北京二中 2022—2023 学年度第二学期高三年级开学测试试卷

数学

命题人：王雪梅　审核人：王逸飞　得分：________

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．选出符合题目要求的一项）

1．设集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{x|\log_3 x<1\}$，则 $A\cap \complement_R B=$（　）．

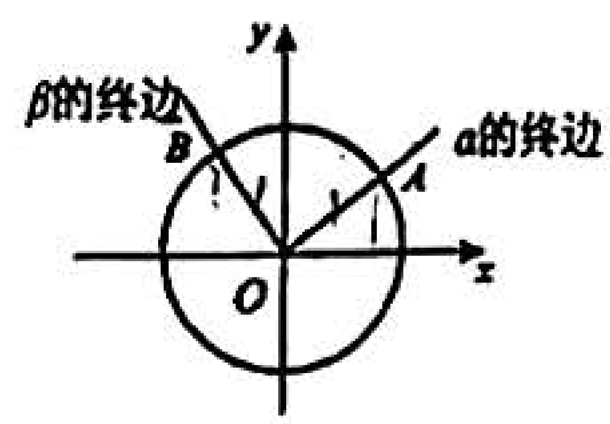
A．$\{0,1,2,3\}$　　B．$\{0,3\}$　　C．$\{0\}$　　D．$\{1,2\}$

2．在复平面内，复数 $z=\dfrac{|\sqrt{3}-\mathrm{i}|}{1+\mathrm{i}}$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 对应的点位于（　）．

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．如图，角 α,β 均以 Ox 为始边，终边与单位圆 O 分别交于 A,B，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$（　）．

A．$\sin(\alpha-\beta)$　　B．$\sin(\alpha+\beta)$　　C．$\cos(\alpha-\beta)$　　D．$\cos(\alpha+\beta)$



4．已知 α，β 表示两个不同的平面，l 表示一条直线，且 $\alpha\perp\beta$，

则 $l\perp\beta$ 是 $l\,/\!/\,\alpha$ 的（　）．

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要

5．在△ABC 中角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 A,B,C 成等差数列，$a+c=2$，则 b 的取值范围是（　）．

A．$[1,2)$　　B．$(0,2]$　　C．$[1,\sqrt{3}]$　　D．$[1,+\infty)$

6．函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})(ax^2+bx+c)$ 是偶函数的充分必要条件是（　）．

A．$b=0$　　B．$ac=0$

C．$a=0$ 且 $c=0$　　D．$a=0$，$c=0$ 且 $b\neq0$

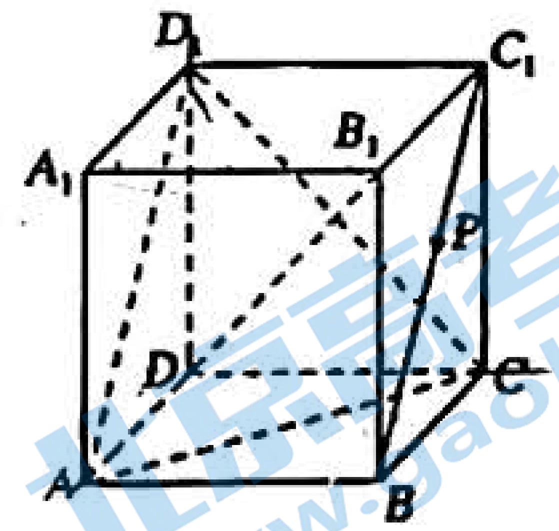
7．如图，某建筑物是数学与建筑的完美结合．该建筑物外形弧线的一段近似看成双曲线下支的一部分，且此双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的下焦点到渐近线的距离为 3，离心率为 2，则该双曲线的标准方程为（　）．

A．$\dfrac{y^2}{3}-x^2=1$　　B．$\dfrac{y^2}{27}-\dfrac{x^2}{9}=1$　　C．$\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{3}=1$　　D．$\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{x^2}{9}=1$

8．对圆 $x^2+y^2=1$ 上任意一点 $P(x,y)$，若 $|3x-4y+a|-|3x-4y-9|$ 的值都与 x,y 无关，则实数 a 的取值范围是（　）．

A．$a\le-5$　　B．$-5\le a\le5$　　C．$a\le-5$ 或 $a\ge5$　　D．$a\ge5$

9. 如图所示，点 P 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的面对角线 BC_1 上运动，得出下列结论：



① 三棱锥 $A\text{-}D_1PC$ 的体积不变

② A_1P 与平面 ACD_1 所成的角大小不变

③ $DP\perp BC_1$

④ $DB_1\perp A_1P$

其中正确的结论是（　）.

A. ①④　　B. ①②③　　C. ①③④　　D. ①②④

10. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：$\exists A$，$B\in R$，$AB\neq 0$，使得对于 $\forall n\in N^*$，都有 $a_{n+2}=Aa_{n+1}+Ba_n$，则称 $\{a_n\}$ 具有"三项相关性"下列说法正确的有（　）

① 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{a_n\}$ 具有"三项相关性"

② 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $\{a_n\}$ 具有"三项相关性"

③ 若数列 $\{a_n\}$ 是周期数列，则 $\{a_n\}$ 具有"三项相关性"

④ 若数列 $\{a_n\}$ 具有正项"三项相关性"，且正数A；B 满足 $A+1=B$，$a_1+a_2=B$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=B^n$，$\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n，T_n，则对 $\forall n\in N^*$，$S_n<T_n$ 恒成立.

A. ①③④　　B. ①②④　　C. ①②③④　　D. ①②

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 二项式 $\left(\sqrt{2}x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式中的常数项是______.

12. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4=10$，且 a_3,a_6,a_{10} 成等比数列，则数列 $\{a_n\}$ 前 20 项和为______.

13. 有歌唱道："江西是个好地方，山清水秀好风光."现有甲、乙两位游客慕名来到江西旅游，准备从庐山、三清山、龙虎山和明月山四个著名旅游景点中随机选择一个景点游玩，甲、乙的选择相互独立。记事件 A 为"甲和乙至少一人选择庐山"，事件 B 为"甲和乙选择的景点不同"，则 $P(B|A)=$______.

14. 在边长为 12 的正三角形 ABC 中，E 为 BC 的中点，F 在线段 AC 上且 $AF=\dfrac{1}{2}FC$.若 AE 与 BF 交于 M，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=$______.

15. 对于函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, x\in[0,2]\\ \dfrac{1}{2}f(x-2), x\in(2,+\infty)\end{cases}$，下列 4 个结论正确的是______.

① 任取 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leq 2$；

② $f(x)=2^kf(x+2k)(k\in N^*)$，对一切 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立；

③ 若关于 x 的方程 $f(x)=m(m<0)$ 有且只有两个不同的实根 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=3$；

④ 函数 $y=f(x)-\ln(x-1)$ 有 5 个零点

三、解答题（共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

（本小题满分 12 分）

16. 已知函数 $f(x)=A\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$.

(Ⅰ)求 A 的值和函数 $f(x)$ 的最小正周期：

(Ⅱ)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，若 $n\le f(x)\le m$ 恒成立，求 $m-n$ 的取值范围.

（本小题满分 15 分）

17. 学校组织 A,B,C,D,E 五位同学参加某大学的测试活动，现有甲、乙两种不同的测试方案，每位同学随机选择其中的一种方案进行测试，选择甲方案测试合格的概率为 $\frac{2}{3}$，选择乙方案测试合格的概率为 $\frac{1}{2}$，且每位同学测试的结果互不影响.

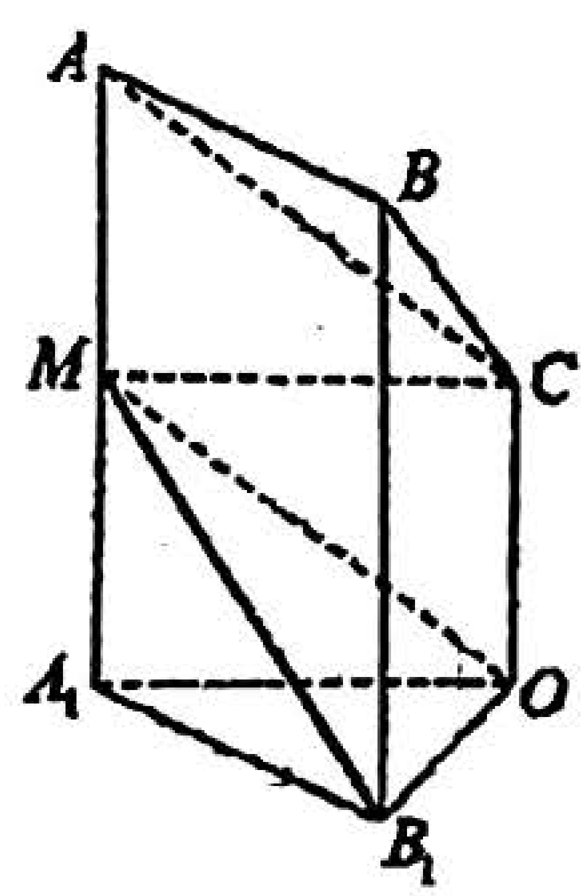
(Ⅰ)若 A,B,C 三位同学选择甲方案，D,E 两位同学选择乙方案，求 5 位同学全部测试合格的概率；

(Ⅱ)若 5 位同学全选择甲方案，将测试合格的同学的人数记为 X，求 X 的分布列及其均值;

(Ⅲ)若测试合格的人数的均值不小于 3，直接写出选择甲方案进行测试的同学的可能人数.

（本小题满分 14 分）

18. 如图在几何体 $ABC-A_1B_1O$ 中，$\triangle ABC$ 是等边三角形，直线 $OC\perp$ 平面 A_1B_1O，平面 $AA_1OC\perp$ 平面 BB_1OC，$AA_1 // BB_1 // OC$，$AA_1=BB_1=2OC$.



(Ⅰ)证明：$OA_1\perp OB_1$；

(Ⅱ)在“①$OM //$ 平面 ABC；②$CM\perp$ 平面 BB_1OC”两个条件中任选一个，补充到下面问题中，并解答.

点 M 为线段 AA_1 上的一点，满足________，直线 OM 与平面 A_1B_1O 所成角的大小为 30°，求平面 ABC 与平面 MB_1O 的夹角的余弦值.

（请在答题纸上注明你选择的条件序号）

（本小题满分 15 分）

19. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的短轴长为$2\sqrt{2}$，直线$l:x=\frac{a^2}{c}$与$x$轴交于点$A$，椭圆的右焦点为$F$，$|OF|=2|FA|$，过点$A$的直线与椭圆交于$P$，$Q$两点.

(Ⅰ)求椭圆的方程及离心率；

(Ⅱ)若原点O在以PQ为直径的圆上，求直线PQ的方程；

(Ⅲ)过点P且垂直于x轴的直线交椭圆于另一点M，证明：Q，F，M三点共线，并直接写出$\triangle AMQ$面积的最大值.

（本小题满分 15 分）

20. 已知函数$f(x)=\sin x+e^x+a\ln(x+1)$.

(Ⅰ)直接写出$f(x)$在$x=0$处的切线方程；

(Ⅱ)当$a=-2$时，求函数$f(x)$在$(-1,0]$上的最小值；

(Ⅲ)若$f(x)\geq 1$恒成立，求实数a的取值集合.

（本小题满分 14 分）

21. 定义圈数列X：$x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geq 3)$；$X$为一个非负整数数列，且规定$x_n$的下一项为$x_1$，记$x_0=x_n,x_{n+1}=x_1$，这样$x_k$的相邻两项可以统一表示为$x_{k-1},x_{k+1},k=1,2,3,\ldots,n$（$x_1$的相邻两项为$x_0,x_2$，即$x_n,x_2$；$x_n$的相邻两项为$x_{n-1},x_{n+1}$）.定义圈数列$X$做了一次$P$运算：选取一项$x_k\geq 2$，将圈数列$X$变为圈数列$P(X)$：$x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}+1,x_k-2,x_{k+1}+1\cdots$，即将$x_k$减2，相邻两项各加1，其余项不变.并记下标$k$输出了一次.记$X$进行过$i$次$P$运算后数列为$X_i$：$x_{1,i},x_{2,i},\cdots,x_{n,i}$（规定$X_0=X$）

(Ⅰ)若X：4，0，0，直接写出一组可能的X_1,X_2,X_3,X_4；

(Ⅱ)若进行q次P运算后$(q>0)$，有$X=X_q$，此时下标k输出的总次数为a_k，记$a_0=a_n,a_{n+1}=a_1$直接写出一组非负实数α,β，使得$\alpha\cdot a_{k+1}+\beta\cdot a_{k-1}=a_k$对任意$k=1,2,3,\ldots,n$，都成立，并证明$a_k\geq 1$；

(Ⅲ)若X：$n+1$，0，0，…，0，证明：存在M，当正整数$k>M$时，X_k中至少有一半的项非零.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。