

2023~2024 学年高三核心模拟卷(上)

数学(一)

注意事项:

1. 本卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟。答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 本卷命题范围: 集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 哥德巴赫猜想是世界近代三大数学难题之一, 即所谓的“1+1”问题。1966 年, 我国数学家陈景润证明了“1+2”成立。哥德巴赫猜想的内容是“每一个大于 2 的偶数都能写成两个质数之和”, 则该猜想的否定为
A. 每一个小于 2 的偶数都不能写成两个质数之和
B. 存在一个小于 2 的偶数不能写成两个质数之和
C. 每一个大于 2 的偶数都不能写成两个质数之和
D. 存在一个大于 2 的偶数不能写成两个质数之和
2. 设集合 $A = \{2, a\}$, $B = \{-1, a^2 - 2\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 $a =$
A. -2 B. -1 C. -1 或 -2 D. -1 或 ± 2
3. 已知函数 $f(x) = e^x - x^3 + f'(0)x^2 - f'(0)x$, 则 $f'(0) =$
A. $-\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$
4. 已知 m 为实数, 则 “ $m^3 < 1$ ” 是 “ $m^2 < 1$ ” 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 若幂函数 $f(x) = (2m^2 - 3m - 1)x^m$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $m =$
A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -2
6. 某同学解关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a \neq 0$) 时, 因弄错了常数 c 的符号, 解得其解集为 $(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$, 则不等式 $bx^2 + cx + a > 0$ 的解集为
A. $(-1, -\frac{1}{5})$ B. $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{5}, +\infty)$
C. $(\frac{1}{5}, 1)$ D. $(-\infty, \frac{1}{5}) \cup (1, +\infty)$

7. 现设计一个两邻边的长度分别为 a, b 的矩形广告牌, 其面积为 S , 且 $S=a-b+5$, 则当该广告牌的周长最小时, $S=$

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

8. 已知实数 a, b, c 满足 $a^2 + \log_2 a = 0, 2^{023-b} = \log_{2^{023}} b, c = \log_7 \sqrt{6}$, 则

A. $a < b < c$

B. $c < a < b$

C. $b < c < a$

D. $c < b < a$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 则

A. 函数 $f(f(x))$ 在 \mathbb{R} 上单调递增

B. 函数 $f(g(x))$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增

C. 函数 $g(-g(x))$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减

D. 函数 $g(-f(x))$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减

10. 已知实数 a, b 满足 $\frac{1}{\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{b}}$, 则下列不等式正确的是

A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. $a^2 > b^2$

C. $a + \frac{1}{a+1} > 1$

D. $\frac{a+1}{b+1} > \frac{a}{b}$

11. 若物体原来的温度为 θ_0 (单位: $^{\circ}\text{C}$), 环境温度为 θ_1 (单位: $^{\circ}\text{C}$), 物体的温度冷却到 θ ($\theta > \theta_1$, 单位: $^{\circ}\text{C}$) 与需用时间 t (单位: 分钟) 满足 $t=f(\theta)=\frac{1}{k} \ln \frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta - \theta_1}$, k 为正常数. 现有一杯开水 ($100 ^{\circ}\text{C}$) 放在室温为 $20 ^{\circ}\text{C}$ 的房间里, 根据函数关系研究这杯开水冷却的情况 ($e \approx 2.7, \ln 2 \approx 0.7$), 则

A. 当 $k=\frac{1}{10}$ 时, 经过 10 分钟, 这杯水的温度大约为 $40 ^{\circ}\text{C}$

B. 当 $k=\frac{1}{20}$ 时, 这杯开水冷却到 $60 ^{\circ}\text{C}$ 大约需要 14 分钟

C. 若 $f(60)=10$, 则 $f(40)=20$

D. 这杯水从 $100 ^{\circ}\text{C}$ 冷却到 $80 ^{\circ}\text{C}$ 所需时间比从 $80 ^{\circ}\text{C}$ 冷却到 $60 ^{\circ}\text{C}$ 所需时间短

12. 已知函数 $f(x)=\log_a x - x^3$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$), 则

A. 当 $a=e$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $-\frac{\ln 3+1}{3}$

B. 函数 $f(x)$ 恒有 1 个极值点

C. 若曲线 $y=f(x)$ 有两条过原点的切线, 则 $e^{-\frac{1}{6e^4}} < a < 1$

D. 若 $f(x)$ 有两个零点, 则 $1 < a < e^{\frac{1}{3e}}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ 黎曼函数 $R(x)=\begin{cases} \frac{1}{p}, & x=\frac{q}{p} (p, q \in \mathbb{N}^*, p, q \text{ 互质且 } p > q), \\ 0, & x=0, 1 \text{ 或者 } [0, 1] \text{ 上的无理数}, \end{cases}$, 则

$$D(R\left(\frac{1}{\pi}\right))= \underline{\hspace{2cm}}.$$

14. 已知集合 $A=\left\{x \in \mathbb{N}^* \mid x=\frac{m}{n}, 1 \leq m \leq 10, m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ 有 15 个真子集, 则 m 的一个值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知函数 $f(x)$ 对定义域 $\{x \mid x \neq 0\}$ 内的任意实数 x 满足 $f(2x)-2f\left(\frac{2}{x}\right)=4x$, 则 $f(x)=\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知函数 $y=x^3 f(x-1)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 若函数 $g(x)=\ln(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1)+\frac{e^{x+1}-1}{e^{x+1}+1}$ 的图象与 $f(x)$ 的图象交点的横坐标从小到大依次为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2023}$, 则 $\sum_{k=1}^{2023} x_k = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

设集合 $A=\{x|-4 \leq x \leq 2\}$, $B=\{x|x^2-4x-5 < 0\}$, $C=\{x|x^2-(a+4)x+2(a+2) < 0\}$.

(1) 求 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B$;

(2) 从下面①②③中选择一个作为已知条件, 求实数 a 的取值范围.

① $C \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$; ② $C \subseteq (A \cup B)$; ③ $(A \cap B) \cap C = \emptyset$.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本小题满分 12 分)

已知 $ax^2+2ax+\frac{1}{2} \geq 0$ 对任意实数 x 恒成立.

(1) 求实数 a 的取值所构成的集合 A ;

(2) 在(1)的条件下, 设函数 $g(x)=-x^2+x+1+m$ 在 $[0,1]$ 上的值域为集合 B , 若 $x \in B$ 是 $x \in A$ 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

某乡镇全面实施乡村振兴战略, 大力推广“毛绒玩具”加工产业. 某生产合作社组建加工毛绒玩具的工厂, 需要每年投入固定成本 10 万元, 每加工 x 万件玩具, 需要流动成本 $C(x)$ 万元. 当年加工量不足 15 万件时, $C(x)=12x-12\ln(x+1)$; 当年加工量不低于 15 万件时, $C(x)=21x+\frac{256}{x-2}-200$. 通过市场分析, 加工后的玩具以每件 20 元的价格, 全部由总厂收购.

(1) 求年利润 $f(x)$ 关于年加工量 x 的解析式; (年利润=年销售收入-流动成本-固定成本)

(2) 当年加工量为多少万件时, 该合作社的年利润最大? 最大年利润是多少? (参考数据: $\ln 2 \approx 0.69$)

). (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 恒有 $f(x-y)+f(x+y)=f(2x)$ 成立, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$.

(1) 求 $f(0)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的单调性, 并证明;

(3) 解关于 x 的不等式: $f[x^2-(a+2)x]+f(a+y)+f(a-y) > 0$.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的偶函数, $g(x)$ 为 \mathbb{R} 上的奇函数, 且 $f(x)+g(x)=2^{x+1}$, 记 $F(x)=\log_2 f(x)$.

(1) 求 $F(x)$ 的最小值;

(2) 解关于 m 的不等式 $F(m+2) \geq F(3m-1)$;

(3) 设 $H(x)=-\log_{0.5}(a \cdot 2^x+2a)$ ($a>0$), 若 $F(x)$ 的图象与 $H(x)$ 的图象有 2 个交点, 求 a 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ax-\ln x-\frac{2}{x}$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 当 $a=-1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 当 $ax_2 < x_1 < x_2$ 时, 证明: $(x_1+x_2)\left(a+\frac{2}{x_1x_2}\right) < \frac{a+1}{\sqrt{a}}$.