{m-1}{2}$，所以 q 至少为 1

此时 $(p-\frac{m+1}{2})(q-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}$

$\geq[(m-1)-\frac{m+1}{2}](1-\frac{m-1}{2})+\frac{m^2+2m+1}{4}=2m-2$

下面的数表满足条件，其“好位置”的个数为 $2m-2$

			$\frac{m-1}{2}$列					$\frac{m-1}{2}$列			
1	1	1	⋯	1	1	0	0	⋯	0	0	
1	1	1	⋯	1	1	0	0	⋯	0	0	
1	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\frac{m-1}{2}$行
1	1	1	⋯	1	1	0	0	⋯	0	0	
1	1	1	⋯	1	1	0	0	⋯	0	0	
1	0	0	⋯	0	0	1	1	⋯	1	1	
1	0	0	⋯	0	0	1	1	⋯	1	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\frac{m-1}{2}$行
1	0	0	⋮	0	0	1	1	⋯	1	1	
1	0	0	⋮	0	0	1	1	⋯	1	1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	