北京市育英学校 2023 届高中数学统测（一）

一、选择题(共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1．设集合 $A=\{x||x|<2\}$，$B=\{x|x^2-3x<0\}$，则 $A\cup B=$（　　）.

A．$(-2,3)$　　B．$(-2,0)$　　C．$(0,2)$　　D．$(2,3)$

2．下列函数中，在$(0,+\infty)$为增函数的是（　　）

A．$y=\tan x$　　B．$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　　C．$y=e^{|x-1|}$　　D．$y=x+\dfrac{1}{x+1}$

3．已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$a_1>0$，则“数列$\{a_n\}$递增”是“数列$\{S_n\}$递增”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．若 a，b 是任意实数，且 $a>b$，则下列不等式成立的是(　　)

A．$a^2>b^2$　　B．$\dfrac{b}{a}<1$　　C．$\lg(a-b)>0$　　D．$(\dfrac{1}{3})^a<(\dfrac{1}{3})^b$

5．二项式$(1+2x)^5$展开式的各项系数之和为（　　）.

A．-1　　B．1　　C．32　　D．243

6.已知函数 $f(x)=1+\dfrac{m}{3^x+1}(m\in R)$ 为奇函数，则下列叙述错误的是（　　）

A．$m=-2$　　B．函数 $f(x)$ 在定义域上是单调增函数

C．$f(x)\in(-1,1)$　　D．函数 $F(x)=f(x)-x^{\frac{1}{3}}$ 所有零点之和大于零

7．若正实数a,b满足$a+b=1$，则（　　）

A．ab 有最大值$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 有最大值 4

C．ab 有最小值$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 有最小值 2

8．若不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\left(-\dfrac{1}{2},3\right)$，则$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}<0$成立的一个必要不充分条件是（　　）

A．$-\dfrac{1}{2}<x<3$　　B．$-\dfrac{1}{2}<x<0$

C．$-3<x<\dfrac{1}{2}$　　D．$-1<x<6$

9．设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域为 D，若存在非零实数 $c\in D$，使得 $f(c)+g(c)=0$，则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 D 上具有性质 P．现有三组函数：

① $f(x)=x$，$g(x)=x^2$；② $f(x)=2^{-x}$，$g(x)=-e^x$　　③ $f(x)=-x^2$，$g(x)=2^x$，其中具有性质 P 的是

A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

10. $[x]$为不超过 x 的最大整数，设 a_n 为函数 $f(x)=[x[x]]$，$x\in[0,n)$ 的值域中所有元素的个数.若数列$\left\{\frac{1}{a_n+2n}\right\}$的前 n 项和为 S_n，则 $S_{2022}=$（　　）

A. $\frac{1012}{1013}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2021}{4040}$　　D. $\frac{1011}{1012}$

二、填空题(共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。)

11．若复数 z 满足 $2z+\bar{z}=3-i$，其中 i 为虚数单位，则 $|z|=$__________.

12．已知命题 $p:\exists x\in R$，$x^2+2x\le m$ 为假命题，则实数 m 的取值范围为__________.

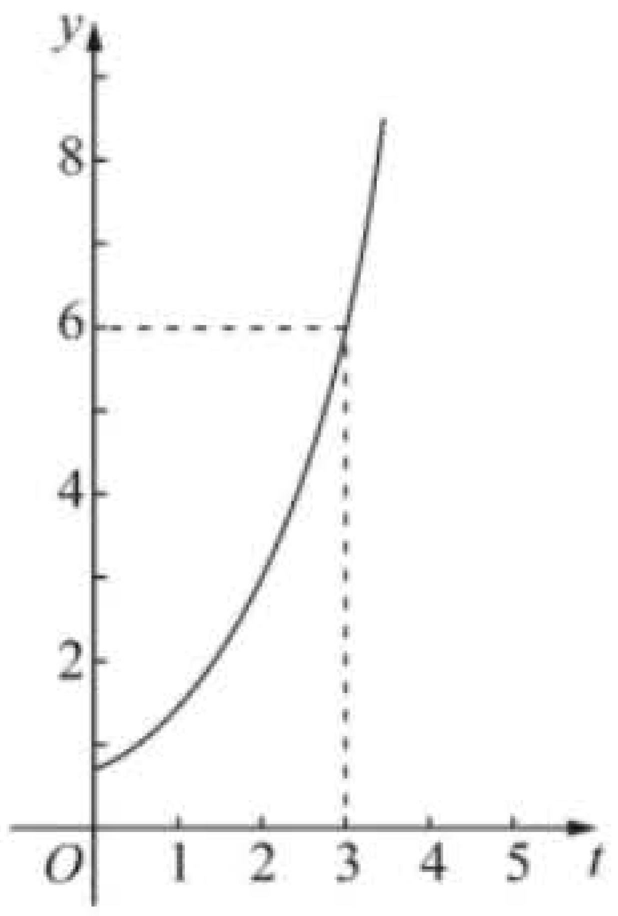
13．记定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f'(x)-f(x)>0$，$f(1)=1$，则不等式 $f(x)>e^{x-1}$ 的解集为______.

14．依法纳税是每个公民应尽的义务，个人取得的所得应依据《中华人民共和国个人所得税法》向国家缴纳个人所得税（简称个税）．2019 年1月1日起，个税税额根据应纳税所得额、税率和速算扣除数确定，计算公式为：个税税额＝应纳税所得额 x 税率－速算扣除数，应纳税所得额的计算公式为：应纳税所得额＝综合所得收入额－基本减除费用－专项扣除－专项附加扣除－依法确定的其他扣除．其中，基本减除费用为每年60000 元，税率与速算扣除数见下表：

级数	全年应纳税所得额所在区间	税率（%）	速算扣除数
1	$[0,36000]$	3	0
2	$(36000,144000]$	10	2520
3	$(144000,300000]$	20	16920
…	…	…	…

李华全年综合所得收入额为249600 元，假定缴纳的专项扣除基本养老保险、基本医疗保险、失业保险等社会保险费和住房公积金占综合所得收入额的比例分别是8%，2%，1%，9%，专项附加扣除是52800 元，依法确定其他扣除是4560 元，则他全年应缴纳的综合所得个税是_________元.

15．如图，某荷塘里浮萍的面积 y（单位：m^2）与时间 t（单位：月）满足关系式：$y=a^t\ln a$（a 为常数），记 $y=f(t)$（$t\ge 0$）．给出下列四个结论：



①设 $a_n=f(n)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

②存在唯一的实数 $t_0\in(1,2)$，使得 $f(2)-f(1)=f'(t_0)$ 成立，其中 $f'(t)$ 是 $f(t)$ 的导函数；

③常数 $a\in(1,2)$；

④记浮萍蔓延到 $2\mathrm{m}^2$，$3\mathrm{m}^2$，$6\mathrm{m}^2$ 所经过的时间分别为 t_1，t_2，t_3，则 $t_1+t_2>t_3$．

其中所有正确结论的序号是______．

三、解答题(共 6 小题，共 85 分。 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。)

16．(本小题 14 分)

在①数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的递增数列，$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$，$a_3=8$ 且 a_2，a_3，a_4-4 成等差数列；②$S_n=2a_n-2$；③$S_n=2^{n+1}-2$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答该问题．

问题：设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，________________．

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\log_2 a_n$，求数列 $\{a_{2n+1}+b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

（如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分）

17.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{3x+4}{x^2+1}$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

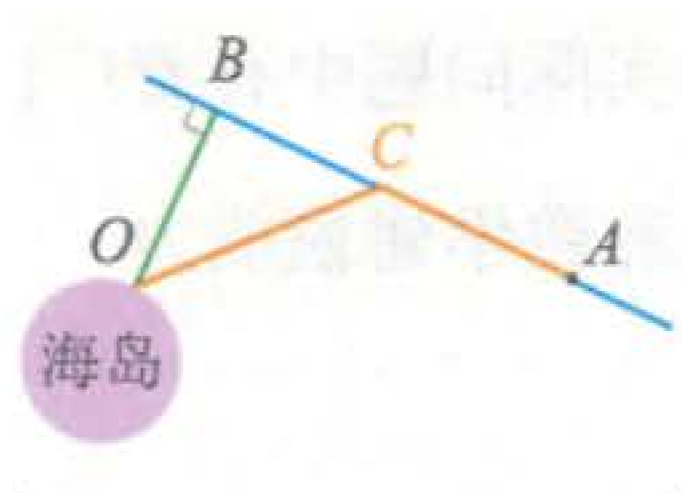
(2)求 $f(x)$ 的最大值与最小值.

18.（本小题 14 分）

如图所示，某海岛码头 O 离岸边最近点 B 的距离为 150km，岸边的医药公司 A 与点 B 的距离为 300km，现有一批药品要尽快送达海岛码头，已知 A 与 B 之间有一条公路，现要用海陆联运的方式运送这批药品，若汽车时速为 130km，快艇时速为 50km，试在岸边选一点 C，先将药品用汽车从 A 运到 C，在用快艇从 C 运到海岛码头，

（1）设点 C 与点 B 的距离为 x，写出运输时间 T(x)h 与 x 的关系式及 x 的范围；

（2）点 C 选在何处可使运输时间最短？



19.（本小题 14 分）

为进一步激发青少年学习中华优秀传统文化的热情，某校举办了“我爱古诗词”对抗赛，在每轮对抗赛中，高二年级胜高三年级的概率为 $\dfrac{2}{5}$，高一年级胜高三年级的概率为 $\dfrac{1}{3}$，且每轮对抗赛的成绩互不影响.

(1)若高二年级与高三年级进行 4 轮对抗赛，求高三年级在对抗赛中至少有 3 轮胜出的概率；

(2)若高一年级与高三年级进行对抗，高一年级胜 2 轮就停止，否则开始新一轮对抗，但对抗不超过 5 轮，求对抗赛轮数 X 的分布列与数学期望.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+(a-1)x-a\ln x\,(a\neq 0)$

（1）求当 $a\geq\dfrac{1}{2}$ 时，证明：$f(x)\geq 0$；

（2）设函数 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

21．(本小题 14 分)

已知集合 $A=\{\alpha|\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4),x_i\in \mathrm{N},i=1,2,3,4\}$．对集合 A 中的任意元素 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，定义

$T(\alpha)=(|x_1-x_2|,|x_2-x_3|,|x_3-x_4|,|x_4-x_1|)$，当正整数 $n\geq 2$ 时，定义 $T^n(\alpha)=T(T^{n-1}(\alpha))$（约定 $T^1(\alpha)=T(\alpha)$）.

(1)若 $\alpha=(2,0,2,1),\beta=(2,0,2,2)$，求 $T^4(\alpha)$ 和 $T^4(\beta)$；

(2)若 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 满足 $x_i\in\{0,1\}(i=1,2,3,4)$ 且 $T^2(\alpha)=(1,1,1,1)$，求 α 的所有可能结果;

(3)是否存在正整数 n 使得对任意 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in A(x_1\geq x_2\geq x_4\geq x_3)$ 都有 $T^n(\alpha)=(0,0,0,0)$？若存在，求出 n 的所有取值；若不存在，说明理由.

北京市育英学校 2023 届高三第一次诊断考试数学试题 2022. 9

参考答案：

1．A

【详解】由题设 $A=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，所以 $A\cup B=(-2,3)$. 故选：A

2．D

【详解】对于 A，$y=\tan x$ 在每一个单调区间上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 不具有单调性，故 A 错误；

对于 B，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 是减函数，故 B 错误；

对于 C，$y=e^{|x-1|}=\begin{cases}e^{x-1},x\ge 1\\ e^{1-x},x<1\end{cases}$ 在 $(1,+\infty)$ 为增函数，在 $(-\infty,1)$ 为减函数，故 C 错误；

对于 D，$y=x+\dfrac{1}{x+1}$，$y'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$，所以 $x>0$ 时 $y'>0$，函数在 $(0,+\infty)$ 为增函数，故 D 正确.

3．A

【详解】因为 $a_1>0$，且数列 $\{a_n\}$ 递增，所以 $a_n>0$，因此 $S_n-S_{n-1}=a_n>0$，所以数列 $\{S_n\}$ 递增，所以"数列 $\{a_n\}$ 递增"是"数列 $\{S_n\}$ 递增"的充分条件；

若数列 $\{S_n\}$ 递增，则 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}>0$，所以 $a_1q^n>0$，又 $a_1>0$，所以 $q^n>0$ 对 $\forall n\in N^*$ 成立，即 $q>0$，则 $a_n>0$，但是 $a_{n+1}-a_n=a_n(q-1)$ 的符号不确定，所以数列 $\{a_n\}$ 不一定递增，所以"数列 $\{a_n\}$ 递增"是"数列 $\{S_n\}$ 递增"的不必要条件；

因此"数列 $\{a_n\}$ 递增"是"数列 $\{S_n\}$ 递增"的充分不必要条件.

4．D

【详解】A 中 $a=1,b=-2$ 不成立，B 中 $a=-\dfrac{1}{2},b=-1$ 不成立，C 中 $a=0,b=-1$ 不成立，D 中由指数函数单调性可知是成立的

5．D

【详解】令 $x=1$ 得 $(1+2\times 1)^5=3^5=243$，所以二项式 $(1+2x)^5$ 展开式的各项系数之和为 243. 故选：D

6.D【详解】因为 $f(x)=1+\dfrac{m}{3^x+1}(m\in R)$ 为奇函数，且其定义域为 R，故 $f(0)=0$，

即 $1+\dfrac{m}{2}=0$，解得 $m=-2$，又当 $m=-2$ 时，$f(x)=1-\dfrac{2}{3^x+1}$，

因为$f(x)+f(-x)=1-\frac{2}{3^x+1}+1-\frac{2}{3^{-x}+1}=2-2\left(\frac{1}{3^x+1}+\frac{3^x}{3^x+1}\right)=0$，

又$f(x)$定义域为R，故$f(x)$为R上的奇函数，故A正确；

因为$y=3^x$是单调增函数，$y=\frac{2}{3^x+1}$为单调减函数，故$f(x)$为单调增函数，故B正确；

又$f(x)=1-\frac{2}{3^x+1}$，$3^x>0$，则$3^x+1>1,\frac{2}{3^x+1}\in(0,2),f(x)\in(-1,1)$，故$C$正确；

又$y=x^{\frac{1}{3}}$的定义域为R，且为奇函数，$f(x)$也为奇函数，故$F(x)$的零点之和为零，故D错误；

综上所述，正确的是ABC.

7．A

【详解】因为正实数a,b满足$a+b=1$

所以$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当$a+b=1$，$a=b$，即$a=b=\frac{1}{2}$取等号，故A正确、C错误.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}\ge\frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=4$，当且仅当$a+b=1$，$a=b$，即$a=b=\frac{1}{2}$取等号，故B、D错误.

8．D

【详解】∵若不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\left(-\frac{1}{2},3\right)$

$\therefore -\frac{1}{2}$与3是方程$ax^2+bx+c=0$的两个根，且$a<0$

$\therefore -\frac{1}{2}+3=-\frac{b}{a}$，$-\frac{1}{2}\times 3=\frac{c}{a}$

$\therefore b=-\frac{5}{2}a$，$c=-\frac{3}{2}a$

$\therefore x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$可化为：$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}<0$

解得：$-\frac{1}{2}<x<3$

A、B、C、D四个选项中，只有选项D满足：$\{x|-1<x<6\}$真包含$\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<3\right\}$

$\therefore x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$成立的一个必要不充分条件是D选项

9．**B.**

【解析】由题，即$g(x)=-f(x)$有非零解，$x^2=-x$，$x^2=2^x$有非零解，$e^x=(\frac{1}{2})^x$没有非零解，选**B.**

10．D

【详解】当$n=1$时，$x\in[0,1)$，$[x]=0$，$x[x]=0$，故$\left[x[x]\right]=0$，即$a_1=1$，

当$n=2$时，$x\in[0,2)$，$[x]=\{0,1\}$，$x[x]\in\{0\}\cup[1,2)$，故$\left[x[x]\right]=\{0,1\}$，即$a_2=2$，

当$n=3$时，$x\in[0,3)$，$[x]=\{0,1,2\}$，$x[x]\in\{0\}\cup[1,2)\cup[4,6)$，故$\left[x[x]\right]=\{0,1,4,5\}$，即$a_2=4$，

以此类推，当$n\geq 2$，$x\in[0,n)$时，$[x]=\{0,1,2,\cdots,n\}$，$x[x]\in\{0\}\cup[1,2)\cup[4,6)\cup\cdots\cup\left[(n-1)^2,n(n-1)\right)$，故$\left[x[x]\right]$可以取的个数为$1+1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n^2-n+2}{2}$，

即$a_n=\dfrac{n^2-n+2}{2},n\geq 2$，当 n=1 时也满足上式，故$a_n=\dfrac{n^2-n+2}{2},n\in N^*$，

所以$\dfrac{1}{a_n+2n}=\dfrac{2}{n^2+3n+2}=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2}{n+1}-\dfrac{2}{n+2}$，$S_n=\dfrac{2}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{4}+\cdots+\dfrac{2}{n+1}-\dfrac{2}{n+2}=1-\dfrac{2}{n+2}=\dfrac{n}{n+2}$，所以$S_{2022}=\dfrac{2022}{2024}=\dfrac{1011}{1012}$.

11．$\sqrt{2}$

【详解】设$z=x+yi(x,y\in R)$，代入$2z+\bar{z}=3-i$得$2x+2yi+x-yi=3-i,\therefore 3x+yi=3-i,\therefore x=1,y=-1$.

所以$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，故答案为$\sqrt{2}$.

12．$(-\infty,-1)$

【详解】∵命题$p:\exists x\in R$，$x^2+2x\leq m$为假命题，

∴命题$\neg p:\forall x\in R$，$x^2+2x>m$为真命题，

又$x^2+2x=(x+1)^2-1\geq -1$，

∴$m<-1$，

即实数m的取值范围为$(-\infty,-1)$.

故答案为：$(-\infty,-1)$.

13．$(1,+\infty)$

【详解】

设$g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，$g'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$，所以函数$g(x)$单调递增，

且$g(1)=\dfrac{f(1)}{e}=\dfrac{1}{e}$，不等式$f(x)>e^{x-1}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{e^x}>\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow g(x)>g(1)$，所以$x>1$.

故答案为：$(1,+\infty)$.

14．5712

【详解】由题意得，专项扣除总额为：$249600\times(8\%+2\%+1\%+9\%)=49920$ 元，

应纳税所得额为：$249600-60000-52800-4560-49920=82320$ 元，

个税税额为：$82320\times10\%-2520=5712$ 元，

15．①②④

【详解】依题意 $f(t)=a^t\ln a$，因为 $f(0)=a^0\ln a<1$，所以 $0<a<\mathrm{e}$ 且 $a\neq1$，

又 $f(3)=a^3\ln a=6$，所以 $\ln a>0$，所以 $1<a<\mathrm{e}$，即 $a\in(1,\mathrm{e})$，

令 $h(a)=a^3\ln a$，$a\in(1,\mathrm{e})$，则 $h'(a)=3a^2\ln a+a^2>0$，

则 $h(a)=a^3\ln a$ 在 $a\in(1,\mathrm{e})$ 上单调递增，又 $h(2)=2^3\ln2<6$，所以 $a\in(2,\mathrm{e})$，故③错误；

由已知可得 $a_n=f(n)=a^n\ln a$，则 $a_{n+1}=f(n+1)=a^{n+1}\ln a$，$a_1=f(1)=a\ln a$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a^{n+1}\ln a}{a^n\ln a}=a$，所以 $\{a_n\}$ 是以 $a\ln a$ 为首项，a 为公比的等比数列，故①正确；

令 $f(t)=a^t\ln a$，则 $f'(t)=a^t(\ln a)^2$，$f(2)=a^2\ln a$，$f(1)=a\ln a$，

令 $g(t_0)=a^{t_0}(\ln a)^2-a^2\ln a+a\ln a$，则 $g'(t_0)=a^{t_0}(\ln a)^3$，$t_0\in(1,2)$，

因为 $a\in(2,\mathrm{e})$，所以 $g'(t_0)=a^{t_0}(\ln a)^3>0$，即 $g(t_0)=a^{t_0}(\ln a)^2-a^2\ln a+a\ln a$，在 $t_0\in(1,2)$ 上单调递增，

因为 $a\in(2,\mathrm{e})$，所以 $\ln a-a<0$，$\ln a-1<0$，$a\ln a>0$，

令 $\varphi(a)=\ln a-a+1$，$a\in(2,\mathrm{e})$，则 $\varphi'(a)=\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1-a}{a}<0$，所以 $\varphi(a)=\ln a-a+1$，在 $a\in(2,\mathrm{e})$ 上单调递减，

且 $\varphi(2)=\ln2-2+1=\ln2-1<0$，即 $\varphi(a)=\ln a-a+1<0$，

令 $H(a)=a\ln a-a+1$，$a\in(2,\mathrm{e})$，则 $H'(a)=\ln a>0$，所以 $H(a)=a\ln a-a+1$ 在 $a\in(2,\mathrm{e})$ 上单调递增，

又 $H(2)=2\ln2-2+1=2\ln2-1>0$，所以 $H(a)=a\ln a-a+1>0$，

所以 $g(1)=a(\ln a)^2-a^2\ln a+a\ln a=a\ln a(\ln a-a)+a\ln a=a\ln a(\ln a-a+1)<0$，

$g(2)=a^2(\ln a)^2-a^2\ln a+a\ln a=a^2\ln a(\ln a-1)+a\ln a=a\ln a(a\ln a-a+1)>0$，

故存在 $t_0\in(1,2)$ 上，$g(t_0)=0$，故②正确；

依题意 $2=a^{t_1}\ln a$、$3=a^{t_2}\ln a$、$6=a^{t_3}\ln a$，所以 $2\times3=a^{t_1}\ln a\times a^{t_2}\ln a=a^{t_1+t_2}(\ln a)^2$，

所以$a^{t_1+t_2}(\ln a)^2=6$，则$\dfrac{a^{t_1+t_2}(\ln a)^2}{a^{t_3}\ln a}=1$，即$a^{t_1+t_2-t_3}\ln a=1$，

所以$t_1+t_2-t_3=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{\ln a}\right)}{\ln a}$，

因为$a\in(2,\mathrm{e})$，所以$\ln 2<\ln a<1$，所以$1<\dfrac{1}{\ln a}<\dfrac{1}{\ln 2}<2<a$，所以$0<\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{\ln a}\right)}{\ln a}<1$，

所以$t_1+t_2-t_3>0$，即$t_1+t_2>t_3$，故④正确；

故答案为：①②④

16．(1)$a_n=2^n$

(2)$\dfrac{8(4^n-1)}{3}+\dfrac{n(1+n)}{2}$

【解析】(1)若选①数列$\{a_n\}$是各项均为正数的递增数列，$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$，则数列$\{a_n\}$是等比数列，因为$a_2$，$a_3$，$a_4-4$成等差数列，所以$a_4-4+a_2=2a_3$，又$a_3=8$，所以$8q-4+\dfrac{8}{q}=2\times 8$，解得$q=2$或$q=\dfrac{1}{2}$（舍去），所以$a_n=a_3q^{n-3}=8\times 2^{n-3}=2^n$；

若选②$S_n=2a_n-2$，当$n=1$时$S_1=2a_1-2$，解得$a_1=2$，当$n\geq 2$时$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$，则$S_n-S_{n-1}=2a_n-2-2a_{n-1}+2$，即$a_n=2a_{n-1}$，所以$\{a_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，$a_{2n+1}+b_n$所以$a_n=2^n$；

若选③$S_n=2^{n+1}-2$，当$n=1$时$a_1=S_1=2^2-2=2$，当$n\geq 2$时$S_{n-1}=2^n-2$，所以$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2-2^n+2=2^n$，当$n=1$时$a_n=2^n$也成立，所以$a_n=2^n$；　　　　……..6分

(2)解：因为$a_n=2^n$，所以$b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$，所以$a_{2n+1}+b_n=2^{2n+1}+n$，　　　　…….8分

所以$T_n=2^3+1+2^5+2+2^7+3+\cdots+2^{2n+1}+n$

$=(2^3+2^5+2^7+\cdots+2^{2n+1})+(1+2+3+\cdots+n)$　　　　……..10分

$=\dfrac{2^3(4^n-1)}{4-1}+\dfrac{n(1+n)}{2}=\dfrac{8(4^n-1)}{3}+\dfrac{n(1+n)}{2}$　　　　……..14分

17．(1)$3x-y+4=0$；

(1)由题设，$f'(x)=\dfrac{3(x^2+1)-2x(3x+4)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3-8x-3x^2}{(x^2+1)^2}$，　　　　……..2分

则$f'(0)=3$，而$f(0)=4$，　　　　……..4分

故$(0,f(0))$处的切线方程$y-4=3x$，即$3x-y+4=0$.　　　　……..5分

(2)由（1），令$3-8x-3x^2=(3+x)(1-3x)=0$，则$x=-3$或$x=\dfrac{1}{3}$，　　　　……..6分

若 $f'\ x\ <0$，则 $x<-3$ 或 $x>\frac{1}{3}$ 时，在 $(-\infty,-3),(\frac{1}{3},+\infty)$ 上 $f(x)$ 递减；

若 $f'\ x\ >0$，则 $-3<x<\frac{1}{3}$ 时，则 $(-3,\frac{1}{3})$ 上 $f(x)$ 递增； ……..8 分

所以极小值为 $f(-3)=-\frac{1}{2}$，极大值为 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}$， ……..10 分

而 $(-\infty,-3)$ 上 $f(x)<0$，$(\frac{1}{3},+\infty)$ 上 $f(x)>0$， ……..12 分

综上，$f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$，最大值为 $\frac{9}{2}$. ……..14 分

18.

解 设点 C 与点 B 的距离为 x km，运输时间为 $T(x)$ h，则

$$T(x)=\frac{\sqrt{150^2+x^2}}{50}+\frac{300-x}{130},\ 0\leqslant x\leqslant 300.$$

因为

$$T'(x)=\frac{1}{2}\frac{(150^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\times 2x}{50}-\frac{1}{130}=\frac{x}{50\sqrt{150^2+x^2}}-\frac{1}{130},$$

令 $T'(x)>0$，可解得 $x>\frac{125}{2}$.

因此可知 $T(x)$ 在 $\left[0,\frac{125}{2}\right]$ 上递减，在$\boxed{4}$______________上递增，从而

$T(x)$ 在 $x=\frac{125}{2}$ 时取得最小值.

这就是说，点 C 选在离 B 点为 $\frac{125}{2}$ km 时可使运输时间最短.

19. (1)由题意，知高三年级胜高二年级的概率为 $\frac{3}{5}$. ……..2 分

设高三年级在 4 轮对抗赛中有 x 轮胜出，“至少有 3 轮胜出”的事件为 A，则……..3 分

$$P(\mathrm{A})=P(x=3)+P(x=4)=\mathrm{C}_4^3\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{297}{625}.$$ ……..5 分

(2)

由题意可知 $X=2$，3，4，5， ……..6 分

则 $P(X=2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，

$P(X=3)=\mathrm{C}_2^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$，

$P(X=4)=\mathrm{C}_3^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$，

$P(X=5)=C_4^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3\times1+\left(1-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{16}{27}$，……..10 分

故 X 的分布列为

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{16}{27}$

……..12 分

$E(X)=2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{4}{27}+4\times\frac{4}{27}+5\times\frac{16}{27}=\frac{38}{9}$ ……..14 分

20. 【解析】(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+(a-1)x-a\ln x(a\neq0)$，

$f'(x)=+x+(a-1)-\frac{a}{x}=\frac{x^2+(a-1)x-a}{x}=\frac{(x-1)(x+a)}{x}$， ……..3 分

因为定义域 $\{x\mid x>0\}$， ……..4 分

所以，当 $a\geq\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增， ……..5 分

$f_{\min}(x)=f(1)=a-\frac{1}{2}\geq0$.得证. ……..6 分

（2）①当 $a\geq0$ 时，由（1）可知，最小值 $f_{\min}(x)=f(1)=a-\frac{1}{2}$，所以当 $a\geq\frac{1}{2}$ 时，没有两个零点.要使 $f(x)$ 有两个零点，则 $f_{\min}(x)=f(1)=a-\frac{1}{2}<0$，即 $0\leq a\leq\frac{1}{2}$.

此时，$f(2)=a(2-\ln2)>0, f(e^{1-\frac{1}{a}})=\frac{1}{2}e^{2-\frac{2}{a}}+(a-1)e^{1-\frac{1}{a}}-a(1-\frac{1}{a})>(a-1)\left(e^{1-\frac{1}{a}}-1\right)>0$

所以，$f(x)$ 在 $(e^{1-\frac{1}{a}},1)$ 和（1，2）各有一个零点，满足题意。 ……..9 分

②当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-a,1)$ 上单调递减，$(0,-a),(1,+\infty)$ 上单调递增，

$f(1)<0, f(-a)=a[-\frac{1}{2}a+1-\ln(-a)]$，令 $u(a)=-\frac{1}{2}a+1-\ln(-a)(-1<a<0)$，

$u'(a)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}>0$，所以在（-1，0）上，$u(a)$ 单调递增，$u(a)>u(-1)=\frac{3}{2}>0$，

所以，$f(-a)=au(a)<0$，$f(x)$ 不可能有两个零点. ……..12 分

③当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\geq0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，不可能有两个零点. ……..13 分

④当 $a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1),(-a,+\infty)$ 单调递增，在 $(1,-a)$ 单调递减，极大值，$f(1)=a-\frac{1}{2}<0$，不可能有两个

零点. ……..14 分

综上，a 的取值范围为 $(0,\dfrac{1}{2})$. ……..15 分

21．(1)由题意 $T(\alpha)=(2,2,1,1)$，$T^2(\alpha)=(0,1,0,1)$，$T^3(\alpha)=(1,1,1,1)$，$T^4(\alpha)=(0,0,0,0)$，

$T(\beta)=(2,2,0,0)$，$T^2(\beta)=(0,2,0,2)$，$T^3(\beta)=(2,2,2,2)$，$T^4(\beta)=(0,0,0,0)$. ……..4 分

(2)由 $T^2(\alpha)=(1,1,1,1)$ 且 $x_i\in\{0,1\}(i=1,2,3,4)$，

$$\begin{cases}||x_1-x_2|-|x_2-x_3||=1\\ ||x_2-x_3|-|x_3-x_4||=1\\ ||x_3-x_4|-|x_4-x_1||=1\\ ||x_4-x_1|-|x_1-x_2||=1\end{cases} ①,$$

当 $x_1=0$ 或 1 时，$||x_4-x_1|-|x_1-x_2||=|x_2-x_4|=1$，

同理，$x_2=0$ 或 1 时，$||x_1-x_2|-|x_2-x_3||=|x_1-x_3|=1$，

$x_3=0$ 或 1 时，$||x_2-x_3|-|x_3-x_4||=|x_2-x_4|=1$，

$x_4=0$ 或 1 时，$||x_3-x_4|-|x_4-x_1||=|x_1-x_3|=1$，

所以①等价于 $\begin{cases}|x_1-x_3|=1\\ |x_2-x_4|=1\end{cases}$，则 $x_1\neq x_3$，$x_2\neq x_4$，

当 $x_1=0$，$x_2=0$，则 α 为 $(0,0,1,1)$ 满足；

当 $x_1=0$，$x_2=1$，则 α 为 $(0,1,1,0)$ 满足，

当 $x_1=1$，$x_2=0$，则 α 为 $(1,0,0,1)$ 满足，

当 $x_1=1$，$x_2=1$，则 α 为 $(1,1,0,0)$ 满足，

综上，α 的所有可能结果 $(1,0,0,1)$、$(0,1,1,0)$、$(1,1,0,0)$、$(0,0,1,1)$. ……..9 分

(3)存在正整数 n 使 $T^n(\alpha)=(0,0,0,0)$ 且 $\{n\in N^*|n\geq 6\}$，理由如下：

由 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in A(x_1\geq x_2\geq x_4\geq x_3)$，则 $T(\alpha)=(x_1-x_2,x_2-x_3,x_4-x_3,x_1-x_4)$，

所以 $T^2(\alpha)=(|x_1+x_3-2x_2|,x_2-x_4,|x_1+x_3-2x_4|,x_2-x_4)$，

若 $a=|x_1+x_3-2x_2|$，$b=|x_1+x_3-2x_4|$，

所以 $T^3(\alpha)=(|x_2-x_4-a|,|x_2-x_4-b|,|x_2-x_4-b|,|x_2-x_4-a|)$，

若 $c=||x_2-x_4-a|-|x_2-x_4-b||$，则 $T^4(\alpha)=(c,0,c,0)$，$T^5(\alpha)=(c,c,c,c)$，$T^6(\alpha)=(0,0,0,0)$，

所以，对 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in A(x_1\ge x_2\ge x_4\ge x_3)$ 都有 $T^6(\alpha)=(0,0,0,0)$，

当 $n\ge 7$ 时，$T^n(\alpha)=(0,0,0,0)$ 恒成立，

综上，n 所有取值为 $\{n\in \mathrm{N}^*\,|\,n\ge 6\}$ 使 $T^n(\alpha)=(0,0,0,0)$ 成立. ……..14 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。