机密★启用前

巴蜀中学2020届“一诊”模拟测试卷

理数

命题：巴蜀中学高三组
审题：巴蜀中学高三组
排版：

名师讲解

本试题卷共 4 页，23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

5. 考试结束后，请将答题卡上交。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是满足题目要求的。

1. 已知复数 $z=\frac{i(1-3i)}{1+i}$，则其共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

2. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{1-x}{x}\geqslant 0\right.\right\}$，集合 $B=\{x|y=\lg(2x-1)\}$，则 $A\cap B=$

A. $(0,1]$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},1\right]$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

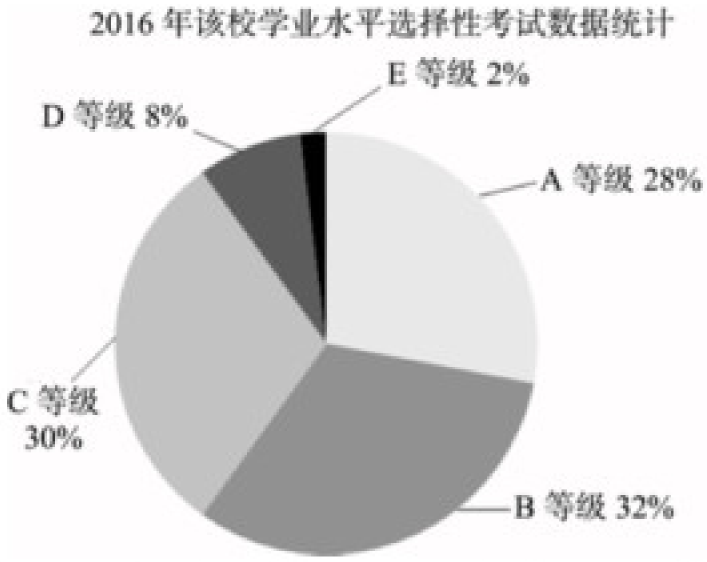
3. 设 $\vec{a}$，$\vec{e}$ 均为单位向量，当 $\vec{a}$，$\vec{e}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ 时，$\vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 方向上的投影为

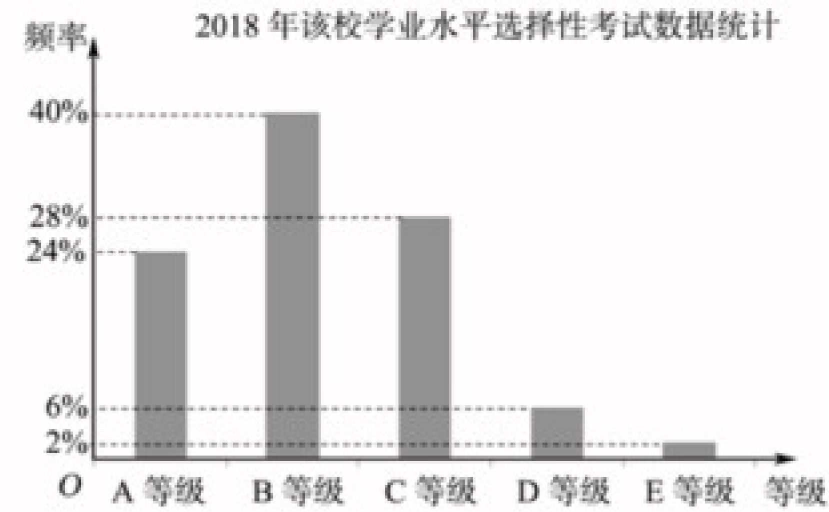
A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $4a_3=3a_2$，则数列 $\{a_n\}$ 中一定为零的项是

A. a_6　　B. a_7　　C. a_8　　D. a_9

5. 新高考方案规定，普通高中学业水平考试分为合格性考试（以下称合格考）和选择性考试（以下称选择考）. 其中“选择考”成绩将计入高考总成绩，即“选择考”成绩根据学生考试时的原始卷面分数，由高到低进行排序，评定为 A、B、C、D、E 五个等级. 某试点高中 2018 年参加“选择考”的总人数是 2016 年参加“选择考”的总人数的 2 倍，为了更好地分析该校学生“选择考”的水平情况，现统计了该校 2016 年和 2018 年“选择考”的成绩等级结果，得到如下图表：





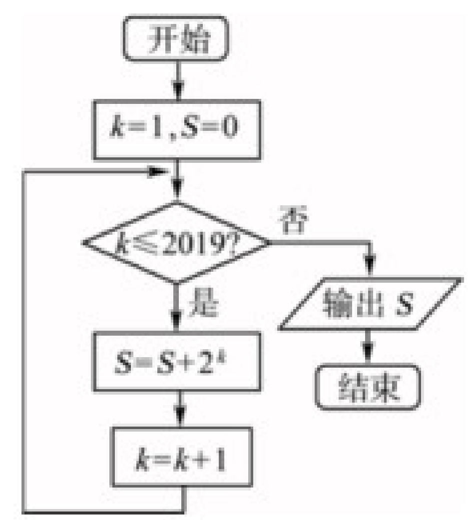
针对该校“选择考”的情况，2018 年与 2016 年相比较，下列说法中正确的是

A. 获得 A 等级的人数减少了　　B. 获得 B 等级的人数增加了 1.5 倍

C. 获得 D 等级的人数减少了一半　　D. 获得 E 等级的人数相同

6. 执行如图所示的程序框图，输出的结果为

A. $2^{2019}-1$　　B. $2^{2019}-2$　　C. $2^{2020}-1$　　D. $2^{2020}-2$



7. 设函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)$，将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 φ $(\varphi>0)$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图像，若 $g(x)$ 为偶函数，则 φ 的最小值是

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $S_n=(-1)^n a_n+\frac{1}{2^n}$，则 $S_1+S_3+S_5=$

A. 0　　B. $\frac{5}{64}$　　C. $\frac{17}{64}$　　D. $\frac{21}{64}$

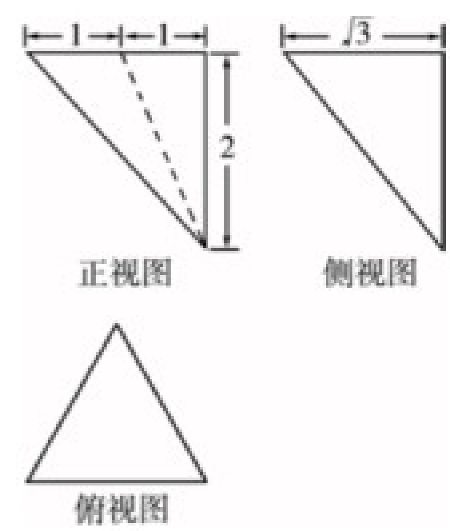
9. 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$，过其焦点 F 的直线与 C 交于 A,B 两点，O 是坐标原点，记 $\triangle AOB$ 的面积为 S，且满足 $|AB|=3|FB|=\frac{3\sqrt{2}}{2}S$，则 $p=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

10. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的外接球的体积为

A. $\frac{28\sqrt{7}}{27}\pi$　　B. $\frac{28\sqrt{7}}{9}\pi$

C. $\frac{28\sqrt{21}}{27}\pi$　　D. $\frac{28\sqrt{21}}{9}\pi$



11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x\ln x-2x, x>0, \\ x^2+\frac{3}{2}x, x\leqslant 0, \end{cases}$ $g(x)=kx-1$，$f(x)$ 的图像上有且仅有四个不同的点关于直线 $y=-1$ 的对称点在 $g(x)$ 的图像上，则 k 的取值范围是

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{3},1\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

12. 在 $\triangle ABC$ 中，A、B、C 为其三内角，满足 $\tan A$、$\tan B$、$\tan C$ 都是整数，且 $A>B>C$，则下列结论中错误的是

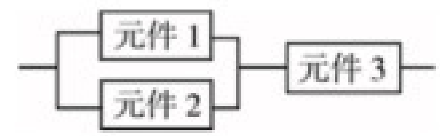
A. $A>\frac{2\pi}{5}$　　B. $B>\frac{\pi}{3}$　　C. $A<\frac{4\pi}{9}$　　D. $B<\frac{5\pi}{12}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分。

13. 已知 $(2+x)^5=a_0+a_1(1+x)+a_2(1+x)^2+\cdots+a_5(1+x)^5$，则 $a_2=$ ________.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，以线段 F_1F_2 为直径的圆交 C 的一条渐近线于点 P（P 在第一象限内），若线段 PF_1 的中点 Q 在 C 的另一条渐近线上，则 C 的离心率 $e=$________.

15. 中国光谷(武汉)某科技公司生产一批同型号的光纤通讯仪器,每台仪器的某一部件由三个电子元件按如图方式连接而成,若元件 1 或元件 2 正常工作,且元件 3 正常工作,则该部件正常工作. 由大数据统计显示:三个电子元件的使用寿命(单位:小时)均服从正态分布 $N(10000,10^2)$,且各个元件能否正常工作相互独立. 现从这批仪器中随机抽取 1000 台检测该部件的工作情况(各部件能否正常工作相互独立),那么这 1000 台仪器中该部件的使用寿命超过 10000 小时的平均值为______台.



16. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,P 为体对角线 BD_1 上的一点,且 $BP=\lambda BD_1(\lambda\in(0,1))$,现有以下判断:①$A_1D\perp C_1P$;②若 $BD_1\perp$平面 PAC,则 $\lambda=\frac{1}{3}$;③$\triangle PAC$ 周长的最小值是 $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$;④若$\triangle PAC$ 为钝角三角形,则 λ 的取值范围为$\left(0,\frac{2}{3}\right)$. 其中正确判断的序号为______.

三、解答题:解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分)

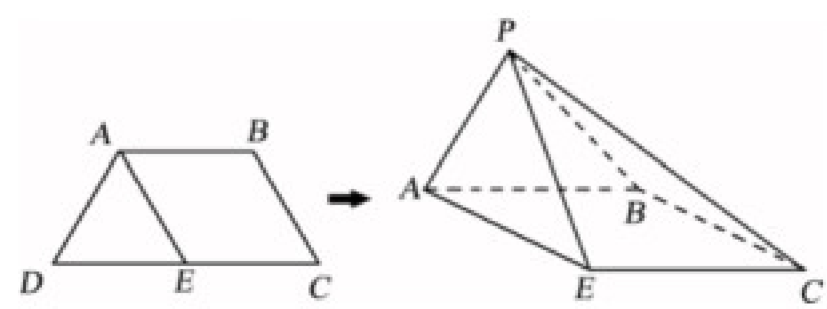
在$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,AD 是$\angle BAC$ 的内角平分线,点 D 在线段 BC 上,且 $BD=2CD$.

(1)求 $\sin B$ 的值;

(2)若 $AD=1$,求$\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

如图,在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$AD=AB=BC=1$,$CD=2$,点 E 为 CD 中点,以 AE 为折痕把$\triangle ADE$ 折起,使点 D 到达点 P 的位置($P\notin$平面 $ABCE$).



(1)证明:$AE\perp PB$;

(2)若直线 PB 与平面 $ABCE$ 所成的角为$\frac{\pi}{4}$,求二面角 $A\text{-}PE\text{-}C$ 的余弦值.

19. (12 分)

已知点 $M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上,且点 M 到 C 的左、右焦点的距离之和为 $2\sqrt{2}$.

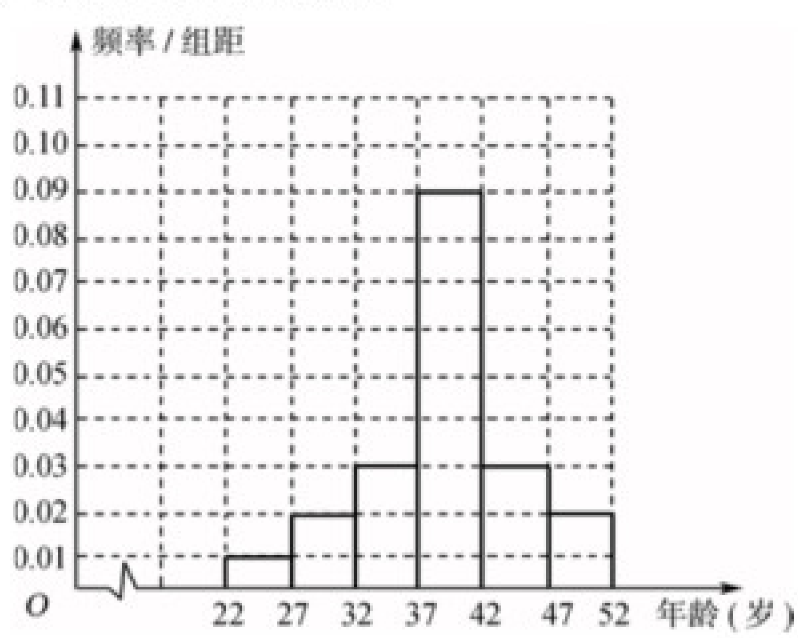
(1)求 C 的方程;

(2)设 O 为坐标原点,若 C 的弦 AB 的中点在线段 OM(不含端点 O,M)上,求$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的取值范围.

20. (12 分)

武汉有"九省通衢"之称,也称为"江城",是国家历史文化名城. 其中著名的景点有黄鹤楼、户部巷、东湖风景区等等.

(1)为了解"五・一"劳动节当日江城某旅游景点游客年龄的分布情况,从年龄在 22 岁到 52 岁的游客中随机抽取了 1000 人,制成了如下的频率分布直方图:



现从年龄在[42,52]内的游客中，采用分层抽样的方法抽取 10 人，再从抽取的 10 人中随机抽取 4 人，记 4 人中年龄在[47,52]内的人数为 ξ，求 $P(\xi=3)$；

(2)为了给游客提供更舒适的旅游体验，该旅游景点游船中心计划在 2020 年劳动节当日投入至少 1 艘至多 3 艘 A 型游船供游客乘坐观光. 由 2010 到 2019 这 10 年间的数据资料显示每年劳动节当日客流量 X（单位：万人）都大于 1. 将每年劳动节当日客流量数据分成 3 个区间整理得下表：

劳动节当日客流量 X	$1<X<3$	$3\leqslant X\leqslant 5$	$X>5$
频数(年)	2	4	4

以这 10 年的数据资料记录的 3 个区间客流量的频率作为每年客流量在该区间段发生的概率，且每年劳动节当日客流量相互独立.

该游船中心希望投入的 A 型游船尽可能被充分利用，但每年劳动节当日 A 型游船最多使用量（单位：艘）要受当日客流量 X（单位：万人）的影响，其关联关系如下表：

劳动节当日客流量 X	$1<X<3$	$3\leqslant X\leqslant 5$	$X>5$
A 型游船最多使用量	1	2	3

若某艘 A 型游船在劳动节当日被投入且被使用，则游船中心当日可获得利润 3 万元；若某艘 A 型游船劳动节当日被投入却不被使用，则游船中心当日亏损 0.5 万元. 记 Y（单位：万元）表示该游船中心在劳动节当日获得的总利润，Y 的数学期望越大游船中心在劳动节当日获得的总利润越大，问该游船中心在 2020 年劳动节当日应投入多少艘 A 型游船才能使其当日获得的总利润最大？

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=(x+1)e^x+\frac{1}{2}ax^2+2ax$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)讨论 $f(x)$ 极值点的个数；

(2)若 $x_0(x_0\neq-2)$ 是 $f(x)$ 的一个极值点，且 $f(-2)>e^{-2}$，证明：$f(x_0)\leqslant 1$.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），在以原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

(2)设点 $P(-1,0)$，直线 l 和曲线 C 交于 A，B 两点，求 $|PA|+|PB|$ 的值.

23.[选修 4-5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x+a|+2|x-1|(a>0)$.

(1)当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>4$ 的解集；

(2)若不等式 $f(x)>4-2x$ 对任意的 $x\in[-3,-1]$ 恒成立，求 a 的取值范围.

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】B

【解析】依题意 $z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{4-2\mathrm{i}}{2}=2-\mathrm{i}$，故 $\bar{z}=2+\mathrm{i}$，其虚部为 1，故选 B.

2.【答案】C

【解析】由 $\dfrac{1-x}{x}\geqslant 0$ 解得 $0<x\leqslant 1$，由 $2x-1>0$ 解得 $x>\dfrac{1}{2}$，故 $A\cap B=\left(\dfrac{1}{2},1\right]$，故选 C.

3.【答案】B

【解析】$\vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 上的投影为 $|\vec{a}|\cos\langle\vec{a},\vec{e}\rangle=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$，故选 B.

4.【答案】A

【解析】设公差为 d，由 $4a_3=3a_2$ 得 $a_1=-5d$，$\therefore a_6=a_1+5d=0$，故选 A.

5.【答案】B

【解析】设 2016 年“选择考”总人数为 a，2018 年的为 $2a$，则

等级＼年份	2016 年	2018 年
A	$0.28a$	$0.48a$
B	$0.32a$	$0.8a$
D	$0.08a$	$0.12a$
E	$0.02a$	$0.04a$

可知 B 等级 2018 年与 2016 年比，$\dfrac{0.8a-0.32a}{0.32a}=1.5$，故选 B.

6.【答案】D

【解析】可知 $S=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{2019}=\dfrac{2(1-2^{2019})}{1-2}=2^{2020}-2$. 故选 D.

7.【答案】A

【解析】$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$向左平移 $\varphi(\varphi>0)$，得 $g(x)=\sin\left(2x+2\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)$，又 $g(x)$ 为偶函数，令 $x=0$，

得$\varphi=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\varphi$ 最小值为$\dfrac{\pi}{6}$. 故选 A.

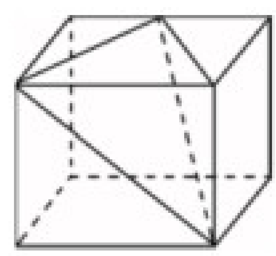
8.【答案】D

【解析】$S_n=(-1)^n(S_n-S_{n-1})+\dfrac{1}{2^n}(n\geqslant 2)$，若 n 为偶数，则 $S_{n-1}=\dfrac{1}{2^n}$，$\therefore S_k=\dfrac{1}{2^{k+1}}$($k$ 为奇数).

则 $S_1+S_3+S_5=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}=\dfrac{21}{64}$，故选 D.

9.【答案】D

【解析】设 $|FB|=a$，则 $3a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}p\times 2\sqrt{2}a$，$\therefore p=2$，故选 D.

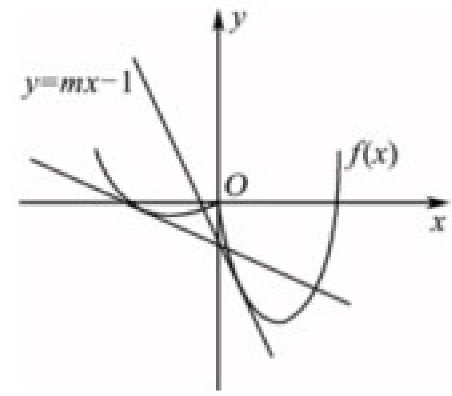


10.【答案】C

【解析】如图，可得 $R^2=1^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{7}{3}$. 则 $V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{28\sqrt{21}}{27}\pi$，故选 C.

11.【答案】D

【解析】$y=kx-1$ 关于直线 $y=-1$ 的对称直线为 $y=mx-1,(m=-k)$，先考虑特殊位置：$y=mx-1$ 与 $y=x^2+\frac{3}{2}x(x\leqslant0)$ 相切，得 $\Delta=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$（舍去正数），$y=mx-1$ 与 $y=x\ln x-2x, x>0$ 相切，由导数几何意义得 $\begin{cases}y=x\ln x-2x,\\ y=mx-1,\\ m=\ln x-1\end{cases}\Rightarrow x=1,m=-1$，结合图像可知 $-1<m<-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<k<1$，故选 D.



12.【答案】A

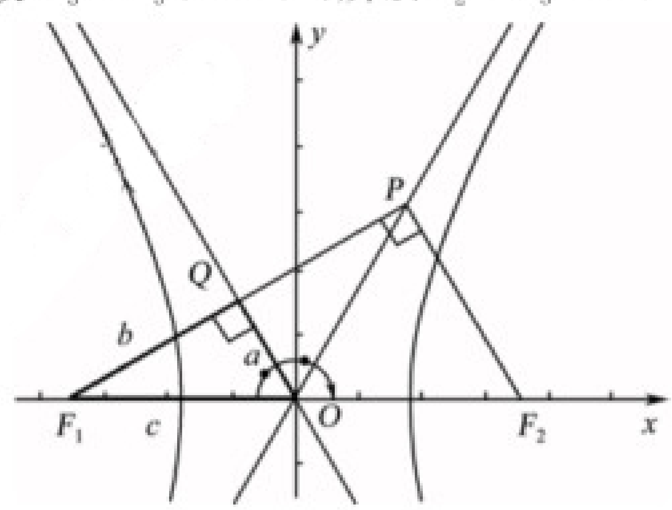
【解析】由于 $0<C<B<A<\pi$，所以 B、C 都是锐角，又 $\tan B$、$\tan C$ 都是正整数，这样 $\tan A=-\tan(B+C)=\frac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}>0$，可见 A 也是锐角. 这时，$\tan C\geqslant1$，$\tan B\geqslant2$，$\tan A\geqslant3$. 有 $\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=\tan C\geqslant1$，即 $(\tan A-1)(\tan B-1)\leqslant2$. 但是 $\tan A-1\geqslant2$，$\tan B-1\geqslant1$，比较可知只可能 $\tan A=3$，$\tan B=2$，$\tan C=1$. 由 $\tan B>\sqrt{3}$ 可知 $B>\frac{\pi}{3}$，选项 B 是正确的. 至于选项 C 和 D，由 $\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}>\tan A$，可知 $A<\frac{5\pi}{12}$，又 $\frac{5\pi}{12}<\frac{4\pi}{9}$，故选项 C 正确；又由 $\frac{5\pi}{12}>A>B$，选项 D 正确. 故选 A.

二、填空题

13.【答案】10

【解析】$(2+x)^5=[1+(1+x)]^5$，其通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r(1+x)^r$，故 $T_3=C_5^2(1+x)^2$，所以 $a_2=C_5^2=10$.

14.【答案】2



【解析】由图可知，OQ 是线段 F_1P 的垂直平分线，又 OP 是 $\mathrm{Rt}\triangle F_1PF_2$ 斜边的中线，$\therefore |OP|=c$，且 $\angle F_1OQ=\angle POQ=\angle POF_2=60^\circ$，$\therefore\frac{b}{a}=\tan60^\circ=\sqrt{3}$，所以 $e=2$.

15.【答案】375

【解析】由正态分布可知，每个元件正常工作超过 10000 小时的概率为 $\frac{1}{2}$，则部件正常工作超过 10000 小时的概率为 $\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，又 1000 台仪器的该部件工作服从二项分布，所以平均值为 $1000\times\frac{3}{8}=375$ 台.

16.【答案】①②④

【解析】在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1D\perp$ 平面 ABC_1D_1，又 $C_1P\subset$ 平面 ABC_1D_1，故 $A_1D\perp C_1P$，①正确；由 $BD_1\perp$ 平面 AB_1C（即平面 PAC），可得 $\lambda=\frac{1}{3}$，故②正确；将 $\triangle ABD_1$ 和 $\triangle CBD_1$ 展开，可得 $AP+CP$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$，又 $AC=2\sqrt{2}$，故③错误；利用 $BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D，可得当 $\triangle APC$ 为直角三角形时，$\lambda=\frac{2}{3}$，故当 $\triangle APC$ 为钝角三角形时，λ 的取值范围为 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$，④正确.

所以正确判断为①②④.

三、解答题

17. 解：(1) 在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AD}{\sin B}$，即 $\frac{BD}{\sin45^\circ}=\frac{AD}{\sin B}$，

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AD}{\sin(90^\circ-B)}$，即 $\frac{CD}{\sin45^\circ}=\frac{AD}{\cos B}$，

两式相除得$\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{1}{2}$，即 $\sin B=\dfrac{1}{2}\cos B$，

$\therefore \sin^2 B=\dfrac{1}{4}\cos^2 B=\dfrac{1}{4}(1-\sin^2 B)$，即$\sin^2 B=\dfrac{1}{5}$，又 $0<B<\pi$，所以 $\sin B>0$，故 $\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$． ……… 6 分

(2)由$\angle BAC=90°$，得 B 是锐角，于是 $\cos B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin\angle BDA=\sin(B+45°)=\sin B\cos 45°+\cos B\sin 45°=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

在$\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $AB=AD\,\dfrac{\sin\angle BDA}{\sin B}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，于是 $AC=AB\tan B=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{4}=\dfrac{9}{8}$． ………………………………………………………… 12 分

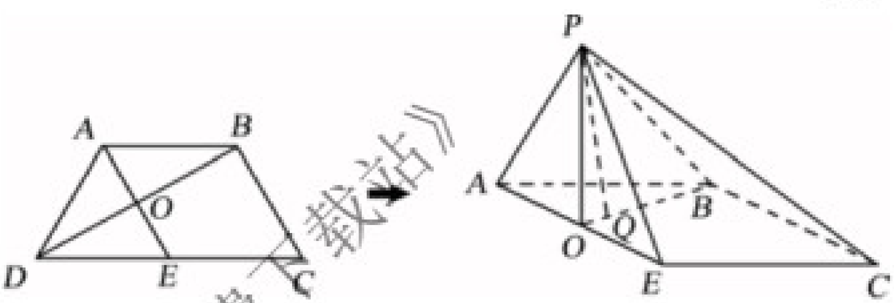
18.(1)证明：在等腰梯形 $ABCD$ 中，连接 BD，交 AE 于点 O，
$\because AB/\!/CE$，$AB=CE$，$\therefore$四边形 $ABCE$ 为平行四边形，$\therefore AE=BC=AD=DE$，

$\therefore\triangle ADE$ 为等边三角形，$\therefore$在等腰梯形 $ABCD$ 中，$\angle C=\angle ADE=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle DAB=\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore$在等腰$\triangle ADB$ 中，$\angle ADB=\angle ABD=\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore\angle DBC=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $BD\perp BC$，$\therefore BD\perp AE$，

翻折后可得：$OP\perp AE$，$OB\perp AE$，$\because OP\subset$平面 POB，$OB\subset$平面 POB，$OP\cap OB=O$，$\therefore AE\perp$平面 POB，
$\because PB\subset$平面 POB，$\therefore AE\perp PB$． ………………………………………………………… 6 分

(2)解：在平面 POB 内作 $PQ\perp OB$，垂足为 Q，
$\because AE\perp$平面 POB，$\therefore AE\perp PQ$，
$\because OB\subset$平面 $ABCE$，$AE\subset$平面 $ABCE$，$AE\cap OB=O$，
$\therefore PQ\perp$平面 $ABCE$，

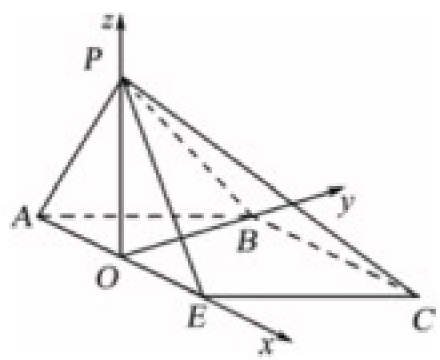


$\therefore$直线 PB 与平面 $ABCE$ 夹角为$\angle PBQ=\dfrac{\pi}{4}$，

又因为 $OP=OB$，$\therefore OP\perp OB$，$\therefore O$、Q 两点重合，即 $OP\perp$平面 $ABCE$，
以 O 为原点，OE 为 x 轴，OB 为 y 轴，OP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，由题意得，各点坐标为

$P\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$E\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$，$C\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\therefore\overrightarrow{PE}=\left(\dfrac{1}{2},0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{EC}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

设平面 PCE 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，



则$\begin{cases}\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{n_1}=0,\\ \overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{cases}$

设 $x=\sqrt{3}$，则 $y=-1$，$z=1$，$\therefore\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},-1,1)$，
由题意得平面 PAE 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$，

设二面角 $A\text{-}EP\text{-}C$ 为α，$|\cos\alpha|=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

易知二面角 $A\text{-}EP\text{-}C$ 为钝角，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$． ………………………………………………………… 12 分

19.解：(1)由条件知$\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{1}{3b^2}=1$，$2a=2\sqrt{2}$，所以 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，$\therefore$椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$． ……… 4 分

(2)设点 A、B 的坐标为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 AB 中点$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$在线段 OM 上

$\therefore x_1+x_2=2(y_1+y_2)$. …………………………………………………………………………… 5 分

又$\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$，$\frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1$，两式相减得$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{2}+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，

易知$x_1-x_2\neq0$，$y_1+y_2\neq0$，所以$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{2(y_1+y_2)}=-1$，即$k_{AB}=-1$. ……………………… 6 分

设AB方程为$y=-x+m$，代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$并整理得$3x^2-4mx+2m^2-2=0$.

由$\Delta=8(3-m^2)>0$解得$m^2<3$，又由$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2m}{3}\in\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\therefore 0<m<\sqrt{3}$. ……………………… 8 分

由韦达定理得$x_1+x_2=\frac{4m}{3}$，$x_1x_2=\frac{2(m^2-1)}{3}$，

故$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(-x_1+m)(-x_2+m)=2x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2=\frac{4(m^2-1)}{3}-\frac{4m^2}{3}+m^2$

$=m^2-\frac{4}{3}$. …………………………………………………………………………………………… 10 分

而$0<m<\sqrt{3}$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的取值范围是$\left(-\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)年龄在[42,47)内的游客人数为150，年龄在[47,52]内的游客人数为100；若采用分层抽样的方法抽取10人，则年龄在[42,47)内的人数为6人，年龄在[47,52]内的人数为4人. ……………… 2 分

可得$P(\xi=3)=\frac{C_4^3C_6^1}{C_{10}^4}=\frac{4}{35}$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)①当投入1艘A型游船时，因客流量总大于1，则$E(Y)=3$(万元). ……………………………… 6 分

②当投入2艘A型游船时，

若$1<X<3$，则$Y=3-0.5=2.5$，此时$P\left(Y=\frac{5}{2}\right)=P(1<X<3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$；

若$X\geqslant3$，则$Y=3\times2=6$，此时$P(Y=6)=P(3\leqslant X\leqslant5)+P(X>5)=\frac{4}{5}$；

此时Y的分布列如下表：

Y	2.5	6
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

此时$E(Y)=2.5\times\frac{1}{5}+6\times\frac{4}{5}=5.3$(万元). ……………………………………………… 8 分

③当投入3艘A型游船时，

若$1<X<3$，则$Y=3-1=2$，此时$P(Y=2)=P(1<X<3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$；

若$3\leqslant X\leqslant5$，则$Y=3\times2-0.5=5.5$，此时$P(Y=5.5)=P(3\leqslant X\leqslant5)=\frac{2}{5}$；

若$X>5$，则$Y=3\times3=9$，此时$P(Y=9)=P(X>5)=\frac{2}{5}$；

此时Y的分布列如下表：

Y	2	5.5	9
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

此时$E(Y)=2\times\frac{1}{5}+5.5\times\frac{2}{5}+9\times\frac{2}{5}=6.2$(万元). ……………………………………

由于 $6.2>5.3>3$，则该游船中心在2020年劳动节当日应投入3艘A型游船使其当日获得的总利润最大. …………………………………………………………………………………………… 12分

21. (1)解：$f(x)$的定义域为R，$f'(x)=(x+2)(e^x+a)$，………………………………………………… 1分

若$a\geqslant 0$，则$e^x+a>0$，所以当$x\in(-\infty,-2)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(-2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(-\infty,-2)$上递减，在$(-2,+\infty)$上递增，

所以$x=-2$为$f(x)$唯一的极小值点，无极大值点，故此时$f(x)$有1个极值点. …………………… 2分

若$a<0$，令$f'(x)=(x+2)(e^x+a)=0$，则$x_1=-2$，$x_2=\ln(-a)$，

当$a<-e^{-2}$时，$x_1<x_2$，则当$x\in(-\infty,x_1)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)<0$；

当$x\in(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

所以x_1,x_2分别为$f(x)$的极大值点和极小值点，故此时$f(x)$有2个极值点. …………………… 3分

当$a=-e^{-2}$时，$x_1=x_2$，$f'(x)=(x+2)(e^x+a)\geqslant 0$且不恒为0，此时$f(x)$在$R$上单调递增，无极值点.

…………………………………………………………………………………………………… 4分

当$-e^{-2}<a<0$时，$x_1>x_2$，

则当$x\in(-\infty,x_2)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(x_2,x_1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(x_1,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

同理，x_1,x_2分别为$f(x)$的极小值点和极大值点，故此时$f(x)$有2个极值点. …………………… 5分

综上，当$a=-e^{-2}$时，$f(x)$无极值点；当$a\geqslant 0$时，$f(x)$有1个极值点；当$a<-e^{-2}$或$-e^{-2}<a<0$时，$f(x)$有2个极值点. …………………………………………………………………………… 6分

(2)证明：若$x_0(x_0\neq -2)$是$f(x)$的一个极值点，由(1)可知$a\in(-\infty,-e^{-2})\cup(-e^{-2},0)$，

又$f(-2)=-e^{-2}-2a>e^{-2}$，所以$a\in(-\infty,-e^{-2})$，且$x_0\neq -2$，………………………………… 7分

则$x_0=\ln(-a)$，所以$f(x_0)=f(\ln(-a))=\dfrac{1}{2}a[\ln^2(-a)+2\ln(-a)-2]$，

令$t=\ln(-a)\in(-2,+\infty)$，则$a=-e^t$，所以$g(t)=f(\ln(-a))=-\dfrac{1}{2}e^t(t^2+2t-2)$，

故$g'(t)=-\dfrac{1}{2}t(t+4)e^t$，………………………………………………………………… 10分

又因为$t\in(-2,+\infty)$，所以$t+4>0$，令$g'(t)=0$，得$t=0$.

当$t\in(-2,0)$时，$g'(t)>0$，$g(t)$单调递增；当$t\in(0,+\infty)$时，$g'(t)<0$，$g(t)$单调递减.

所以$t=0$是$g(t)$唯一的极大值点也是最大值点，即$g(t)\leqslant g(0)=1$，

故$f(\ln(-a))\leqslant 1$，即$f(x_0)\leqslant 1$. ……………………………………………………………… 12分

22. 解：(1)由$\begin{cases}x=3\cos\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha,\end{cases}$消去参数$\alpha$，得$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$，即$C$的普通方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………… 2分

由$\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得$\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=1$化为直角坐标方程为$x-y+1=0$. ………………………… 5分

(2)由(1)知，点$P(-1,0)$在直线l上，可设直线l的参数方程为$\begin{cases}x=-1+t\cos\dfrac{\pi}{4},\\ y=t\sin\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$($t$为参数)，即

$\begin{cases}x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$为参数)，代入$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$并化简，得$2t^2-\sqrt{2}t-8=0$，…………………………… 7分

$\Delta>0$，设A,B两点对应的参数分别为t_1,t_2，则$t_1+t_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$t_1\cdot t_2=-4$，

所以$|PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\dfrac{\sqrt{66}}{2}$. ……………

所以$|PA|+|PB|=\frac{\sqrt{66}}{2}$. …………………………………………………………… 10分

23. 解：(1)当$a=1$时，$f(x)=|x+1|+2|x-1|$，…………………………………………………… 1分

故$f(x)>4$等价于$\begin{cases}x\leqslant -1,\\ -3x+1>4\end{cases}$或$\begin{cases}-1<x\leqslant 1,\\ -x+3>4\end{cases}$或$\begin{cases}x>1,\\ 3x-1>4,\end{cases}$ …………………… 3分

解得$x<-1$或$x>\frac{5}{3}$. …………………………………………………………………… 4分

故不等式$f(x)>4$的解集为$\left\{x\middle|x<-1\text{或}x>\frac{5}{3}\right\}$. …………………………………… 5分

(2)当$x\in[-3,-1]$时，由$f(x)>4-2x$得$|x+a|+2-2x+2x-4>0$，

即$|x+a|>2$，即$a>2-x$或$a<-2-x$对任意的$x\in[-3,-1]$恒成立. …………………… 7分

又$(2-x)_{\max}=5$，$(-2-x)_{\min}=-1$，故a的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$. ………………… 9分

又$a>0$，所以$a>5$，

综上，a的取值范围为$(5,+\infty)$. ……………………………………………………………