

2020 年复旦大学强基计划试题解析

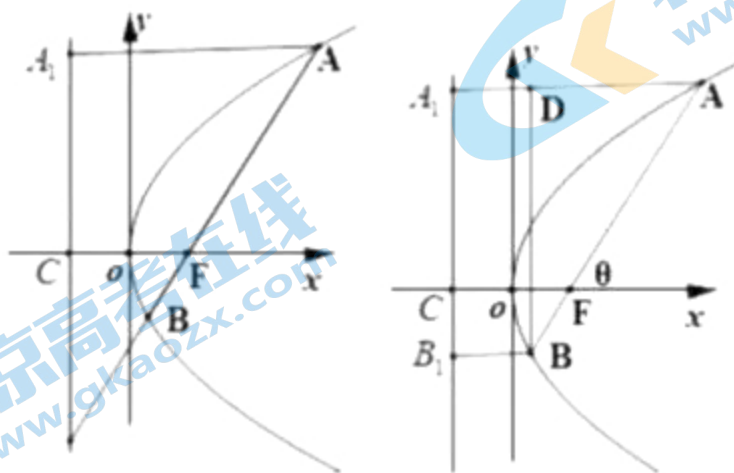
1. 在抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 中，过其焦点 F 的弦与抛物线交于 A, B 两点，且 $\overline{AF} = 3\overline{FB}$ ，准线与 x 轴交于点 C ，过点 A 作抛物线的准线，垂足为 A_1 ，则当四边形 $CFAA_1$ 的面积为 $12\sqrt{3}$ 时， p 的值为_____.

解析：如图所示，设 $BF = t$ ，则 $AF = 3t$ ，由抛物线的定义知 $AA_1 = AF = 3t$ ， $BB_1 = BF = t$ ，在 $\triangle BDA$ 中， $\cos \theta = \frac{AD}{AB} = \frac{3t - t}{3t + t} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ，

四边形 $CFAA_1$ 的面积 $\frac{(p + 3t) \times CA_1}{2} = \frac{(p + 3t) \times 3t \sin \theta}{2} = 12\sqrt{3}$ ，

即 $(p + 3t) \times 3t = 48$ ；

且 $AA_1 = p + AF \cos \theta$ ，得 $3t = p + \frac{3}{2}t$ ，即 $t = \frac{2}{3}p$ ，代入上式得 $p = 2\sqrt{2}$ ；



另：本题也可以用抛物线的极坐标方程解得 $AF = \frac{p}{1 - \cos \theta}$ ， $BF = \frac{p}{1 + \cos \theta}$ 来解。

2. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + 2xy - 1 = 0$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为_____.

解析: 由已知得 $x \neq 0, y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)$, 所以

$$x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 = \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2} \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{4x^2}, \text{ 即}$$

$x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$ 时取得等号.

3. 已知函数 $f(x) = a \sin 2\pi x + b \cos 2\pi x + c \sin 4\pi x + d \cos 4\pi x$,

若 $f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f(x) = f(2x)$ 恒成立, 则 a, b, c, d 中能确定的参数有_____.

解析: 由 $f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f(x) = f(2x)$, 令 $x = 0$, 得 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 在解析式中令 $x = \frac{1}{2}$,

得 $d - b = 0$, 即 $d = b$; 在解析式中 $f\left(\frac{1}{4}\right) = a - d, f\left(\frac{3}{4}\right) = -a - d$, 由

$f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f(x) = f(2x)$, 令 $x = \frac{1}{4}$, 得 $f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 即 $d = 0$,

所以 $d = b = 0$. 此时 $f(x) = a \sin 2\pi x + c \sin 4\pi x$, 又由 $f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f(x) = f(2x)$

得,

$$a \sin(2\pi x + \pi) + c \sin(4\pi x + 2\pi) + a \sin 2\pi x + c \sin 4\pi x = a \sin 4\pi x + c \sin 8\pi x,$$

即 $(2c - a) \sin 4\pi x - c \sin 8\pi x = 0$, 即 $\sin 4\pi x [(2c - a) - 2c \cos 4\pi x] = 0$, 变使得

恒成立，所以 $\begin{cases} 2c - a = 0 \\ 2c = 0 \end{cases}$ ，即 $a = c = 0$ ，综上 $a = b = c = d = 0$ ，即 a, b, c, d 中能确定

的参数为 a, b, c, d 。

4. 若三次方程 $x^3 + ax^2 + 4x + 5 = 0$ 有一个根是纯虚数，则实数 $a =$ _____。

解析：设这个根为 bi ，则 $b^3 i^3 + ab^2 i^2 + 4bi + 5 = 0$ ，即 $5 - ab^2 + (4b - b^3)i = 0$ ，

所以 $\begin{cases} 5 - ab^2 = 0 \\ 4b - b^3 = 0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} b = 2 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$ ，或 $\begin{cases} b = -2 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$ ，综上 $a = \frac{5}{4}$ 。

5. $\left(x^2 + \frac{1}{x} + y^3 + \frac{1}{y}\right)^{10}$ 展开式中的常数项为_____。

解析：不妨设展开式的结构为 $\lambda(x^2)^a x^{-b} y^{3c} y^{-d}$ ，要为常数项，显然

$$\begin{cases} 2a = b \\ 3c = d \\ a + b + c + d = 10 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} 2a = b \\ 3c = d \\ 3a + 4c = 10 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 1 \\ d = 3 \end{cases}$ ，所以常数项为 $C_{10}^2 C_8^4 C_4^1 = 12600$ 。

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{2 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析：因为 $\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$,

所以 $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{2 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots \right.$
 $\left. + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$

所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{2 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{18}$.

7. 在平面直角坐标系下，点(4,5)绕点(1,1)顺时针旋转 60° 所得到的点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析：记 $A(4,5), P(1,1)$ ，所求的点 $B(x,y)$ ，则 $\begin{cases} AP = BP \\ \angle APB = 60^\circ \end{cases}$ ，即 $AP = BP = AB$ ，

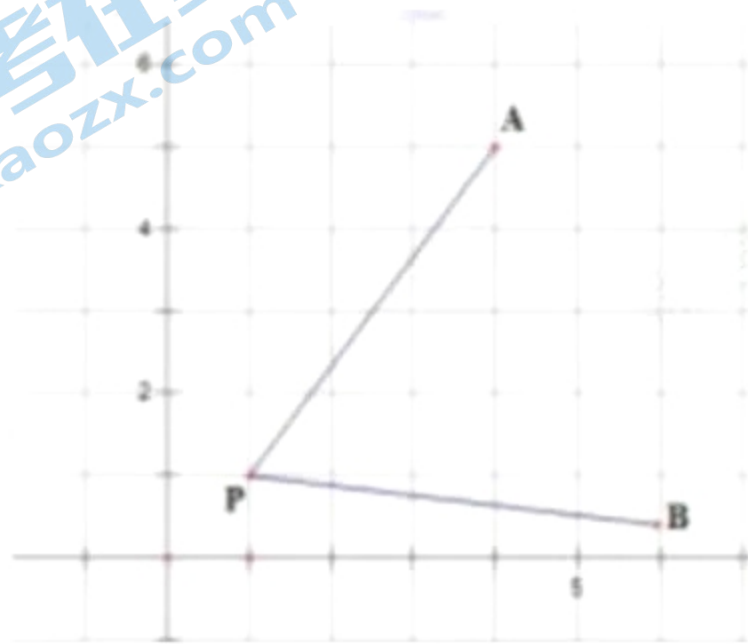
所以 $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25 \end{cases}$ ，其中 $x > 0, y > 0$ ，解得 $x = \frac{5+4\sqrt{3}}{2}, y = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$ ，

所以所求点坐标为 $\left(\frac{5+4\sqrt{3}}{2}, \frac{6-3\sqrt{3}}{2} \right)$.

其中 $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\sin \theta = \frac{4}{5}$, 则 \overline{PB} 对应的复数应该为

$$z_B = 5 \left(\cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{3+4\sqrt{3}}{2} + \frac{4-3\sqrt{3}}{2}i,$$

所以 $\begin{cases} x-1 = \frac{3+4\sqrt{3}}{2} \\ y-1 = \frac{4-3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, 即 $x = \frac{5+4\sqrt{3}}{2}, y = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$, $\left(\frac{5+4\sqrt{3}}{2}, \frac{6-3\sqrt{3}}{2} \right)$.



8. 方程 $5\rho \cos \theta = 4\rho + 3\rho \cos 2\theta$ 所表示的曲线的形状是_____.

解析 : $5\rho \cos \theta = 4\rho + 3\rho \cos 2\theta$ 即 $5 \cos \theta = 4 + 3(2 \cos^2 \theta - 1)$, 即

$$6 \cos^2 \theta - 5 \cos \theta + 1 = 0,$$

解得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, 或者 $\cos \theta = \frac{1}{3}$, 故所得为两条直线.

9. 设 $x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$, 若 $\begin{cases} x^3 + \cos \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) + 2a = 0 \\ 4y^3 + \sin y \cos y - a = 0 \end{cases}$, 则 $\cos(x+2y) =$ _____.

解析：设 $f(x) = x^3 + \sin x$ ，则 $f(x)$ 是 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的奇函数且为增函数，由题意得 $f(x) = -f(2y) = f(-2y)$ ，即 $x + 2y = 0$ ，所以 $\cos(x + 2y) = 1$ 。

10. 实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1$ ，若 $|x + 2y - a| + |a + 6 - x - 2y|$ 的值与 x, y 无关则实数 a 的最值范围为_____。

解析：由题意知 $a \leq x + 2y \leq a + 6$ 恒成立，由于 $x^2 + y^2 = 1$ ，

所以 $x + 2y = \cos \theta + 2 \sin \theta \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ ，故 $\begin{cases} a \leq -\sqrt{5} \\ a + 6 \geq \sqrt{5} \end{cases}$ ，解得 $\sqrt{5} - 6 \leq a \leq -\sqrt{5}$ 。

11. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的内心， $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$ ，且满足 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，则 $x + y$ 的最大值为_____。

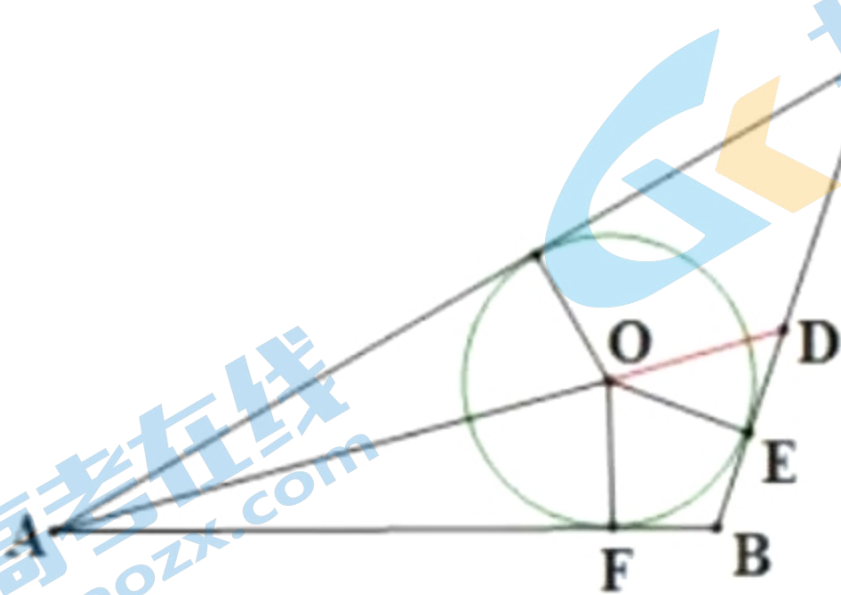
解析：延长 AO 交 BC 于 D ，设 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AO} = \lambda x \overrightarrow{AB} + \lambda y \overrightarrow{AC}$ ，由于 B, D, C 三点共线，

所以 $\lambda x + \lambda y = 1$ ，即 $x + y = \frac{1}{\lambda} = \frac{AO}{AD} = \frac{AO}{AO + OD} = \frac{1}{1 + \frac{OD}{AO}}$ ，

又由 $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$ ，得 $\cos \angle OAF = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ， $\sin \angle OAF = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ，所以 $\frac{OE}{OF} = \frac{OF}{OE} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ，

又因为 $OD \geq OE$ ，所以 $\frac{OD}{OA} \geq \frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OA} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ，所以 $x+y \leq \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ ，

当且仅当 $OD = OE$ 即 $AB = AC$ 时，取得等号，所以 $x+y$ 的最大值为 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 。



12. 直线 $m: x \cos \alpha - y = 0$ 和 $n: 3x + y - c = 0$ ，有 ()

- A. m 和 n 可能重合
- B. m 和 n 不可能垂直
- C. m 和 n 可能平行
- D. 在 m 上存在一点 P ，使得 n 以 P 为中心旋转后与 m 重合

解析：由题意得 $k_m = \cos \alpha > -3 = k_n$ ，所以直线 m 和 n 相交，故 A、C 错；又当 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ 时， m 和 n 垂直，故 B 错；当 P 点是 m 和 n 的交点时， n 以 P 为中心旋转后与 m 重合，故 D 对，所以选 D。

13. 抛物线 $x = 3y^2$ 的焦点为 F ，过抛物线上点 A 的切线与 AF 夹角为 30° ，则点

A 的坐标为 北京高考在线官方微信：[北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](https://www.gkzxx.com)，获取更多试题资料及排名分析信息。

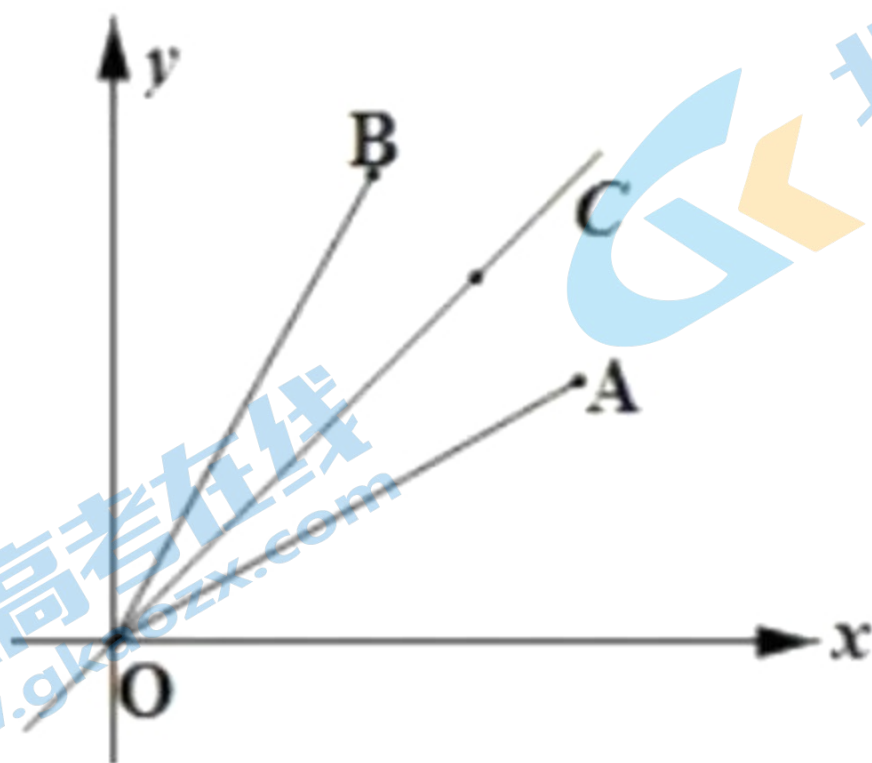
$P(1,2)$.

15. 已知随机变量 $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，且 $x \neq y$ ，连接点 $A(x, y)$ 、 $B(y, x)$ 与原点 O ，则满足 $\angle AOB = 2 \arctan \frac{1}{3}$ 的概率为 $\frac{1}{9}$ 。

解析：由 $\angle AOB = 2 \arctan \frac{1}{3}$ ，知 $\tan \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{3}$ ，由题意知点 $A(x, y)$ 、 $B(y, x)$

关于 $y = x$ 对称，即 $\tan \angle COA = \frac{1}{3}$ ，所以 $\tan \angle AOx = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ ，即 $y = 2x$ ，故降

示中的点 $A(x, y)$ 只能取自 $(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)$ ，由于对称性知点 $A(x, y)$ 只能取自 $(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4)$ ，所以所求概率为 $\frac{8}{9 \times 8} = \frac{1}{9}$ 。



16. $\arcsin \frac{\sqrt{14} + 3\sqrt{2}}{8} + \arcsin \frac{3}{4} = \frac{\pi}{4}$ 。

解析：记 $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{14} + 3\sqrt{2}}{8}$, $\beta = \arcsin \frac{3}{4}$ ，则 $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，所以

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{14} + 3\sqrt{2}}{8}$$

$$\sin \beta = \frac{3}{4}, \text{ 知 } \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 所以 } \cos \alpha = \frac{-\sqrt{14} + 3\sqrt{2}}{8}, \cos \beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{-\sqrt{14} + 3\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{14} + 3\sqrt{2}}{8} \times \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha + \beta \in [0, \pi]$$

$$\text{所以 } \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}, \text{ 即 } \arcsin \frac{\sqrt{14} + 3\sqrt{2}}{8} + \arcsin \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

17. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{21}{2}$ ，且 $AB=6, AC=BC=4, AP=BP=10$ ，则

$CP =$ _____.

解析：取 AB 中点 D ，连接 CD, PD ，由 $AC=BC=4, AP=BP=10, AB=6$ ，得 $CD \perp AB$ ，

$$PD \perp AB, \text{ 所以 } AB \perp \text{平面 } PCD, \text{ 所以 } V_{P-ABC} = V_{A-CDP} + V_{B-CDP} = \frac{1}{3} S_{\triangle CDP} \times AB = \frac{21}{2},$$

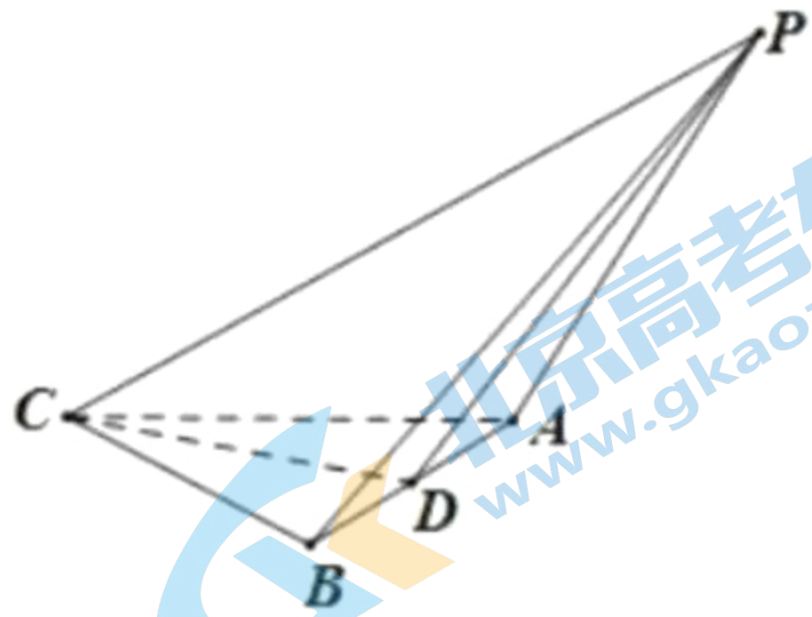
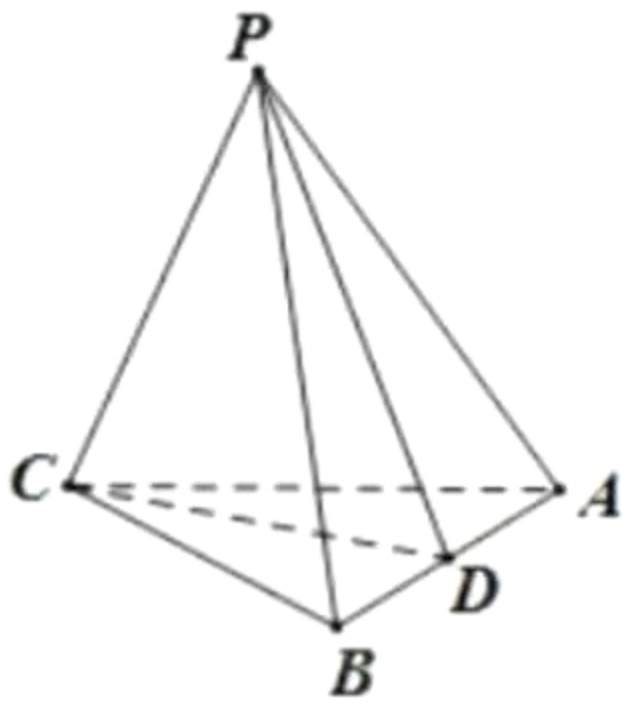
$$\text{即 } S_{\triangle CDP} = \frac{21}{4}, \text{ 由题意知 } CD = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}, PD = \sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{91},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{91} \times \sin \angle CDP = \frac{21}{4}, \text{ 得 } \sin \angle CDP = \frac{3}{2\sqrt{13}}, \text{ 所以}$$

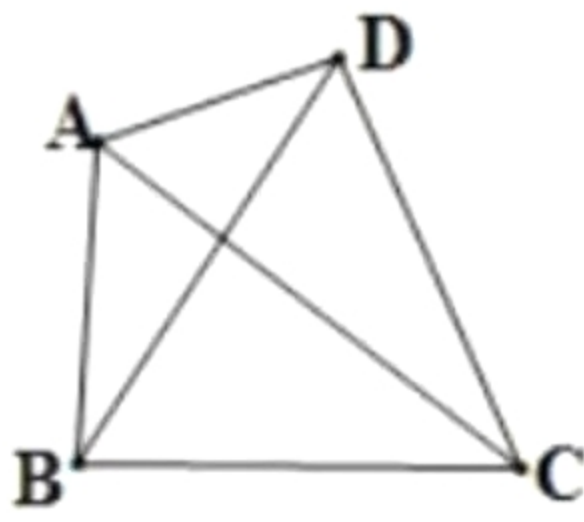
$$\cos \angle CDP = \pm \frac{\sqrt{43}}{2\sqrt{13}},$$

由余弦定理得 $CP = \sqrt{7 + 91 - 2\sqrt{7} \times \sqrt{91} \times \frac{\sqrt{43}}{2\sqrt{13}}} = \sqrt{98 \pm 7\sqrt{43}}$

关注北京高考在线官方微信 北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。



18. 三角形 $\triangle ABC$ 如图所示凸四边形 $ABCD$ ，则 “ $\angle BAC = \angle BDC$ ” 是 “ $\angle DAC = \angle DBC$ ” 的 _____ 条件。



- A. 充分不必要
- B. 必要不充分
- C. 充要
- D. 既不充分也不必要

解析：由 $\angle BAC = \angle BDC$ 知， A, B, C, D 四点共圆，所以 $\angle DAC = \angle DBC$ ，反之亦成立，选 C.

19. 三角形 $\triangle ABC$ 中， $AB = 9, BC = 6, AC = 7$ ，则 BC 边上的中线长度为 _____.

解析：由题意知 BC 边上的中线 $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$

$$\text{平方得 } |\overline{AD}|^2 = \frac{1}{4}(|\overline{AB}|^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} + |\overline{AC}|^2)$$

$$\text{又余弦定理得 } \cos A = \frac{9^2 + 7^2 - 6^2}{2 \times 7 \times 9} = \frac{47}{7 \times 9},$$

$$\text{所以 } |\overline{AD}|^2 = \frac{1}{4} \left(9^2 + 2 \times 9 \times 7 \times \frac{47}{7 \times 9} + 7^2 \right) = 56,$$

即 BC 边上的中线长度为 $AD = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$.

20. 定义 $f_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ -1, & x \notin M \end{cases}$, $M \otimes N = \{x | f_M(x) \cdot f_N(x) = -1\}$, 已知集合

$$A = \{x | x < \sqrt{2-x}\}, \quad B = \{x | x(x+3)(x-3) > 0\}, \quad \text{则 } A \otimes B = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解析：由题意得 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | -3 < x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$, 要使得 $f_A(x) \cdot f_B(x) = -1$,

必须有 $x > 3$, 或 $0 \leq x < 1$, 或 $x \leq -3$,

$$\text{所以 } A \otimes B = \{x | x > 3, \text{ 或 } 0 \leq x < 1, x \leq -3\}.$$

21. 方程 $3x + 4y + 12z = 2020$ 的非负整数解的组数为_____.

A. C_{168}^2

B. C_{169}^2

C. C_{170}^2

D. C_{171}^2

解析：因为 $2020 = 2^2 \times 5 \times 101$, 所以 $4|x$, 不妨设 $x = 4k$, 则 $3k + y + 3z = 505$,

关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息。
即 $3|(505 - y)$, 又 $505 = 3 \times 168 + 1$, 所以 $y \equiv 1 \pmod{3}$,

$k+t+z=168$ ，方程的非负整数解个数等价于 $k+t+z=168$ 的非负数解的个数，由隔板法可得组数为 C_{170}^2 （等价于 168 个相同的小球和 2 块相同的隔板排成一排的排法数），选 C.

22. 已知 $m, n \in \mathbf{Z}, 0 \leq n \leq 11$ ，且 $2^{2020} + 3^{2021} = 12m + n$ ，则 n 的值为_____.

解析： $2^{2020} + 3^{2021} = 16^{505} + 3^{2021} = 12m + n$ ，显然 $2^{2020} \equiv 1 \pmod{3}$ ， $3^{2021} \equiv 0 \pmod{3}$ ， $2^{2020} \equiv 0 \pmod{4}$ ， $3^{2021} \equiv -1 \pmod{4}$ ，所以 $n \equiv 1 \pmod{3}$ ， $n \equiv -1 \pmod{4}$ ，又 $0 \leq n \leq 11$ ，所以 $n = 7$.

23. 记 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$ ，则 $g(x) = f^{-1}(x-1) + 1$ 在 $[-3, 5]$ 上的最大值与最小值的和为_____.

解析：记 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ 的定义域为 $[a, b]$ ，值域为 $[m, n]$ ，则 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[m, n]$ ，值域为 $[a, b]$ ，所以求 $y = f^{-1}(x-1)$ 在定义域为 $[-3, 5]$ 上的值域，等价于求 $y = f^{-1}(x)$ 在定义域为 $[-4, 4]$ 上的值域，所以等价于求 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ 的值域为 $[-4, 4]$ 时的定义域即可，注意到 $f(x)$ 是奇函数且为单调递增函数，由 $-4 \leq 3^x - 3^{-x} \leq 4$ ，解得的 $a \leq x \leq b$ 必然满足 $a + b = 0$ ，进而有

关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](#)，获取更多试题资料及排名分析信息。

$g(x) = f^{-1}(x-1) + 1$ 的最大值与最小值和为 $a + 1 + b + 1 = 2$.

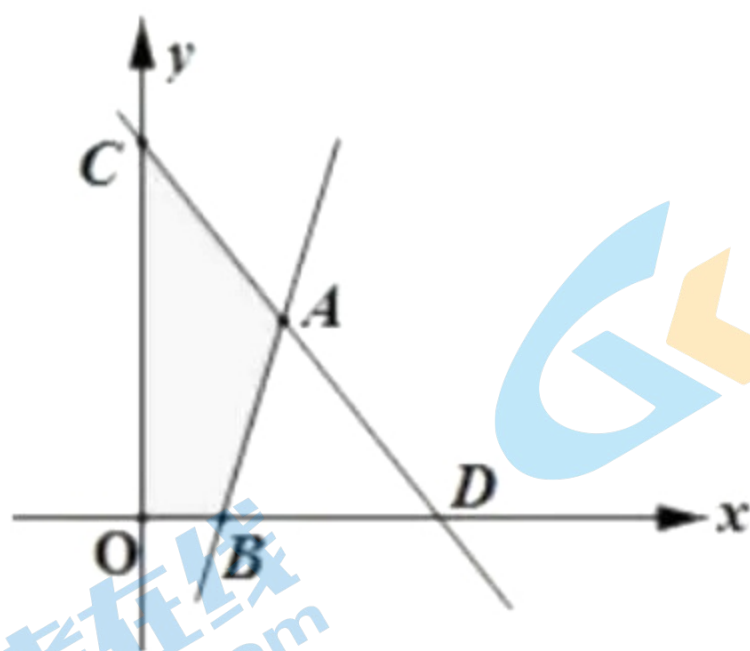
24. 若 $k > 4$ ，直线 $kx - 2y - 2k + 8 = 0$ 与 $2x + k^2y - 4k^2 - 4 = 0$ 和坐标轴围成的四边形面积的取值范围为_____.

解析：由题意知直线 $kx - 2y - 2k + 8 = 0$ 与直线 $2x + k^2y - 4k^2 - 4 = 0$ 都过定点过定点 $A(2, 4)$ ，根据两直线的斜率及 $k > 4$ ，可以分别求得

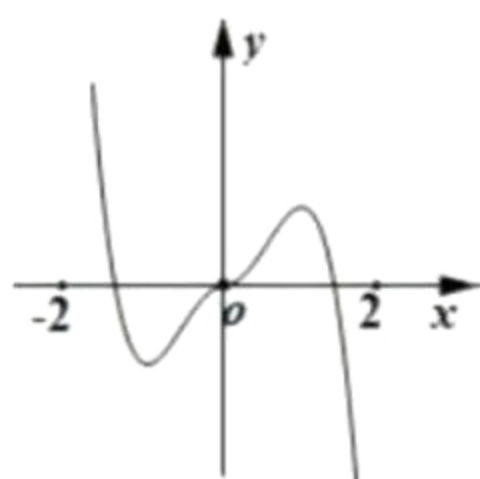
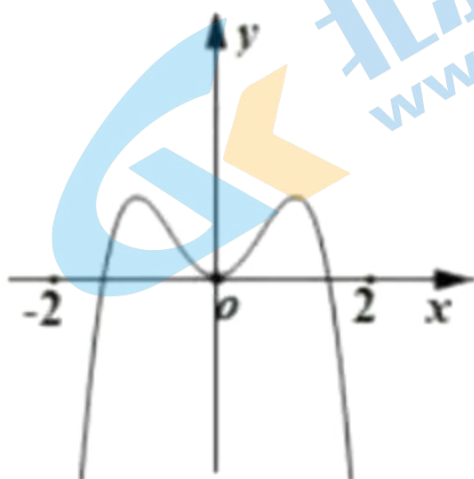
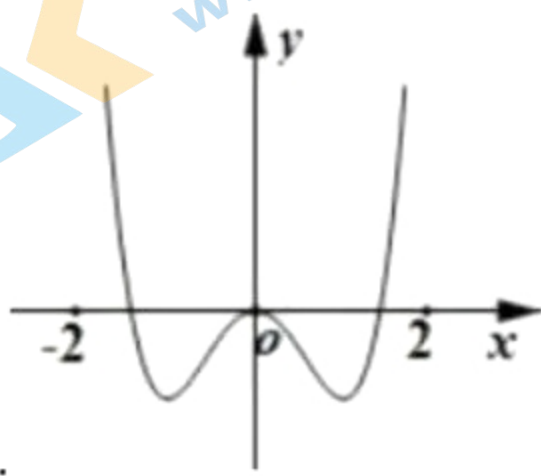
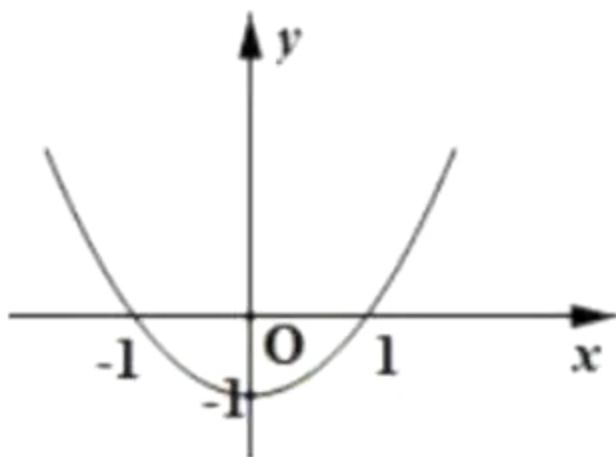
$B\left(2 - \frac{8}{k}, 0\right)$, $C\left(0, 4 + \frac{4}{k^2}\right)$ ，所以四边形面积为

$$S = S_{\triangle ACO} + S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{4}{k^2}\right) \cdot 2 + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{8}{k}\right) \cdot 4 = \frac{4}{k^2} - \frac{16}{k} + 8 = 4\left(\frac{1}{k} - 2\right)^2 - 8,$$

因为 $k > 4$ ，所以 $\frac{1}{k} \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ ，所以 $S \in \left(\frac{17}{4}, 8\right)$ ，即所求面积的范围为 $\left(\frac{17}{4}, 8\right)$.



25. 已知 $f(x)$ 的图像如图所示，则 $f(f(x))$ 的大致图像为 ()



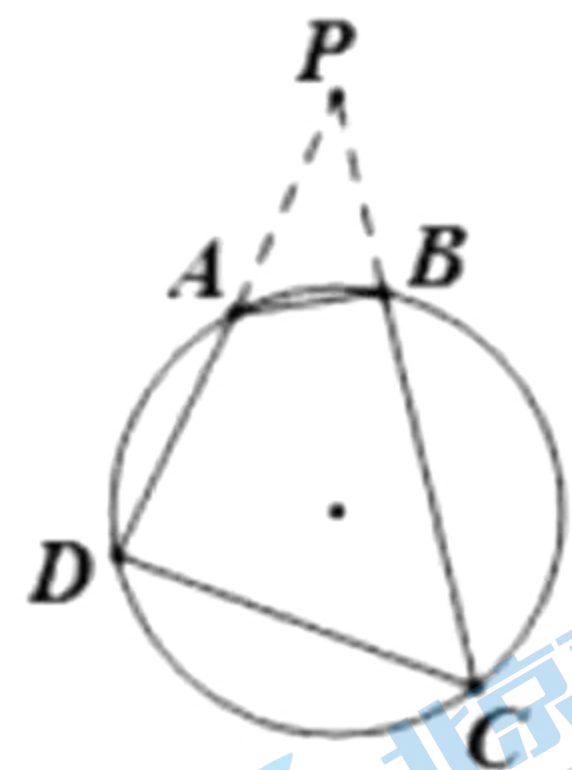
解析：注意到 $f(1) = f(-1) = 0, f(0) = -1$ ， $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(f(x))$ 为偶函数，故 A、D 错；又 $x_0 \in (0,1)$ 时， $f(x_0) \in (-1,0)$ ，此时 $f(f(x_0)) < 0$ ，故 C 错，故选 B.

26. 已知 A, B, C, D 四点共圆，延长 DA 与 CB 的延长线交于点 P ，若 $AB = 1$ ， $CD = 2$ ， $AD = 4$ ， $BC = 5$ ，则 AP 的长度为_____.

解析：关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯 (ID:bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。由割线定理得 $PA \times PD = PB \times PC$ ，即 $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}$ 。

所以 $\triangle PAB \sim \triangle PCD$ ，所以 $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} = \frac{AB}{CD}$ ，

即 $\frac{PA}{5+PB} = \frac{PB}{4+PA} = \frac{1}{2}$ ，解得 $PA = \frac{14}{3}$ ， $PB = \frac{13}{3}$ ，故 AP 的长度为 $\frac{14}{3}$ 。



27. 给定 5 个函数，其中 2 个偶函数，3 个奇函数，从中任取 3 个，则既有奇函数又有偶函数的概率为_____。

解析：既有奇函数又有偶函数的概率为 $P = \frac{C_2^1 C_3^2 + C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = \frac{9}{10}$ 。

28. 下列不等式恒成立的有 ()

A. $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq x + \frac{1}{x}$

B. $|x - y| + \frac{1}{x - y} \geq 2$

C. 忘记了

D. $|x - y| \geq |x - z| + |y - z|$

解析：对于 A： $x^2 + \frac{1}{x^2} - x - \frac{1}{x} = x(x-1) + \frac{1}{x^2}(1-x) = \frac{(x-1)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right]}{x^2} \geq 0$ ，

故 A 对；

对于 B，取 $x=0, y=1$ 可得 B 错；

对于 D，有绝对值性质得 $|x-y| \leq |x-z| + |y-z|$ ，故 D 错，

综上选 A.

29. 已知向量数列 $\{\vec{a}_n\}$ 满足 $\vec{a}_{n+1} = \vec{a}_n + \vec{d}$ ，且 $|\vec{a}_1| = 3$ ， $\vec{a}_1 \cdot \vec{d} = -\frac{3}{2}$ ，令

$S_n = \vec{a}_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \vec{a}_i \right)$ ，则当 S_n 取最大值时， n 的值为_____.

解析：由题意得 $\vec{a}_n = \vec{a}_1 + (n-1)\vec{d}$ ，所以 $\sum_{i=1}^n \vec{a}_i = n\vec{a}_1 + \frac{n(n-1)}{2}\vec{d}$ ，

所以 $S_n = \vec{a}_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \vec{a}_i \right) = 9n - \frac{3n(n-1)}{4} = -\frac{3}{4}(n^2 - 13n)$ ，

故当 $n=6$ 或 7 时， S_n 取最大值.

30. 某公司安排甲乙丙等 7 人完成 7 天的值班任务，每人负责一天，已知甲不排

第一天，乙不排第二天，甲和丙安排在相邻的两天，则不同的安排方式有

关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯\(ID:bj-gaokao\)](#)，获取更多试题资料及排名分析信息。

_____种.

解析：由题意得不同的安排方式有以下几种情形：

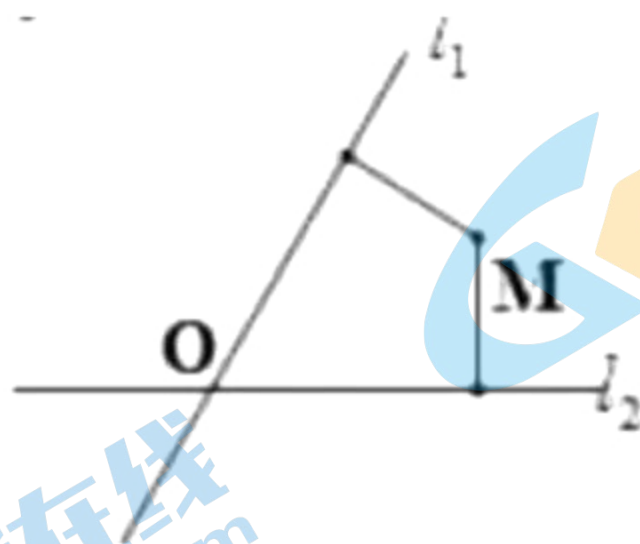
情形一：甲丙安排在前两天时，共有 $A_5^5 = 120$ 种；

情形二：甲丙安排在第二、第三天时，共有 $A_2^2 A_5^5 = 240$ 种；

情形三：甲丙安排在第三、四或四、五或五、六或六、七天时，共有 $4A_2^2 C_4^1 A_4^4 = 768$ 种；

所以不同的安排方式有 $120+240+768=1128$ 种。

31. 如图所示，直线 l_1 、 l_2 交于 O 点， M 为平面上任意一点，若 p, q 分别为点 M 到 l_1 、 l_2 的距离，则称 $M(p, q)$ 为点 M 的“距离坐标”。已知给定非负常数 p, q ，给出下列三个命题，正确的序号为_____。



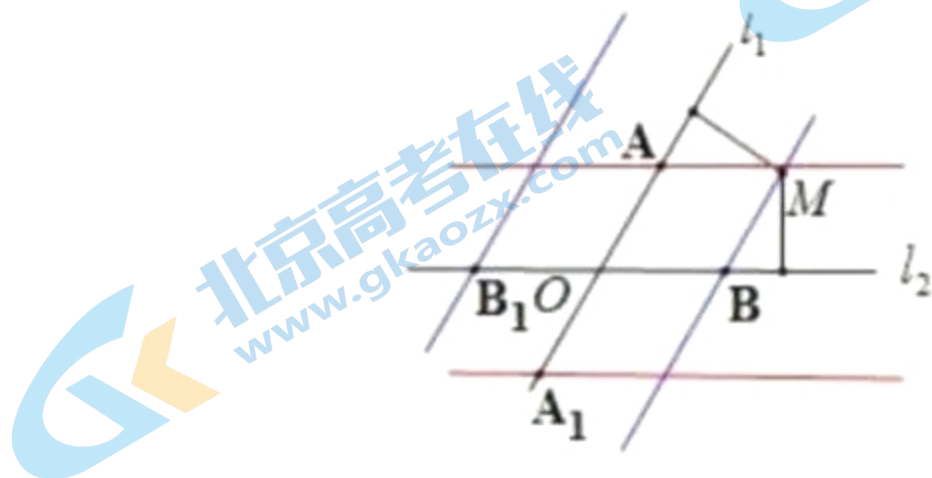
(1) 若 $p = q = 0$ ，则距离坐标为 $(0, 0)$ 的点有且仅有 1 个；

(2) 若 $pq = 0$ ，且 $p + q \neq 0$ ，则距离坐标为 (p, q) 的点有且仅有 2 个；

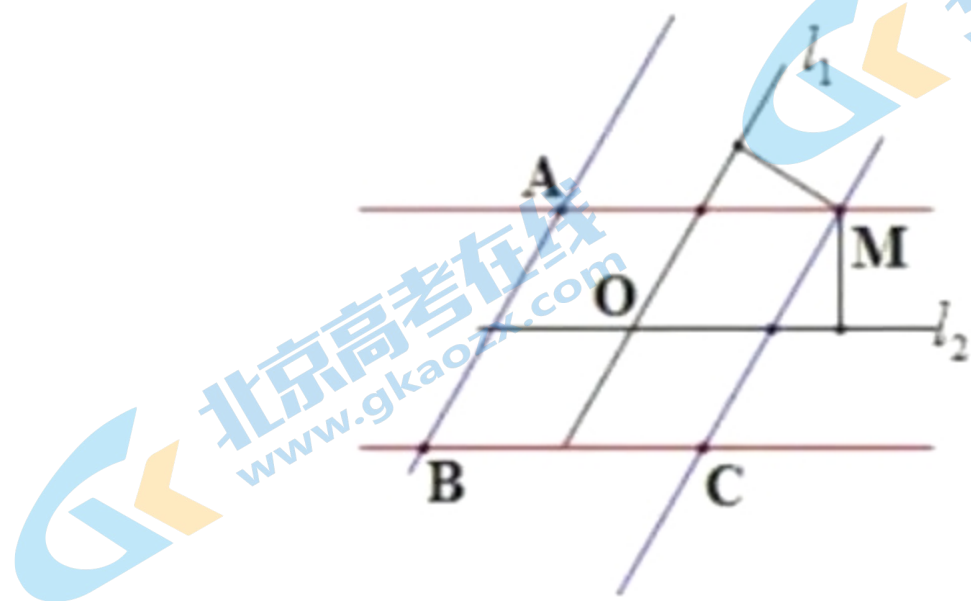
(3) 若 $pq \neq 0$ ，则距离坐标为 (p, q) 的点有且仅有 4 个；

解析：(1) 显然，距离坐标为 $(0,0)$ 的点只能是 O 点，有1个；

(2) 若 $pq=0$ ，且 $p+q \neq 0$ ，则距离坐标为 (p,q) 的点即为 $(0,q)$ 或者 $(p,0)$ ，各有2个，即 A, A_1, B, B_1 ，共4个，见下图



(3) 若 $pq \neq 0$ ，则距离坐标为 (p,q) 的点有且仅有4个即 A, B, C, M ，恰好以 O 为中心；



综上，正确的序号为：(1) (3)。

关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯\(ID:bj-gaokao\)](#)，获取更多试题资料及排名分析信息。