绝密★启用前

高三数学考试

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $z+\bar{z}=4$，$\mathrm{i}(z-\bar{z})=-2$，则 $z=$

A. $-2+\mathrm{i}$　　B. $2+\mathrm{i}$　　C. $2-\mathrm{i}$　　D. $-2-\mathrm{i}$

2. 定义差集 $M-N=\{x|x\in M$ 且 $x\notin N\}$. 已知集合 $A=\{2,3,5\}$，$B=\{3,5,8\}$，则 $A-(A\cap B)=$

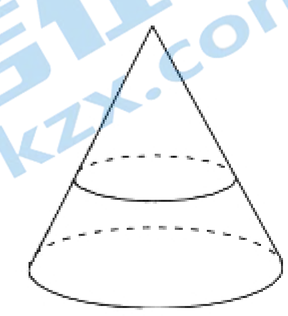
A. $\varnothing$　　B. $\{2\}$　　C. $\{8\}$　　D. $\{3,5\}$

3. “$\sin\alpha=\frac{1}{2}$”是“$\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知某种装水的瓶内芯近似为底面半径是 4 dm、高是 8 dm 的圆锥，当瓶内装满水并喝完一半，且瓶正立放置时(如图所示)，水的高度约为



(参考数据：$\sqrt[3]{3}\approx1.44$，$\sqrt[3]{4}\approx1.59$)

A. 1.62 dm　　B. 1.64 dm

C. 3.18 dm　　D. 3.46 dm

5. 若函数 $f(x)=(\ln x)^2-\ln x^a$ 在 $(0,8)$ 内有 2 个零点，则 a 的取值范围为

A. $(-\infty,2\ln 2)$　　B. $(-\infty,0)\cup(0,2\ln 2)$

C. $(-\infty,3\ln 2)$　　D. $(-\infty,0)\cup(0,3\ln 2)$

6. $(x+\frac{2}{x}-y)^7$ 展开式中 x^2y^3 的系数为

A. -21　　B. 21　　C. -35　　D. 35

7. 若 $2<m<8$，椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{2}=1$ 与椭圆 $D:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{8}=1$ 的离心率分别为 e_1,e_2，则

A. $e_1\cdot e_2$ 的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $e_1\cdot e_2$ 的最小值为$\frac{1}{2}$

C. $e_1\cdot e_2$ 的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $e_1\cdot e_2$ 的最大值为$\frac{1}{2}$

8. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长是 4，侧棱长是 6，M,N 分别为 BB_1,CC_1 的中点，若 P 是三棱柱内(含棱柱的表面)的动点，$MP//$平面 AB_1N，则动点 P 的轨迹面积为

A. $5\sqrt{3}$　　B. 5　　C. $\sqrt{39}$　　D. $\sqrt{26}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列函数满足 $f(2^{0.1})=f(2^{-0.1})$ 的是

A. $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$　　B. $f(x)=2x+\frac{2}{x}$

C. $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$　　D. $f(x)=|\lg x|$

10. 已知圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=4$，则

A. 圆 C 与圆 $D:x^2+y^2=\frac{1}{4}$ 相交

B. 直线 $2x+y+m^2=0$ 与圆 C 可能相切

C. 直线 $(1+2m)x+(1-m)y-3=0$ 与圆 C 必相交

D. 直线 $4x+3y-2=0$，$3x+4y-1=0$ 各自被圆 C 所截得的弦长恰好相等

11. 将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，再将所得图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{\omega}(\omega>1)$，得到函数 $g(x)$ 的图象. 若 $g(x)$ 在 $[0,\pi)$ 内恰有 5 个极值点，则 ω 的取值可能是

A. $\frac{29}{12}$　　B. $\frac{35}{12}$　　C. $\frac{17}{6}$　　D. $\frac{11}{4}$

12. 若 $a=\frac{1}{11}$，$b=\sin\frac{1}{10}$，$c=\ln\frac{11}{10}$，$d=\tan\frac{1}{11}$，则

A. $d>a$　　B. $c>a$　　C. $a>b$　　D. $b>c$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(3,2m-4)$，$\overrightarrow{BC}=(2,4)$，若 A,B,C 三点共线，则 $m=$___▲___.

14. 若函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+3ax$ 的导函数 $f'(x)$ 为偶函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为___▲___.

15. 已知 $|F_1F_2|=10$，点 P 满足 $|PF_2|-|PF_1|=6$，动点 M,N 满足 $|MN|=2$，$\overrightarrow{MF_1}=\overrightarrow{F_1N}$，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最小值是___▲___.

16. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_n=\frac{3}{2}a_n-3^{n+1}$，则 $a_n=$___▲___；若不等式 $a_n\geq\frac{2n^2+n}{k^2}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立，则正数 k 的最小值为___▲___.（本题第一空 3 分，第二空 2 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在①$b=4,c=6$，②$b=3,c=2\sqrt{2}$，③$b=7,c=5$ 这三个条件中选一个合适的补充在下面的横线上，使得问题可以解答，并写出完整的解答过程.

问题：在钝角$\triangle ABC$中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $a=5$，______.

(1)求$\triangle ABC$的面积；

(2)求$\triangle ABC$外接圆的半径与内切圆的半径.

18. (12 分)

已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2=4$，且 a_1,a_2+2,a_3 成等差数列，数列$\{b_n\}$满足 $b_n>0$，$b_1=1$，$b_{n+1}^2-b_n^2=2(b_{n+1}+b_n)$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

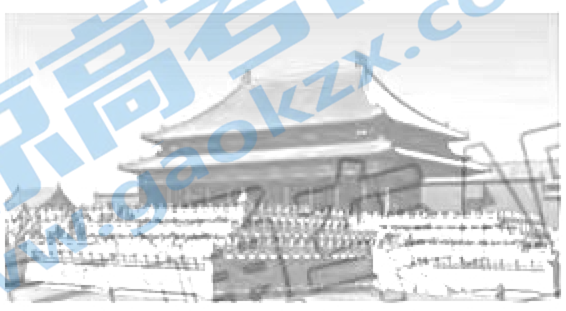
(2)设 $c_n=2^{b_n}-a_n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

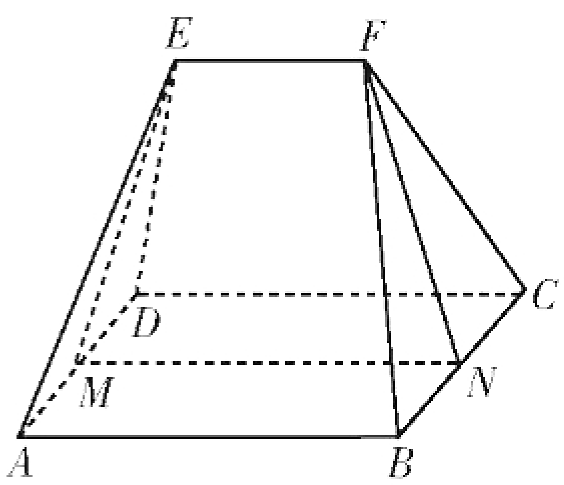
19. (12 分)

故宫太和殿是中国形制最高的宫殿，其建筑采用了重檐庑殿顶的的屋顶样式，庑殿顶是“四出水”的五脊四坡式，由一条正脊和四条垂脊组成，因此又称五脊殿. 由于屋顶有四面斜坡，故又称四阿顶. 如图，某几何体 $ABCDEF$ 有五个面，其形状与四阿顶相类似. 已知底面 $ABCD$ 为矩形，$AB=2AD=2EF=8$，$EF\,/\!/$ 底面 $ABCD$，且 $EA=ED=FB=FC$，M,N 分别为 AD,BC 的中点.

(1)证明：$EF\,/\!/\,AB$ 且 $BC\perp$平面 $EFNM$.

(2)若二面角 $E-AD-B$ 为$\frac{\pi}{4}$，求 CF 与平面 ABF 所成角的正弦值.





20.(12分)

某学校在50年校庆到来之际,举行了一次趣味运动项目比赛,比赛由传统运动项目和新增运动项目组成,每位参赛运动员共需要完成3个运动项目.对于每一个传统运动项目,若没有完成,得0分,若完成了,得30分.对于新增运动项目,若没有完成,得0分,若只完成了1个,得40分,若完成了2个,得90分.最后得分越多者,获得的奖金越多.现有两种参赛的方案供运动员选择.方案一:只参加3个传统运动项目.方案二:先参加1个传统运动项目,再参加2个新增运动项目.已知甲、乙两位运动员能完成每个传统运动项目的概率均为$\frac{1}{2}$,能完成每个新增运动项目的概率均为$\frac{1}{3}$,且甲、乙参加的每个运动项目是否能完成相互独立.

(1)若运动员甲选择方案一,求甲得分不低于60分的概率.

(2)若以最后得分的数学期望为依据,请问运动员乙应该选择方案一还是方案二?说明你的理由.

21.(12分)

已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$,过点$Q(1,3)$作直线与C交于M,N两点,当该直线垂直于x轴时,$\triangle OMN$的面积为2,其中O为坐标原点.

(1)求C的方程.

(2)若C的一条弦ST经过C的焦点,且直线ST与直线MN平行,试问是否存在常数Ω,使得$|QM|\cdot|QN|=\Omega|ST|$恒成立?若存在,求Ω的值;若不存在,请说明理由.

22.(12分)

设$g'(x)$为$g(x)$的导函数,若$g'(x)$是定义域为D的增函数,则称$g(x)$为D上的“凹函数”,已知函数$f(x)=xe^x+ax^2+a$为$\mathbf{R}$上的凹函数.

(1)求a的取值范围;

(2)设函数$h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$,证明:当$x>0$时,$h(x)>0$,当$x<0$时,$h(x)<0$.

(3)证明:$f(x)>\frac{1}{2}x^3+\frac{45}{44}x^2+x+\frac{1}{44}$.

高三数学考试参考答案

1. B 【解析】本题考查共轭复数及复数的运算，考查数学运算的核心素养.
设复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$，$z+\bar{z}=2a$，得 $a=2$，$z-\bar{z}=2bi$，
$i(z-\bar{z})=-2b$，得 $b=1$，故 $z=2+i$.

2. B 【解析】本题考查集合的新概念与集合的运算，考查数学抽象与数学运算的核心素养.
因为 $A\cap B=\{3,5\}$，所以 $A-(A\cap B)=\{2\}$.

3. A 【解析】本题考查充分必要条件的判定与三角恒等变换，考查逻辑推理的核心素养.
若 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$. 若 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ 或 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$. 故“$\sin\alpha=\frac{1}{2}$”是“$\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$”的充分不必要条件.

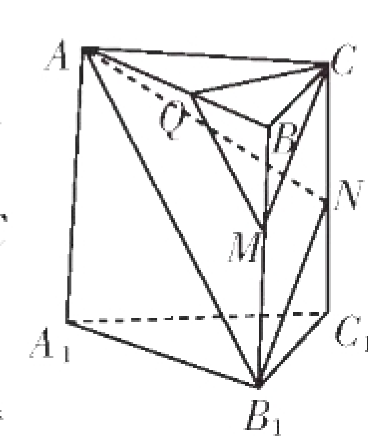
4. B 【解析】本题考查圆锥的体积，考查空间想象能力与数据处理能力.
因为瓶内装满水并喝完一半，所以当装水的瓶正立放置时，圆锥上半部分的体积占圆锥体积的一半. 设上半部分小圆锥的底面半径为 r dm，易得小圆锥的高为 $2r$ dm，则 $\frac{1}{3}\pi r^2\cdot 2r=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\pi\times 4^2\times 8$，解得 $r^3=32$，即 $r=2\sqrt[3]{4}\approx 3.18$，$2r\approx 6.36$，则剩余的水的高度为 $8-2r\approx 1.64$ dm.

5. D 【解析】本题考查函数的零点与对数函数，考查数学运算的核心素养.
由 $f(x)=(\ln x)^2-a\ln x=\ln x(\ln x-a)$，得 $x=1$ 或 $x=e^a$. 依题意可得 $0<e^a<8$，且 $e^a\neq 1$，所以 $a<3\ln 2$，且 $a\neq 0$.

6. A 【解析】本题考查二项式定理，考查数学运算的核心素养.
因为 $(x+\frac{2}{x}-y)^7=[(x+\frac{2}{x})-y]^7$ 展开式的通项公式为 $C_7^k(x+\frac{2}{x})^{7-k}(-y)^k$，所以当 $k=5$ 时，含有 x^2y^5 的项，此时 $C_7^5(x+\frac{2}{x})^2(-y)^5=-21(x^2+4+\frac{4}{x^2})y^5$，故 x^2y^5 的系数为 -21.

7. D 【解析】本题考查椭圆的离心率与基本不等式的应用，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.
因为 $2<m<8$，所以 $e_1=\sqrt{1-\frac{2}{m}}$，$e_2=\sqrt{1-\frac{m}{8}}$，
所以 $e_1\cdot e_2=\sqrt{(1-\frac{2}{m})(1-\frac{m}{8})}=\sqrt{1+\frac{1}{4}-(\frac{2}{m}+\frac{m}{8})}\leqslant\sqrt{\frac{5}{4}-2\sqrt{\frac{2}{m}\cdot\frac{m}{8}}}=\frac{1}{2}$.
当且仅当 $m=4$ 时，等号成立，故 $e_1\cdot e_2$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$，$e_1\cdot e_2$ 无最小值.

8. C 【解析】本题考查空间点、线、面的位置关系，考查直观想象与数学运算的核心素养.



取 AB 的中点 Q，连接 MQ，CQ，MC，由 M，N，Q 分别为 BB_1，CC_1，AB 的中点可得 $MC//B_1N$，$MQ//AB_1$，$MC\cap MQ=M$，则平面 $MQC//$ 平面 AB_1N，所以动点 P 的轨迹为 $\triangle MQC$ 及其内部(挖去点 M).
在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 为等边三角形，Q 为 AB 的中点，则 $CQ\perp AB$，易得 $CQ\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 $CQ\perp QM$. 因为 $AB=4$，所以 $CQ=2\sqrt{3}$，因为侧棱长是 6，所以 $AB_1=2\sqrt{13}$，所以 $MQ=\sqrt{13}$，则 $\triangle MQC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{13}=\sqrt{39}$，故动点 P 的轨迹面积为 $\sqrt{39}$.

9. BD 【解析】本题考查函数的解析式与基本初等函数，考查数学抽象与数学运算的核心素养.
$2^{-0.1}=\frac{1}{2^{0.1}}$，则当 $f(\frac{1}{x})=f(x)$ 时，必有 $f(2^{0.1})=f(2^{-0.1})$. 若 $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$，则 $f(\frac{1}{x})=-f(x)$，则 A 错误.

若 $f(x)=2x-\frac{2}{x}$，则 $f(\frac{1}{x})=\frac{2}{x}-2x=f(x)$，则 B 正确.

若 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$，则 $f(\frac{1}{x})=\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$，则 C 错误.

若 $f(x)=|\lg x|$，则 $f(\frac{1}{x})=|\lg\frac{1}{x}|=|-\lg x|=f(x)$，则 D 正确.

10. ACD **【解析】本题考查直线与圆的综合，考查直观想象与数学运算的核心素养.**

对于 A，因为 $|CD|=\sqrt{5}\in(2-\frac{1}{2},2+\frac{1}{2})$，所以圆 C 与圆 D：$x^2+y^2=\frac{1}{4}$ 相交，A 正确.

对于 B，点 C 到直线 $2x+y+m^2=0$ 的距离 $d=\frac{5+m^2}{\sqrt{5}}\geqslant\sqrt{5}>2$，则直线 $2x+y+m^2=0$ 与圆 C 相离，B 错误.

对于 C，由 $(1+2m)x+(1-m)y-3=0$，得 $x+y-3+m(2x-y)=0$，令 $2x-y=0$，得 $x+y-3=0$，解得 $x=1,y=2$，所以直线 l 过定点 $P(1,2)$. 易知 $P(1,2)$ 在圆 C 的内部，所以直线 $(1+2m)x+(1-m)y-3=0$ 与圆 C 必相交，C 正确.

对于 D，因为 $\frac{|4\times2+3\times1-2|}{5}=\frac{|3\times2-4\times1-1|}{5}<2$，所以点 C 到这两条直线的距离相等，且这两条直线与圆 C 相交，所以直线 $4x+3y-2=0$，$3x+4y-1=0$ 各自被圆 C 所截得的弦长恰好相等，D 正确.

11. BCD **【解析】本题考查三角函数的图象及其性质，考查直观想象、数学运算及逻辑推理的核心素养.**

将 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，得到 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，则 $g(x)=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{3})$.

设 $\theta=2\omega x-\frac{\pi}{3}$，由 $x\in[0,\pi)$，得 $\theta\in[-\frac{\pi}{3},2\pi\omega-\frac{\pi}{3})$，因为 $g(x)$ 在 $[0,\pi)$ 内恰有 5 个极值点，所以 $\frac{9\pi}{2}<2\pi\omega-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{11\pi}{2}$，解得 $\frac{29}{12}<\omega\leqslant\frac{35}{12}$.

12. ABD **【解析】本题考查构造函数比较大小的策略，考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.**

令 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{x+1}(x\geqslant0)$，则 $f'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}\geqslant0$，故 $f(x)$ 为增函数.

由 $f(\frac{1}{10})=\ln\frac{11}{10}-\frac{1}{11}>f(0)=0$，得 $c>a$. 令 $g(x)=\ln(x+1)-\sin x(0<x\leqslant\frac{1}{10})$，

则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\cos x$，当 $0<x\leqslant\frac{1}{10}$ 时，$-1<-\frac{1}{(x+1)^2}<-\frac{1}{1.21}<-\frac{1}{2}$，$0<\sin x<\frac{1}{2}$，

则 $g'(x)$ 的导函数 $g''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\sin x<0$，则 $g'(x)$ 在 $(0,\frac{1}{10}]$ 上单调递减，

则 $g'(x)<g'(0)=0$，得 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{10}]$ 上单调递减.

所以 $g(\frac{1}{10})=\ln\frac{11}{10}-\sin\frac{1}{10}<g(0)=0$，得 $b>c$. 故 $b>c>a$.

根据三角函数的定义可证 $\alpha<\tan\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，故 $\tan\frac{1}{11}>\frac{1}{11}$，即 $d>a$.

13. 5 **【解析】本题考查平面向量的共线，考查数学运算的核心素养.**

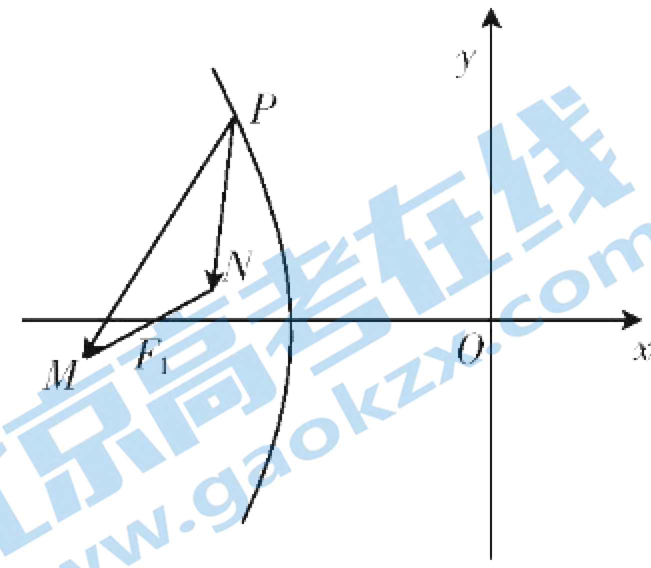
由 A,B,C 三点共线知 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$，则 $3\times4=(2m-4)\times2$，解得 $m=5$.

14. $y=6x-2$（或 $6x-y-2=0$） **【解析】本题考查导数的几何意义与函数的奇偶性，考查数学运算的核心素养.**

因为 $f'(x)=3x^2+2(a-1)x+3a$ 为偶函数，所以 $2(a-1)=0$，解得 $a=1$，则 $f'(1)=6$.

又 $f(1)=4$，故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-4=6(x-1)$，即 $y=6x-2$.

15.3 **【解析】本题考查双曲线的定义与向量的数量积，考查数形结合、化归与转化的数学思想.**



以 F_1F_2 的中点 O 为坐标原点，F_1F_2 的中垂线为 y 轴，建立如图所示的直角坐标系，则 $F_1(-5,0)$，由双曲线定义可知，点 P 的轨迹是以 F_1，F_2 为焦点，实轴长为 6 的双曲线的左支，即点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1(x\leqslant-3)$.

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{F_1M})\cdot(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{F_1N})$，由 $\overrightarrow{MF_1}=\overrightarrow{F_1N}$ 可得 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{F_1M})\cdot(\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{F_1M})=|\overrightarrow{PF_1}|^2-|\overrightarrow{F_1M}|^2=|\overrightarrow{PF_1}|^2-1$.

因为 $|\overrightarrow{PF_1}|$ 的最小值为 $c-a=5-3=2$，所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最小值是 3.

16. $(4n+2)\times3^n$；$\frac{\sqrt{6}}{6}$ **【解析】本题考查数列的综合，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.**

当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{3}{2}a_1-3^2$，得 $a_1=18$. 当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1}-3^n$，$S_n=\frac{3}{2}a_n-3^{n+1}$，

两式相减得 $a_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{3}{2}a_{n-1}-2\times3^n$，得 $a_n=3a_{n-1}+4\times3^n$，所以 $\frac{a_n}{3^n}-\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}=4$.

又因为 $\frac{a_1}{3^1}=6$，所以 $\{\frac{a_n}{3^n}\}$ 是以 6 为首项，4 为公差的等差数列，

所以 $\frac{a_n}{3^n}=4n+2$，即 $a_n=(4n+2)\times3^n$.

因为 $a_n\geqslant\frac{2n^2+n}{k^2}$，所以 $(4n+2)\times3^n\geqslant\frac{2n^2+n}{k^2}$，即 $\frac{2\times3^n}{n}\geqslant\frac{1}{k^2}$.

记 $b_n=\frac{2\times3^n}{n}$，$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3n}{n+1}>1$，所以 $\{b_n\}$ 为递增数列，$b_n\geqslant b_1=6$.

所以 $\frac{1}{k^2}\leqslant6$，解得 $|k|\geqslant\frac{\sqrt{6}}{6}$，则正数 k 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

17. 选②. ………………………………………………………………………… 1 分

解：(1) 因为 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-8}{12\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$， …………………………… 3 分

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{7}}{3}$， …………………………………………………………… 4 分

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{14}$. ……………………………………… 5 分

(2) 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，由正弦定理得 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{15\sqrt{7}}{7}$， ……………… 7 分

所以 $R=\frac{15\sqrt{7}}{14}$. ……………………………………………………………… 8 分

设 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 r，由 $\frac{1}{2}r(a+b+c)=S$， …………………………… 9 分

得 $r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\sqrt{14}}{8+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{4+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{14}-\sqrt{7}}{7}$. ……………………… 10 分

评分细则：

【1】条件①和③都不满足 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，如果考生选①或③，直接判 0 分.

【2】本题还可以求 $\cos B=\frac{3\sqrt{2}}{5}$，$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{5}$，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{14}$.

$2R=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{15\sqrt{7}}{7}$，后面同参考答案，本题详细赋分情况同参考答案.

【3】本题还可以求 $\cos C=\dfrac{13}{15}$，$\sin C=\dfrac{2\sqrt{14}}{15}$，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{14}$，$2R=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{15\sqrt{7}}{7}$，后面同参考答案，本题详细赋分情况同参考答案.

18. 解：(1)因为 a_1，a_2+2，a_3 成等差数列，所以 $a_1+a_3=2(a_2+2)$． ……… 1 分

又因为 $a_1+a_2=4$，所以 $a_3=3a_2$，得$\{a_n\}$的公比 $q=3$， ……… 2 分

所以 $a_1+3a_1=4$，解得 $a_1=1$， ……… 3 分

故 $a_n=3^{n-1}$. ……… 4 分

(2)由 $b_n>0$，$b_{n+1}^2-b_n^2=2(b_{n+1}+b_n)$，得 $b_{n+1}-b_n=2$， ……… 5 分

则$\{b_n\}$是等差数列，因为 $b_1=1$，所以 $b_n=2n-1$， ……… 7 分

则 $c_n=2^{b_n}-a_n=2^{2n-1}-3^{n-1}$，

则 $T_n=(2^1-3^0)+(2^3-3^1)+(2^5-3^2)+\cdots+(2^{2n-1}-3^{n-1})$ ……… 8 分

$=(2^1+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1})-(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})$ ……… 9 分

$=\dfrac{2(1-4^n)}{1-4}-\dfrac{1-3^n}{1-3}$ ……… 11 分

$=\dfrac{4^{n+1}-3^{n+1}-1}{6}$. ……… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问求出 $a_1=1$ 给 1 分，求出 $q=3$ 给 1 分.

【2】第(2)问求 T_n 时，只要得到 $=\dfrac{2(1-4^n)}{1-4}-\dfrac{1-3^n}{1-3}$ 就可以给 3 分，最后化简错误扣 1 分.

19. (1)证明：因为 $EF//$底面 $ABCD$，$EF\subset$平面 $ABFE$，平面 $ABFE\cap$底面 $ABCD=AB$，

所以 $EF//AB$. ……… 1 分

因为 $EA=ED=FB=FC$，M，N 分别为 AD，BC 的中点，所以 $EM\perp AD$，$FN\perp BC$. ……… 2 分

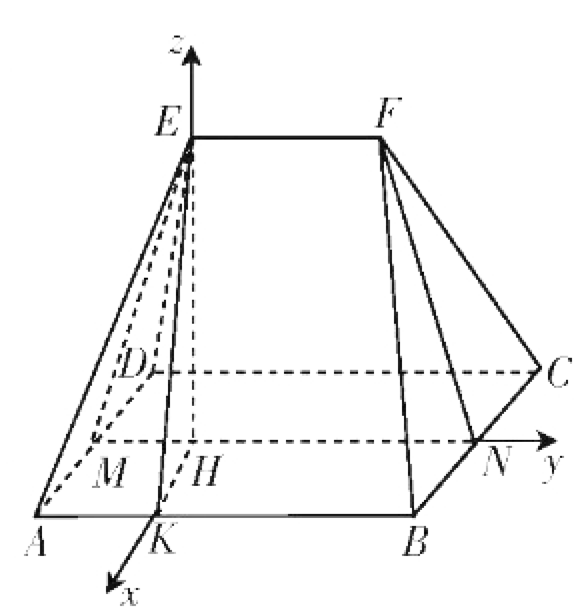
因为 $MN=AB\neq EF$，且 $EF//AB$，所以四边形 $EFNM$ 为梯形，且 EM 与 FN 必相交于一点， ……… 3 分

又 $AD//BC$，所以 $EM\perp BC$，故 $BC\perp$平面 $EFNM$. ……… 4 分

(2)解：过点 E 作 $EH\perp MN$，垂足为 H，由(1)可证 $EH\perp$平面 $ABCD$， ……… 5 分

由 $EM\perp AD$，$MH\perp AD$，得$\angle EMH$ 为二面角 $E-AD-B$ 的平面角，则$\angle EMH=\dfrac{\pi}{4}$. ……… 6 分

因为 $MH=\dfrac{8-4}{2}=2$，所以 $EH=2$. ……… 7 分



作 $HK\perp AB$，垂足为 K.

(解法一)以 H 为原点，以$\overrightarrow{HK}$的方向为 x 轴的正方向建立空间直角坐标系，如图所示，则 $A(2,-2,0)$，$B(2,6,0)$，$C(-2,6,0)$，$F(0,4,2)$，

$\overrightarrow{AB}=(0,8,0)$，$\overrightarrow{BF}=(-2,-2,2)$. ……… 8 分

设平面 ABF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}8y=0,\\ -2x-2y+2z=0,\end{cases}$ ……… 9 分

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$. ……… 10 分

因为$\overrightarrow{CF}=(2,-2,2)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{CF},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CF}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， ……… 11 分

故 CF 与平面 ABF 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………………… 12 分

(解法二)因为 N 为 BC 的中点,所以 C 到平面 ABF 的距离等于 N 到平面 ABF 的距离的 2 倍. …… 8 分

又 $NH/\!/AB$,所以 N 到平面 ABF 的距离等于 H 到平面 ABF 的距离. ………………………… 9 分

过 H 作 EK 的垂线(图略),垂足为 G,可证 $HG\perp$平面 ABF,且 $HG=\frac{EH\cdot KH}{EK}=\sqrt{2}$. ………… 10 分

因为 $CF=\sqrt{CN^2+NF^2}=2\sqrt{3}$, ……………………………………………………… 11 分

所以 CF 与平面 ABF 所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问解析第一行写了"平面 $ABFE\cap$底面 $ABCD=AB$",但未写"$EF\subset$平面 $ABFE$",不扣分.

【2】第(1)问中,还可以证明 $MN\perp BC$,再由 $MN\cap FN=N$,得 $BC\perp$平面 $EFNM$.

【3】第(2)问还可以用等体积法求 C 到平面 ABF 的距离 $d=2\sqrt{2}$.

20. 解:(1)运动员甲选择方案一,若甲得分不低于 60 分,则甲至少要完成 2 项传统运动项目, …………… 1 分

故甲得分不低于 60 分的概率 $P=C_3^2(\frac{1}{2})^2\times(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{2}$. ………………………… 4 分

(2)若乙选择方案一,则乙完成的运动项目的个数 $X\sim B(3,\frac{1}{2})$, ………………………………… 5 分

所以乙最后得分的数学期望为 $30E(X)=30\times3\times\frac{1}{2}=45$. …………………………………… 6 分

若乙选择方案二,则乙得分 Y 的可能为取值为 0,30,40,70,90,120,

$P(Y=0)=(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})^2=\frac{2}{9}$,$P(Y=30)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})^2=\frac{2}{9}$,

$P(Y=40)=2\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{9}$,$P(Y=70)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{9}$,

$P(Y=90)=(1-\frac{1}{2})\times(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$,$P(Y=120)=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$. ……………………………… 9 分

所以 Y 的数学期望 $E(Y)=0\times\frac{2}{9}+30\times\frac{2}{9}+40\times\frac{2}{9}+70\times\frac{2}{9}+90\times\frac{1}{18}+120\times\frac{1}{18}=\frac{385}{9}$, ………… 11 分

因为$\frac{385}{9}<45$,所以运动员乙应该选择方案一. …………………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中,若没有写"若甲得分不低于 60 分,则甲至少要完成 2 项传统运动项目",直接得到"$P=C_3^2(\frac{1}{2})^2\times(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{2}$",不扣分.

【2】第(2)问中,若用其他方法求得乙最后得分的数学期望为 45,不扣分.

21. 解:(1)当直线 MN 垂直于 x 轴时,直线 MN 的方程为 $x=1$,

代入 $y^2=2px$,得 $y=\pm\sqrt{2p}$, ……………………………………………………………… 1 分

因为$\triangle OMN$ 的面积为 2,所以$\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{2p}=2$, ……………………………………… 2 分

解得 $p=2$, ……………………………………………………………………………………… 3 分

故 C 的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)由题意可知,直线 MN 的斜率一定存在,设直线 MN:$y=k(x-1)+3(k\neq0)$,

则 $x=\frac{y-3}{k}+1$,代入 $y^2=4x$,得 $ky^2-4y-4k+12=0$, ……………………………………… 5 分

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $\Delta_1=16(k^2-3k+1)>0$，$y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=\frac{12-4k}{k}$， …………………… 6 分

$|QM|\cdot|QN|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|3-y_1|\times\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|3-y_2|$

$=(1+\frac{1}{k^2})|9-3(y_1+y_2)+y_1y_2|=(1+\frac{1}{k^2})|9-\frac{12}{k}+\frac{12-4k}{k}|=5(1+\frac{1}{k^2})$. …………………… 8 分

设直线 $ST:y=k(x-1)(k\neq0)$，则 $x=\frac{y}{k}+1$，代入 $y^2=4x$，

得 $ky^2-4y-4k=0$， …………………… 9 分

设 $S(x_3,y_3),T(x_4,y_4)$，则 $\Delta_2=16+16k^2>0$，$y_3+y_4=\frac{4}{k}$，$y_3y_4=-4$， …………………… 10 分

$|ST|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_3-y_4|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_3+y_4)^2-4y_3y_4}=4(1+\frac{1}{k^2})$， …………………… 11 分

故存在常数 $\Omega=\frac{5}{4}$，使得 $|QM|\cdot|QN|=\Omega|ST|$ 恒成立. …………………… 12 分

评分细则：

【1】第(2)问中，没有写判别式，但写对了两根之和与两根之积，不扣分.

【2】第(2)问中，联立方程还可以消去 y，特别是求 $|ST|$，消去 y 会更简单，其过程如下：

设直线 $ST:y=k(x-1)(k\neq0)$，代入 $y^2=4x$，得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

设 $S(x_3,y_3),T(x_4,y_4)$，则 $x_3+x_4=\frac{2k^2+4}{k^2}$，则 $|ST|=x_3+x_4+p=4(1+\frac{1}{k^2})$.

【3】第(2)问还可以这样解答：设 MN 的方程为 $x=m(y-3)+1$，代入 $y^2=4x$，得 $y^2-4my+12m-4=0$，

可得 $|QM|\cdot|QN|=5(1+m)^2$.

设直线 ST 的方程为 $x=my+1$，代入 $y^2=4x$，得 $y^2-4my-4=0$，可得 $|ST|=4(m^2+4)$，

故存在 $\Omega=\frac{5}{4}$，使得 $|QM|\cdot|QN|=\Omega|ST|$ 恒成立.

22. (1)解：$f'(x)=(x+1)e^x+2ax$，设 $f''(x)$ 为 $f'(x)$ 的导函数，

则 $f''(x)=(x+2)e^x+2a$. …………………… 1 分

设 $m(x)=f''(x)$，则 $m'(x)=(x+3)e^x$.

当 $x<-3$ 时，$m'(x)<0$；当 $x>-3$ 时，$m'(x)>0$. …………………… 2 分

所以 $m(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上是减函数，在 $(-3,+\infty)$ 上是增函数.

所以 $m(x)_{\min}=-\frac{1}{e^3}+2a$. …………………… 3 分

因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凹函数，所以 $-\frac{1}{e^3}+2a\geq0$， …………………… 4 分

解得 $a\geq\frac{1}{2e^3}$，故 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2e^3},+\infty)$. …………………… 5 分

(2)证明：$h'(x)=e^x-x-1$，$h'(x)$ 的导函数 $h''(x)=e^x-1$.

若 $x>0$，则 $h''(x)>0$，若 $x<0$，则 $h''(x)<0$，

所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， …………………… 6 分

所以 $h'(x)$ 的最小值为 $h'(0)=0$，则 $h'(x)\geq0$，$h(x)$ 为增函数. …………………… 7 分

又 $h(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$h(x)>0$，当 $x<0$ 时，$h(x)<0$. …………………… 8 分

(3)证明：由(2)知 $xh(x)=xe^x-\frac{1}{2}x^3-x^2-x\geq0$，即 $xe^x\geq\frac{1}{2}x^3+x^2+x$， …………………… 9 分

所以 $f(x)=xe^x+ax^2+a\geqslant\frac{1}{2}x^3+(a+1)x^2+x+a$. ………………………………………… 10 分

由(1)知，$a\geqslant\frac{1}{2e^3}$，因为 $2.7<e<2.8$，所以 $a>\frac{1}{2\times2.8^3}=\frac{1}{43.904}>\frac{1}{44}$，………………………… 11 分

所以 $\frac{1}{2}x^3+(a+1)x^2+x+a>\frac{1}{2}x^3+(\frac{1}{44}+1)x^2+x+\frac{1}{44}$，

故 $f(x)>\frac{1}{2}x^3+\frac{45}{44}x^2+x+\frac{1}{44}$. ………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问还可以这样解答：

$f'(x)=(x+1)e^x+2ax$，设 $f''(x)$ 为 $f'(x)$ 的导函数，

则 $f''(x)=(x+2)e^x+2a$. ………………………………………… 1 分

依题意可得 $f''(x)=(x+2)e^x+2a\geqslant0$，即 $a\geqslant-\frac{1}{2}(x+2)e^x$ 恒成立，且 $f''(x)=0$ 不恒成立. ………… 2 分

设函数 $m(x)=-\frac{1}{2}(x+2)e^x$，则 $m'(x)=-\frac{1}{2}(x+3)e^x$.

当 $x<-3$ 时，$m'(x)>0$；当 $x>-3$ 时，$m'(x)<0$. ………………………………………… 3 分

所以 $m(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上是增函数，在 $(-3,+\infty)$ 上是减函数.

所以 $m(x)_{\max}=\frac{1}{2e^3}$. ………………………………………… 4 分

所以 $a\geqslant\frac{1}{2e^3}$，故 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2e^3},+\infty)$. ………………………………………… 5 分

【2】第(3)问如果用其他方法求解，阅卷时请按步骤给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。