8.2 (2021 年中国科学技术大学强基计划测试广东地区数学试题)

一、填空题

1. 求 $\sum\limits_{k=1}^{2020} \sin \dfrac{k\pi}{2021} =$______.

解 注意到

$$\sum_{k=1}^{2020} \sin \frac{k\pi}{2021} = \mathrm{Im}\left[\sum_{k=1}^{2020}\left(\cos \frac{k\pi}{2021} + i \sin \frac{k\pi}{2021}\right)\right] = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{2020} e^{\frac{k\pi i}{2021}}\right).$$

而我们易得

$$\sum_{k=1}^{2020} e^{\frac{k\pi i}{2021}} = \frac{1+e^{\frac{\pi i}{2021}}}{1-e^{\frac{\pi i}{2021}}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2021}}{1-\cos \frac{\pi}{2021}} i,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{2020} \sin \frac{k\pi}{2021} = \frac{\sin \frac{\pi}{2021}}{1-\cos \frac{\pi}{2021}}.$$

2. 设抛物线 $y = x^2$ 与 $x = ay^2 + 1$ 相切，则 $a =$______.

解 设两者在 $x = x_0$ 处相切，显然 $a > 0, x_1$，问题等价于曲线 $y = x^2$ 与 $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{a}}$ 在 $x = x_0$ 处相切，因此有

$$\begin{cases} x_0^2 = \sqrt{\dfrac{x_0 - 1}{a}} \\ 2x_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{a(x_0-1)}} \end{cases}$$

两式相除得 $\dfrac{x_0}{2} = 2(x_0 - 1) \Rightarrow x_0 = \dfrac{4}{3}$，从而可得 $a = \dfrac{27}{256}$.

3. 写出一个函数 $f(x) =$______，使得 $f(x - f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + f(x) - 1$ 对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ 恒成立.

解 用 $f_2(x)$ 表示两次迭代即 $f_2(x) = f(f(x))$，则令 $f(x) \to x, x \to y$ 有

$$f(0) = f_2(x) + 2f^2(x) + f_2(x) - 1 \Rightarrow f_2(x) = -f^2(x) + \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{2}.$$

令 $f(x) \to x, y \to y$ 有

$$\begin{aligned} f(f(x) - f(y)) &= f_2(y) + 2f(x)f(y) + f_2(x) - 1 \\ &= \left[-f^2(y) + \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{2}\right] + 2f(x)f(y) + \left[-f^2(x) + \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{2}\right] - 1 \\ &= -\left[f(x) - f(y)\right]^2 + f(0). \end{aligned}$$

再令 $\dfrac{x-f_2(u)}{2f(u)} \to x, u \to y$ 有

$$f\left(\frac{x-f_2(u)}{2f(u)}-f(u)\right)-f\left(\frac{x-f_2(u)}{2f(u)}\right)+1=x,$$

这说明任意的 x 都能用 $f(s)-f(t)+1$ 的形式表示，所以有

$$f(x)=-x^2+f(0).$$

代回原式得到 $f(0)=1$，故

$$f(x)=-x^2+1.$$

4. 设空间区域 $\{(x,y,x) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, z \geqslant 0\}$ 中存在四个点两两距离都是 d，则 d 的最大值为_____.

解 问题等价于求能放进单位半球内的正四面体的棱长最大值，不妨设正四面体的顶点 A 为 z 坐标最大的顶点，我们首先考虑底面 ΔBCD 在平面 xoy 上的情形，此时易得正四面体 $A-BCD$ 的最大边长为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，高为 1.

当底面 ΔBCD 不在平面 xoy 上时，此时显然有正四面体 $A-BCD$ 的高 $h<1$，进而棱长小于 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. 故 d 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

5. 设 k 个人进行互相传球游戏，每个拿球的人等可能地把球传给其他人中的任何一位，$k \geqslant 3$. 若初始时球在甲手中，则第 n 次传球之后，球又回到甲手中的概率为_____.

解 不妨记初始时球在甲手中，则第 n 次传球之后，球又回到甲手中的概率为 P_n，则 $P_0=0$ 且 n 次传球传不到甲手上的概率为 $1-P_n$，同时球在第 $n+1$ 次传回甲手中只可能是第 n 次球传到了其余的 $k-1$ 个人手中然后在传给了甲，从而我们有

$$P_{n+1}=\frac{1}{k-1}(1-P_n),\ P_0=0.$$

解得

$$P_n=\frac{(-1)^n+(k-1)^{n-1}}{k(k-1)^{n-1}}.$$

二、解答题

6. 求函数 $f(x)=5+6\cos x-3\cos^2 x-4\cos^3 x+\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{3x}{2}$ 的取值范围.

解 令 $g(x)=6x-3x^2-4x^3$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$，则 $g'(x)=-6(2x^2+x-1)=-6(2x-1)(x+1)$.

从而

$$g(x)_{\min}=g(-1)=-5,\ g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}.$$

从而 $6\cos x-3\cos^2x-4\cos^3$ 在 $x=\pi$ 时取最小值 -5，在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时取最大值 $\dfrac{7}{4}$. 另一方面，我们注意到显然 $\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{3x}{2}$ 在 $x=\pi$ 时取最小值 $-\dfrac{1}{4}$，在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时取最大值 $\dfrac{1}{4}$. 这说明

$$f(x)_{\min}=f(\pi)=5+(-5)+\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4},\ f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}=7.$$

从而有

$$f(x)\in[-\frac{1}{4},7].$$

7. 设 a,b,c 是正整数，p 是素数，$p\geqslant 5$ 且 p 整除 $a^{\frac{p-1}{2}}+b^{\frac{p-1}{2}}+c^{\frac{p-1}{2}}$，证明：$p$ 整除 abc.

解 [反证法] 假设 p 不整除 abc，则 $p\nmid a$, $p\nmid b$ 且 $p\nmid c$. 由二次剩余类的欧拉准则：若 $x\nmid p$，则

$$x^{\frac{p-1}{2}}\equiv\begin{cases}1(\bmod p),\ \exists y\text{ 使得 }y^2\equiv x(\bmod p)\\-1(\bmod p),\ \nexists y\text{ 使得 }y^2\equiv x(\bmod p)\end{cases}$$

得到在模 p 意义下有

$$a^{\frac{p-1}{2}}+b^{\frac{p-1}{2}}+c^{\frac{p-1}{2}}\in\{-3.-1,1,3\}.$$

而 $p>3$，显然有 $p\nmid a^{\frac{p-1}{2}}+b^{\frac{p-1}{2}}+c^{\frac{p-1}{2}}$，与假设矛盾，故 $p\mid abc$.

8. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，且对任意正整数 m,n 均有

$$a_{2m+n}=2a_m+a_n+2m^2+4mn.$$

求 a_n 的通项公式.

解 注意到

$$a_3=a_{2\times1+1}=2a_1+a_1+2\times1^2+4\times1\times1=15,$$

$$a_5=a_{2\times1+3}=2a_1+a_3+2\times1^2+4\times1\times3=35.$$

同时 $a_5=a_{2\times2+1}=2a_2+a_1+2\times2^2+4\times2\times1=2a_2+19$，故 $a_2=8$. 而进一步，我们有

$$a_4=a_{2\times1+2}=2a_1+a_2+2\times1^2+4\times2\times1=a_2+16=24.$$

于是我们观察到

$$a_1=1\times3,\ a_2=2\times4,\ a_3=3\times5,\ a_4=4\times6,\ a_5=5\times7.$$

我们猜测 $a_n=n(n+2)$，下面用数学归纳法证明：

当 $n\leqslant 2$ 时，显然成立；我们假设当 $n\leqslant k+1$ 时，有 $a_n=n(n+2)$，其中 $k>1$.

接下来考虑 $n=k+2$ 的情况：

$$\begin{aligned}a_{k+2}=&a_{2\times 1+k}\\=&2a_1+a_k+2\times 1+4k\\=&k(k+2)+4k+8\\=&(k+2)(k+4),\end{aligned}$$

结论成立. 从而由数学归纳法知：$a_n=n(n+2)$.

设 $f(x)$ 是 n 次实系数多项式，其中 $n\geqslant 1$，$g(x)=f(x)-f'(x)$. 证明：若 $f(x)$ 的 n 个根都是实数，则 $g(x)$ 的 n 个根也都是实数.

解 我们首先证明两个引理.

引理 1：若 $F(x)=e^{-x}f(x)$ 有两个根 a 与 b，其中 $f(x)$ 为实系数多项式且 $a<b$，则存在 $c\in(a,b)$ 使得 c 是其导函数 $F'(x)$ 的根.

证明 若 $F'(x)$ 在区间 (a,b) 有正有负，则由零点存在定理知结论成立；若不然，$F(x)$ 在区间 (a,b) 恒正或恒负，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调，这与 $F(a)=F(b)=0$ 矛盾.

引理 2：设 a 是实系数多项式 $f(x)$ 的 k 重根，$k\geqslant 2$，则 a 也是其导函数 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根.

证明 不妨设 $f(x)=(x-a)^k g(x)$，其中 $g(x)$ 为不以 a 为根的多项式，则

$$\begin{aligned}f'(x)=&k(x-a)^{k-1}g(x)+(x-a)^k g'(x)\\=&(x-a)^{k-1}[kg(x)+(x-a)g'(x)]\\=&(x-a)^{k-1}h(x).\end{aligned}$$

由于 $h(a)=kg(a)\neq 0$，所以 a 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根，则

下面开始我们的证明.

由题不妨令 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 为 $f(x)$ 互不相等的单根，$b_1,b_2,\cdots,b_t$ 为 $f(x)$ 互不相等的重根（重数分别为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$），则

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_s)(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\cdots(x-b_t)^{\beta_t},$$

其中 $s+\sum\limits_{i=1}^{t}\beta_i=n$.

令 $F(x)=e^{-x}f(x)$，则 $F'(x)=-e^{-x}[f(x)-f'(x)]=-e^{-x}g(x)$，则

$$f(x)=0\Leftrightarrow F(x)=0,\ g(x)=0\Leftrightarrow F'(x)=0.$$

从而由引理 1 知 $g(x)$ 在任意 $f(x)$ 的两个相邻根之间存在一个实根，共有 $s+t-1$ 个，记为 c_i, $1\leqslant i\leqslant s+t-1$; 另一方面，由引理 2 知：$b_1,b_2,\cdots,b_t$ 也是 $f'(x)$ 的根，且重数分别为 $\beta_1-1,\beta_2-1,\cdots,\beta_t-1$. 于是可设

$$f'(x)=(x-b_1)^{\beta_1-1}(x-b_2)^{\beta_2-1}\cdots(x-b_t)^{\beta_t-1}h(x),$$

从而有 $b_1,b_2,\cdots,b_t$ 也是 $g(x)=f(x)-f'(x)$ 的根，且重数分别为 $\beta_1-1,\beta_2-1,\cdots,\beta_t-1$.

于是有

$$g(x)=g_1(x)\left[\prod_{i=1}^{s+t-1}(x-c_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{t}(x-b_i)^{\beta_i-1}\right]=g_1(x)g_2(x).$$

注意到 $\deg g(x)=n$ 且 $\deg g_2(x)=(s+t-1)+\sum\limits_{i=1}^{t}(\beta_i-1)=n-1$，从而 $\deg g_1(x)=1$，故 $g_1(x)$ 存在实根，记为 c_{s+t}，故

$$g(x)=B\left[\prod_{i=1}^{s+t}(x-c_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{t}(x-b_i)^{\beta_i-1}\right].$$

这足以说明 $g(x)$ 的 n 个根也是实根.