保密★启用前

肇庆市2022届高中毕业班第一次统一检测

数学

2021.10

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡指定位置上。
2. 回答选择题时，写出每小题的答案后，用2B铅笔把答题卡上对应的题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

准考证号

姓名

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x|x^2<6x\}$，$B=\{-1,1,5,7\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1\}$　　B．$\{1,7\}$　　C．$\{1,5\}$　　D．$\{7\}$

2．已知 $(2+i)z=1-3i$，则复数 z 的虚部是

A．$-\frac{1}{5}$　　B．$-\frac{7}{5}i$　　C．$\frac{7}{5}$　　D．$-\frac{7}{5}$

3．已知 $\boldsymbol{a}=(-3,m)$，$\boldsymbol{b}=(4,-1)$，若 $\boldsymbol{a}\parallel(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，则实数 m 的值为

A．$\frac{3}{7}$　　B．$-\frac{3}{7}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$-\frac{3}{4}$

4．某种兼职工作虽然以计件的方式计算工资，但是对于同一个人的工资与其工作时间还是存在一定的相关关系，已知小孙的工作时间 x（单位：小时）与工资 y（单位：元）之间的关系如下表：

x	2	4	5	6	8
y	30	40	50	60	70

若 y 与 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=6.5x+a$，预测当工作时间为9小时时，工资大约为

A．75元　　B．76元　　C．77元　　D．78元

5．若 $a=\log_2 9$，$b=\log_3 25$，$c=2^{0.9}$，则

A．$a>b>c$　　B．$c>b>a$　　C．$b>a>c$　　D．$c>a>b$

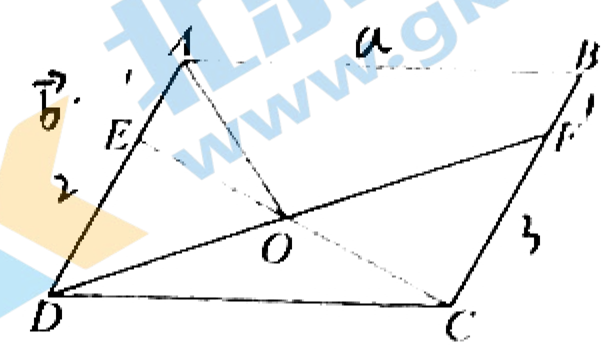
6．甲、乙两人分别从相距315 m的两处同时相向行走，甲第一分钟走20 m，以后每分钟比前1分钟多走2 m；乙第一分钟走30 m，以后每分钟比前1分钟少走1 m．甲、乙开始行走后，经过________分钟相遇．

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

7. 若 $-\sin(\frac{\pi}{4}-x)=2\sin(\frac{\pi}{4}+x)$，则 $\frac{\sin 2x+\sin x\ \cos 2x+\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}}$

A. $\frac{5}{6}$　　　B. $-\frac{5}{6}$　　　C. $\frac{6}{5}$　　　D. $-\frac{6}{5}$

8. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AE=\frac{1}{3}AD$，$BF=\frac{1}{4}BC$，CE 与 DF 交于点 O. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，若 $\overrightarrow{AO}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则 $\lambda+\mu=$



A. $\frac{8}{17}$　　　B. $\frac{19}{17}$　　　C. $\frac{3}{17}$　　　D. $\frac{11}{17}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知一组数据为 $-1,1,5,5,0$，则该组数据的

A. 众数是 5　　　B. 平均数是 2

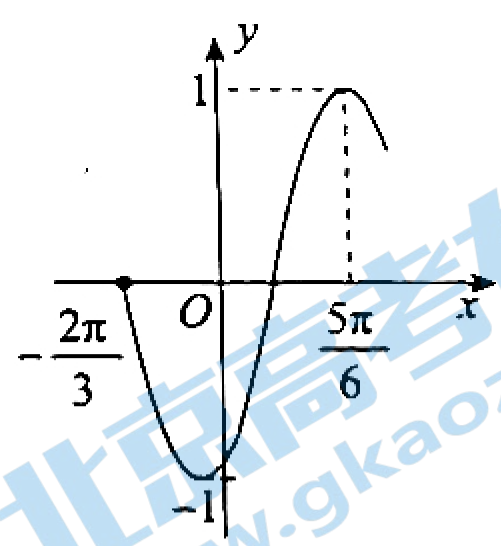
C. 中位数是 5　　　D. 方差是 $\frac{32}{5}$

10. 下列四个命题中，真命题是

A. $\exists x\in\mathbf{R}$，$\log_2 x>x$　　　B. $\forall x\leqslant 0$，$x^2\geqslant x$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，$4^x>0$　　　D. $\exists x\in\mathbf{R}$，$|3x-1|<0$

11. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi<0)$ 的部分图象如图所示，则下列说法正确的是



A. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到一个奇函数的图象

B. $f(x)$ 的图象的一条对称轴可能为直线 $x=-\frac{\pi}{6}$

C. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{17\pi}{6},\frac{23\pi}{6}\right]$ 上单调递增

D. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3},0)$ 对称

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $y=f(x)$ 对任意的 x 满足 $f(x+2)=f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，函数 $g(x)=\begin{cases}-ax, x<0,\\ \log_a(x+1), x\geqslant 0,\end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$，则下列结论正确的有

A. $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数

B. 当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=x$

C. 若 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则 $0<a<1$

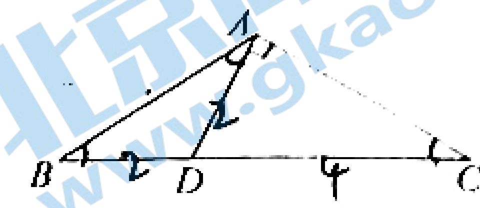
D. 若方程 $f(x)=g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有 4 个不同的实数根，则实数 a 的取值范围是 $(\frac{1}{5},\frac{1}{3})\cup(4,6)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=\ln x+x$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为________.

14. 已知 $x>y$，则 $\frac{x^2-2xy+y^2+4}{x-y}$ 的最小值为________.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\sqrt{3}\sin B$，点 D 在边 BC 上，$AD\perp AC$，$AD=2$，则 AB 的长为________.



16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n=2a_n-1$，那么，$\sum_{i=1}^{7}\frac{a_i}{S_iS_{i+1}}=$________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知函数 $f(x)=\cos\left(x-\frac{2021\pi}{2}\right)\cos x-\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域.

18.（12 分）

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c，且 $a(1+\cos 2C)+2c\cos A\cos C=b$.

（1）求 C；

（2）若 $b=2$，$\sin C=2\sin A$，求 a,c.

19.（12 分）

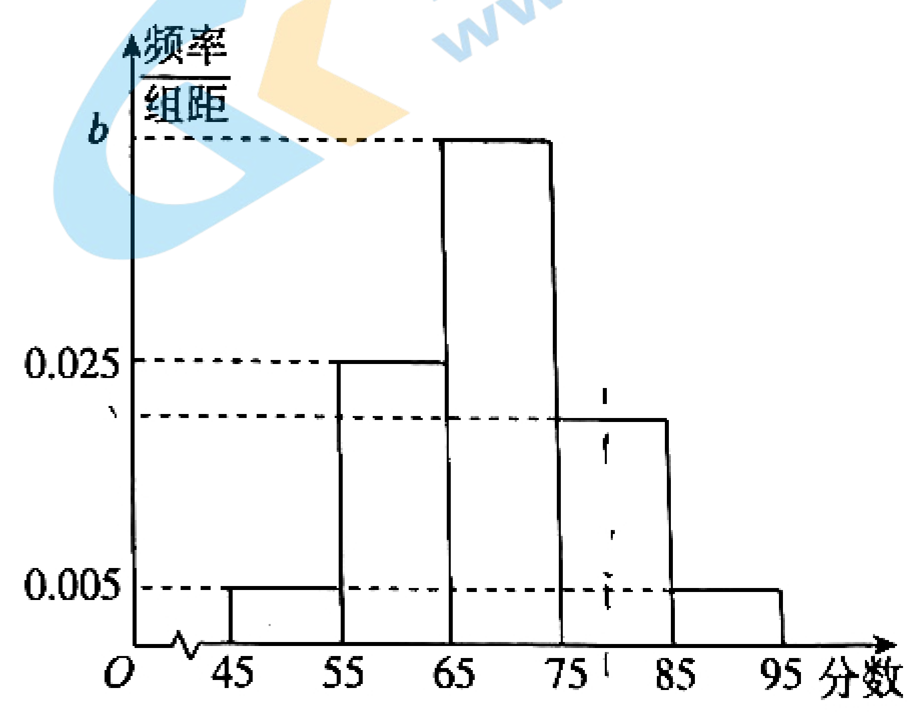
为了迎接新高考，某校举行物理和化学等选科考试，其中，600 名学生化学成绩（满分 100 分）的频率分布直方图如图所示，其中成绩分组区间是：第一组[45,55)，第二组[55,65)，第三组[65,75)，第四组[75,85)，第五组[85,95).

已知图中前三个组的频率依次构成等差数列，第一组和第五组的频率相同.

（1）求 a,b 的值；

（2）估算高分（大于等于 80 分）人数；

（3）估计这 600 名学生化学成绩的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）和中位数（中位数精确到 0.1）.



20.（12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=10$，公差$d>0$，其前四项中删去某一项后（按原来的顺序）恰好是等比数列$\{b_n\}$的前三项.

（1）求d的值；

（2）设$\{a_n\}$中不包含$\{b_n\}$的项按从小到大的顺序构成新数列$\{c_n\}$，记$\{c_n\}$的前n项和为S_n，求S_{100}.

21.（12 分）

已知定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$的函数$f(x)$是奇函数，当$x<0$时$f(x)=\frac{1}{x}-2^x$.

（1）求$f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的解析式；

（2）若不等式$f(2x^2-kx)+f(2x-1)<0$对$\forall k\in(2,4)$恒成立，求实数x的取值范围.

22.（12 分）

已知函数$f(x)=ae^x$.

（1）若$f(x)\geqslant x+a$成立，求a的值；

（2）若$g(x)=f(x)-x$有两个不同的零点x_1,x_2，证明：$x_1x_2>a^2e^2$.

肇庆市 2022 届高中毕业班第一次统一检测
数学参考答案及评分标准

2021.10

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. C 2. D 3. C 4. B 5. A 6. B 7. D 8. B

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. ABD 10. BC 11. ABD 12. ACD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $2x-y-1=0$ 14. 4 15. $2\sqrt{3}$ 16. $\frac{127}{255}$

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解:$f(x)=\cos\left(x-\frac{2021\pi}{2}\right)\cos x-\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\times\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. ………………………………………… 4 分

(1) $f(x)$的最小正周期是 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. ………………………………………… 6 分

(2)当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$,$2x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, ………………………… 8 分

则 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-1,0]$,故 $f(x)$的值域为$[-1,0]$. ………………………… 10 分

18. 解:(1)由题设,$a(1+\cos 2C)+2c\cos A\cos C=b$,

则 $2a\cos^2 C+2c\cos A\cos C=b$, ………………………………………… 1 分

则 $2\cos C(a\cos C+c\cos A)=b$,

所以由正弦定理得 $2\cos C(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=\sin B$, ………………………… 2 分

所以 $2\cos C\sin(A+C)=\sin B$, ………………………………………… 3 分

所以 $2\cos C\sin B=\sin B$. …………………………………………………………………… 4 分

又 $\sin B\neq 0$,所以 $\cos C=\frac{1}{2}$, …………………………………………………………… 5 分

又 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)由 $\sin C=2\sin A$ 及正弦定理,得 $c=2a$, …………………………………………………… 7 分

又 $b=2$,

由余弦定理得 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$,即 $a^2+2^2-(2a)^2=2a\times 2\times\cos\frac{\pi}{3}$,

化简得 $3a^2+2a-4=0$, ……………………………………………………………………………… 9 分

解得 $a=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$(舍去)或 $a=\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$, ………………………………………… 11 分

所以 $c=\frac{-2+2\sqrt{13}}{3}$. …………………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)由题意可知:$\begin{cases}0.005+b=2\times 0.025,\\(0.005+0.025+b+a+0.005)\times 10=1,\end{cases}$ ………………………… 2 分

解得 $a=0.020$,$b=0.045$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)因为高分的频率约为$\left(\frac{a}{2}+0.005\right)\times 10=\left(\frac{0.020}{2}+0.005\right)\times 10=0.15$, ……………… 6 分

所以估算高分(大于等于 80 分)人数为 $600\times 0.15=90$. ……………………………………… 8 分

(3)估计这 600 名学生化学成绩的平均值等于 $50\times 0.005\times 10+60\times 0.025\times 10+70\times 0.045\times 10+80\times 0.02\times 10+90\times 0.005\times 10=69.5$; ……………………………………………………… 10 分

设中位数为 x_0,则 $0.005\times 10+0.025\times 10+0.045\times(x_0-65)=0.5$,解得 $x_0\approx 69.4$,故估计这 600 名学生化学成绩的中位数为 69.4. ……………………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)由 $a_1=10$,则 $a_2=10+d$,$a_3=10+2d$,$a_4=10+3d$. ……………………………… 1 分

依题意,

i)若删除第 1 项,则 $(10+2d)^2=(10+d)(10+3d)$,解得 $d=0$,不符合题意; ……………… 2 分

ii)若删除第 2 项,则 $(10+2d)^2=10(10+3d)$,解得 $d=0$ 或 $-\frac{5}{2}$,不符合题意; …………… 3 分

iii)若删除第 3 项,则 $(10+d)^2=10(10+3d)$,解得 $d=0$(舍去)或 10; ……………………… 4 分

iv)若删除第 4 项,则 $(10+d)^2=10(10+2d)$,解得 $d=0$,不符合题意. …………………… 5 分

综上可知,$d=10$. …………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知,$a_n=10+(n-1)10=10n$. …………………………………………………………… 7 分

数列$\{b_n\}$为以 10 为首项,2 为公比的等比数列,所以 $b_n=10\times 2^{n-1}$. ……………………… 8 分

所以 $a_{107}=1070$,$b_7=640$,$b_8=1280$, ……………………………………………………… 9 分

由此可知$\{a_n\}$的前 107 项中有 7 项被删除,即 $c_{100}=a_{107}$. …………………………………… 10 分

设$\{a_n\}$的前 n 项和为 H_n，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，

则 $S_{100}=H_{107}-T_7=\dfrac{107\times(10+1070)}{2}-\dfrac{10\times(1-2^7)}{1-2}=56\ 510.$ …………………………… 12 分

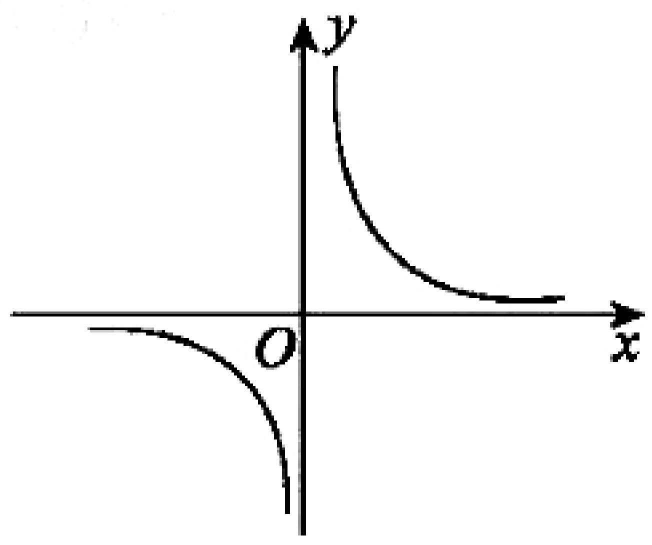
21. 解：(1)当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(x)=-f(-x)=-(\dfrac{1}{-x}-2^{-x})=\dfrac{1}{x}+2^{-x}$，…………………… 2 分

故 $f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的解析式为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-2^x, x<0,\\ \dfrac{1}{x}+2^{-x}, x>0.\end{cases}$ ………………………… 3 分

(2)当 $x<0$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$单调递减，$y=2^x$ 单调递增，故 $f(x)=\dfrac{1}{x}-2^x$ 单调递减. ………………… 4 分

又因为 $f(x)$是奇函数，所以当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}+2^{-x}$单调递减.

故 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-2^x, x<0,\\ \dfrac{1}{x}+2^{-x}, x>0\end{cases}$ 的大致图象如图所示：



…………………… 5 分

不等式 $f(2x^2-kx)+f(2x-1)<0$ 可化为 $f(2x^2-kx)<-f(2x-1)=f(1-2x)$，

则数形结合易知$\begin{cases}2x^2-kx<0,\\1-2x<0,\\2x^2-kx>1-2x,\end{cases}$ 或$\begin{cases}2x^2-kx>0,\\1-2x>0,\\2x^2-kx>1-2x,\end{cases}$ 或$\begin{cases}2x^2-kx<0,\\1-2x>0,\end{cases}$ …………………… 7 分

则①$\begin{cases}0<x<\dfrac{k}{2},\\x>\dfrac{1}{2},\\-xk+2x^2+2x-1>0,\end{cases}$ 或②$\begin{cases}x<0 \text{ 或 } x>\dfrac{k}{2},\\x<\dfrac{1}{2},\\-xk+2x^2+2x-1>0,\end{cases}$ 或③$\begin{cases}0<x<\dfrac{k}{2},\\x<\dfrac{1}{2},\end{cases}$

对于①，有$\begin{cases}\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{k}{2},\\g(k)=-xk+2x^2+2x-1,\\g(4)>0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{k}{2},\\x>\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ $\forall k\in(2,4)$没有解集；……………… 9 分

对于②，有$\begin{cases}x<0,\\g(k)=-xk+2x^2+2x-1,\\g(2)>0,\end{cases}$ 解得 $x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$； …………………………… 10 分

对于③，有 $0<x<\dfrac{1}{2}$；……………………………………………………………… 11 分

综上，实数 x 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})\cup(0,\frac{1}{2})$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f(x)\geqslant x+a$，则 $f(x)-x\geqslant a$，设 $k(x)=f(x)-x$，

$k(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$k'(x)=ae^x-1$. ………………………………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$k'(x)<0$ 恒成立，$k(x)$ 单调递减，因为 $k(0)=a$，

所以当 $x>0$ 时，$k(x)<a$，即 $f(x)<x+a$ 不符合题意，舍去；………………………………………… 2 分

当 $a>0$，$x\in(-\infty,-\ln a)$ 时，$k'(x)<0$，$k(x)$ 单调递减；$x\in(-\ln a,+\infty)$ 时，

$k'(x)>0$，$k(x)$ 单调递增，所以 $x=-\ln a$ 时，$k(x)$ 取得极小值也是最小值，

所以 $k(-\ln a)=1+\ln a\geqslant a$. ………………………………………… 3 分

令 $m(a)=1+\ln a-a$，则 $m'(a)=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}$，所以 $a\in(0,1)$ 时，$m'(a)>0$，$m(a)$ 单调递增；

$a\in(1,+\infty)$ 时，$m'(a)<0$，$m(a)$ 单调递减，所以 $a=1$ 时，$m(a)$ 取得极大值也是最大值，所以

$m(a)\leqslant m(1)=0$，$1+\ln a\leqslant a$. ………………………………………… 5 分

综上，若 $k(x)\geqslant a$ 即 $f(x)\geqslant x+a$，$a=1$. ………………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 知，若 x_1,x_2 是 $g(x)$ 的两个不同的零点，则 $a>0$，$x_1>0$，$x_2>0$，x_1,x_2 是 $g(x)$ 的两个不同的零点，也是方程 $\frac{x}{e^x}=a$ 的两个不同的根.

要证 $x_1x_2>a^2e^2$，只需证 $\frac{x_1}{a}\cdot\frac{x_2}{a}>e^2$，只需证 $e^{x_1+x_2}>e^2$，即证 $x_1+x_2>2$. ………………… 8 分

令 $h(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，所以 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

$x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减. ………………………………………… 9 分

不妨设 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<1<x_2$，$2-x_1>1$. 令 $\varphi(x)=h(x)-h(2-x)=\frac{x}{e^x}-\frac{2-x}{e^{2-x}}$，$x>0$，

则 $\varphi'(x)=(1-x)\frac{e^2-e^{2x}}{e^{x+2}}$，所以 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，又 $\varphi(1)=0$，所以 $0<x<1$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $h(x_1)=h(x_2)<h(2-x_1)$. ………………………………………… 11 分

因为 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)$ 单调递减，所以 $x_2>2-x_1$，即 $x_1+x_2>2$.

故原结论正确，即 $x_1x_2>a^2e^2$. ………………………………………… 12 分