四省八校双教研联盟高考联考试卷

理 科 数 学

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给的四个选项中，只有一项符合）

1、集合 $A=\{x|\dfrac{2}{x}>1\}$，$B=\{x|x^2+x-2>0\}$，则 $A\bigcap C_RB=$（　　）

A、$(0,2)$　　　B、$(0,1]$　　　C、$(0,1)$　　　D、$[0,2]$

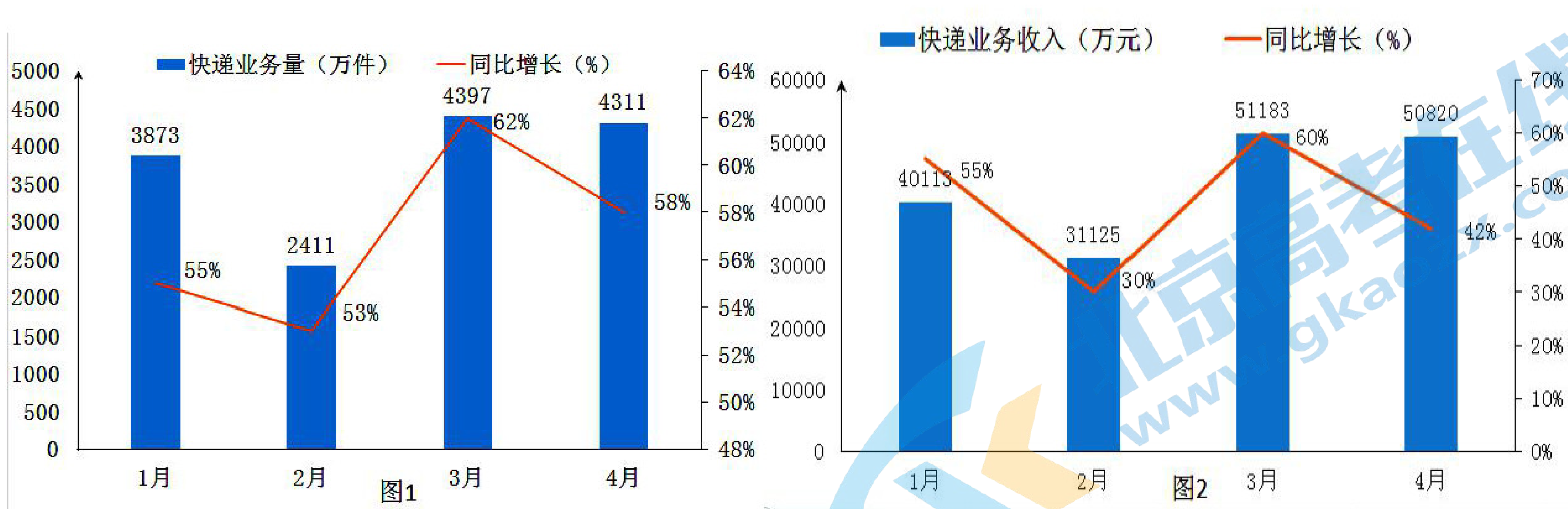
2、已知 $(2+i)\ y=x+yi$，$x,y\in R$，则 $\left|\dfrac{x}{y}+i\right|=$（　　）

A、$\sqrt{2}$　　　B、$\sqrt{3}$　　　C、2　　　D、$\sqrt{5}$

3、在公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中满足 $4a_3+a_{11}-3a_5=10$，则 $\dfrac{1}{5}a_4=$（　　）

A、-1　　　B、0　　　C、1　　　D、2

4、如图（1）为某省 2016 年快递业务量统计表，图（2）某省 2016 年快递业务收入统计表，对统计图下列理解错误的是（　　）



A、2016 年 1~4 月业务量最高 3 月最低 2 月，差值接近 2000 万件

B、2016 年 1~4 月业务量同比增长率均超过 50%，在 3 月最高，和春节蛰伏后网购迎来喷涨有关

C、从两图中看，增量与增长速度并不完全一致，但业务量与业务的收入变化高度一致

D、从 1~4 月来看，业务量与业务收入量有波动，但整体保持高速增长

5、m，n 是两不同直线，α 是平面，$n\perp\alpha$，则 $m/\!/\alpha$ 是 $m\perp n$ 的（　　）

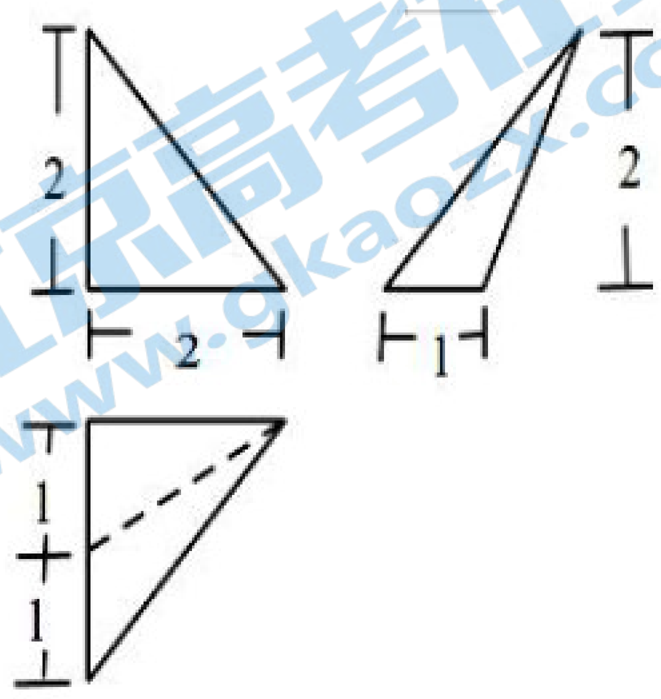
A、充分不必要条件　　　B、必要不充分条件

C、充分必要条件　　　D、既不充分有不必要条件

6、现有 3 名男医生 3 名女医生组成两个组，去支援两个山区，每组至少两人，女医生不能全在同一组，则不同的派遣方法有（　　）

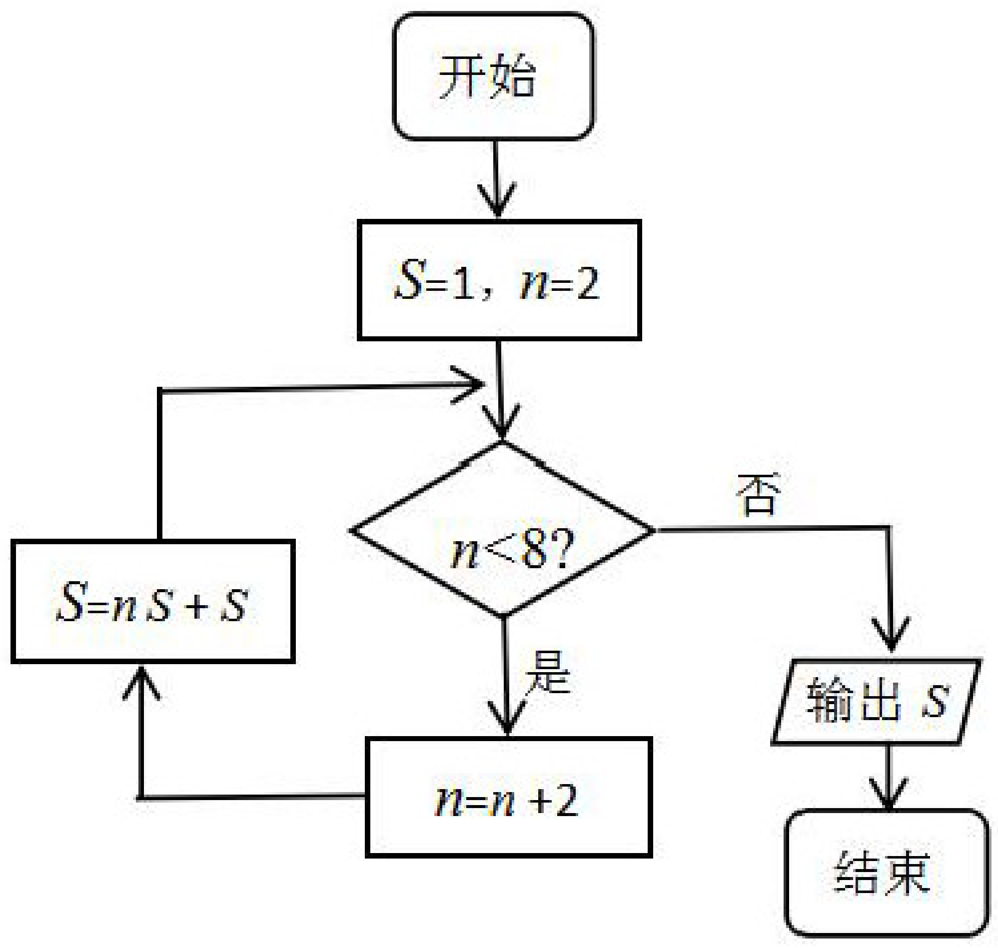
A、36　　　　B、54　　　　C、24　　　　D、60

7、某几何体三视图如右则该几何体体积为（　　）



A、$\dfrac{1}{3}$　　　　B、$\dfrac{2}{3}$　　　　C、1　　　　D、$\dfrac{4}{3}$

8、如图为程序框图，则输出结果为（　　　）



A、105　　　　B、315　　　　C、35　　　　D、5

9、设 x，y 满足 $\begin{cases} 2x+y-4 \geq 0 \\ x-y+2 \geq 0 \\ 3x-y-3 \leq 0 \end{cases}$，则 $z=\dfrac{2y}{x+1}$ 的范围（　　）

A、$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{7}\right]$　　　　B、$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{18}{7}\right]$

C、$\left[1,\dfrac{16}{5}\right]$　　　　D、$\left[1,\dfrac{8}{5}\right]$

10、已知在 $Rt\triangle ABC$ 中，$A=\dfrac{\pi}{2}$，$AB=3$，$AC=4$，P 为 BC 上任意一点(含 B，C)，以 P 为圆心，1 为半径作圆，Q 为圆上任意一点，设 $\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x+y$ 的最大值为（　　）

A、$\dfrac{13}{12}$　　　　B、$\dfrac{15}{12}$　　　　C、$\dfrac{17}{12}$　　　　D、$\dfrac{19}{12}$

11、已知椭圆与双曲线有公共焦点，F_1，F_2，F_1 为左焦点，F_2 为右焦点，P 点为它们在第一象限的一个交点，且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{4}$，设 e_1，e_2 分别为椭圆双曲线离心率，则 $\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2}$ 的最大值为（　　　）

A、$\sqrt{2}$　　　　B、$2\sqrt{2}$　　　　C、$3\sqrt{2}$　　　　D、$4\sqrt{2}$

12、$f(x)=\dfrac{3x^2-6x}{\cos(\dfrac{\pi}{3}x-\dfrac{\pi}{3})}+m(\dfrac{e^{2x}}{e^2}+\dfrac{e^2}{e^{2x}})$ 有唯一零点，则 $m=$（　）

A、3　　　　B、2　　　　C、$\dfrac{3}{2}$　　　　D、$\dfrac{1}{2}$

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13、设随机变量 $X \sim B(6, \frac{1}{3})$，则 $P(2 < X \le 4) =$________

14、$(2x^2-1)\left(x-\frac{2}{x}\right)^6$ 展开式中 x^4 的系数为________

15、$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}(1+\sqrt{3}\tan x)$ 的最小正周期为________

16、已知球内接三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$\triangle ABC$ 为 等边三角形，且边长为 $\sqrt{3}$，又球的体积为 $\dfrac{32\pi}{3}$，则直线 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值为__________

三、解答题（共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.）

17、（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_{n+1}=\dfrac{4S_n-1}{2n-1}$，$a_1=1$ 且 $n\in N^*$.

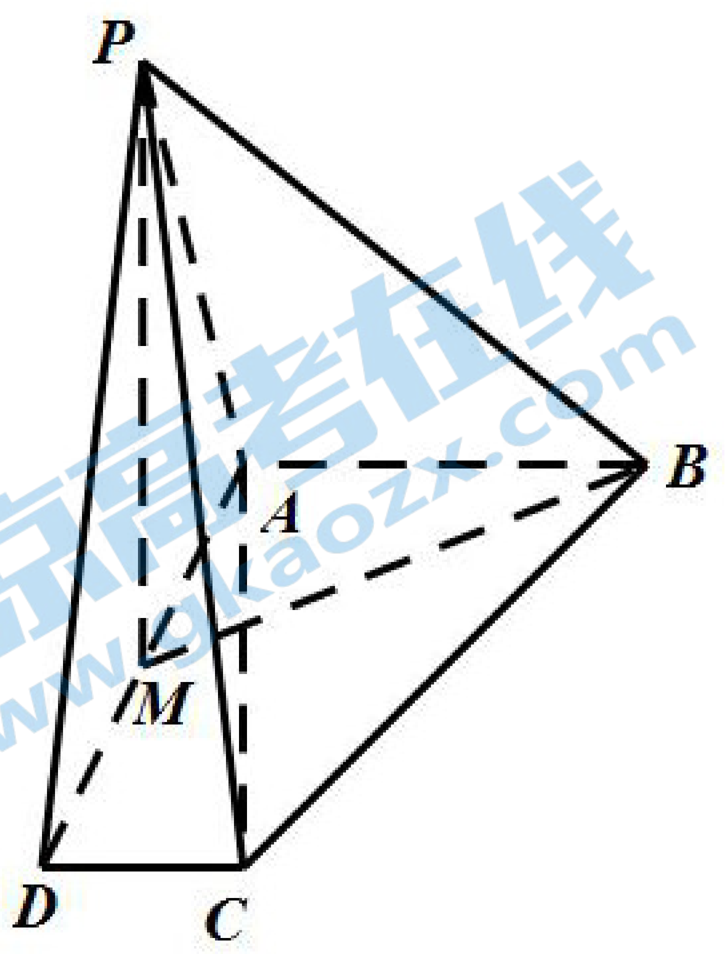
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $a_nb_n=\dfrac{1}{\sqrt{S_n}}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\dfrac{3}{2}(n\in N^*)$.

18、（12 分）四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB // CD$，$AB\perp AD$，M 为 AD 中点，$PA=PD=\sqrt{5}$，$AD=AB=2CD=2$.

(1) 求证：平面 $PMB\perp$ 平面 PAC；

(2) 求二面角 $A\text{-}PC\text{-}D$ 的余弦值.



19、（12 分）越接近高考学生焦虑程度越强，四个高三学生中大约有一个有焦虑症，经有关机构调查，得出距离高考周数与焦虑程度对应的正常值变化情况如下表

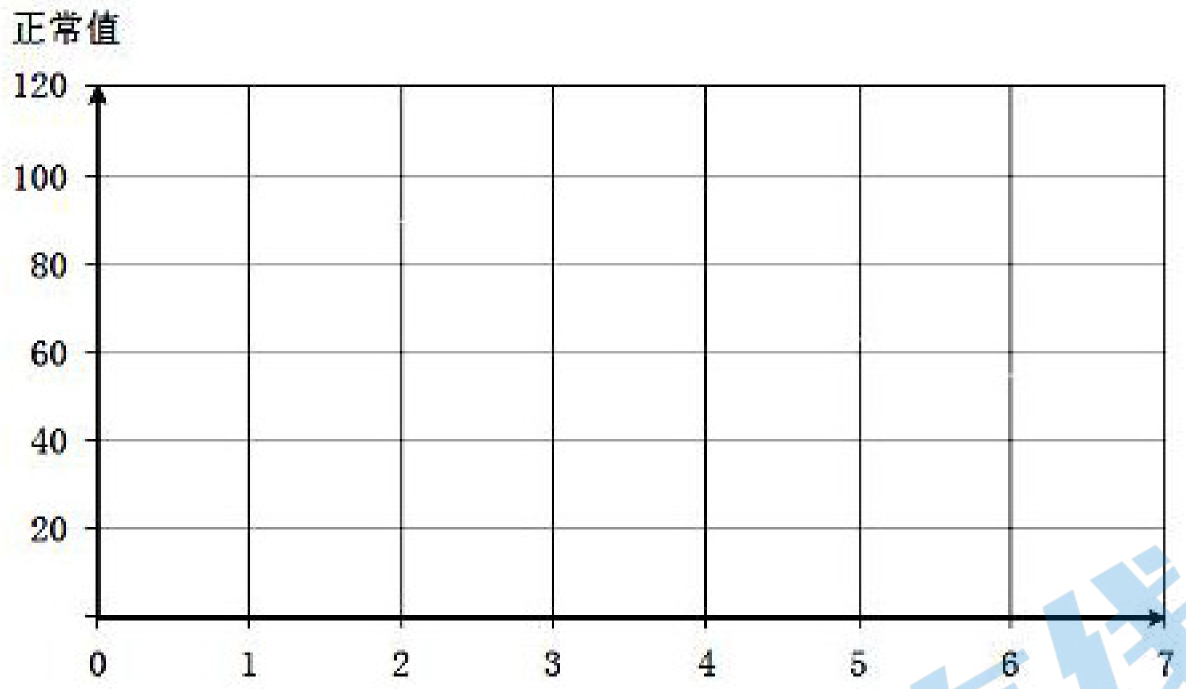
周数 x	6	5	4	3	2	1
正常值 y	55	63	72	80	90	99

其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=1452$，$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=91$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$

(1) 作出散点图；

(2) 根据上表数据用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y=\hat{b}x+\hat{a}$（精确到 0.01）；

(3) 根据经验观测值为正常值的 0.85~1.06 为正常，若 1.06~1.12 为轻度焦虑，1.12~1.20 为中度焦虑，1.20 及以上为重度焦虑。若为中度焦虑及以上，则要进行心理疏导。若一个学生在距高考第二周时观测值为 103，则该学生是否需要进行心理疏导？



20、（12 分）已知定点 $R(1，0)$，圆 S：$x^2+y^2+2x-15=0$，过 R 点的直线 L_1 交圆于 M，N 两点,过 R 点作直线 $L_2 // SN$ 交 SM 于 Q 点.

(1) 求 Q 点的轨迹方程;

(2) 若 A，B 为 Q 的轨迹与 x 轴的左右交点，$P(x_0，y_0)$（$y_0 \neq 0$）为该轨迹上任一动点，设直线 AP，BP 分别交直线 l：$x=6$ 于点 M，N，判断以 MN 为直径的圆是否过定点。如圆过定点，则求出该定点;如不是，说明理由.

21、（12 分）已知函数 $f(x)=ax-ax\ln x-1$（$a\in R$，$a\neq 0$）

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x>1$ 时，求证：$\dfrac{1}{x-1}>e^{\frac{1}{x}}-1$。

选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答.

22、[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xoy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=-2+4t \end{cases}$（$t$ 为参数）。以坐标原点为极点，以 x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

(1) 求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若 C_1，C_2 交于 A，B 两点，P 点极坐标为 $\left(2\sqrt{2},-\dfrac{3\pi}{4}\right)$，求 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}$ 的值.

23、[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=|2x-1|-|x+2|$，$g(x)=|x-a|-|x+a+1|$.

(1) 解不等式 $f(x)>4$;

(2) 若对 $\forall x_1\in R$，$\exists x_2\in R$，使得 $f(x_2)=g(x_1)$.求实数 a 的范围.

2019—2020 年度“四省八校联盟”高三联考·理数

参考答案、提示及评分细则

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	A	D	B	D	C	C	A	C	B	C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 5　　14. 5　　15. $\frac{100}{101}$　　16. $[4\sqrt{2}-\sqrt{17},4\sqrt{2}+\sqrt{17}]$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解析：(1) 因为 $\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}=-3$ ………………………… 6 分

(2) 由(1)知 C 为钝角，所以 C 为最大角

因为 $\tan A=\frac{4}{3}$，所以 $\sin A=\frac{4}{5}$，又 $\tan C=-3$，所以 $\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ………………………… 9 分

由正弦定理得：$\frac{5}{\frac{4}{5}}=\frac{c}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}$，所以 $c=\frac{15\sqrt{10}}{8}$ 为最大边. ………………………… 12 分

18. 解析：(1) 2×2 列联表：

	年龄低于 50 岁的人数	年龄不低于 50 岁的人数	合计
支持	40	20	60
不支持	20	20	40
合计	60	40	100

………………………………………………………… 2 分

$K^2=\frac{100\times(40\times20-20\times20)^2}{60\times40\times60\times40}\approx2.778<3.841$ ………………………… 5 分

所以没有 95% 的把握认为以 50 岁为分界点对“新农村建设”政策的支持度有差异. ………… 6 分

(2) 由题可知，ξ 可取 0，1，2，3，4，且观众支持“新农村建设”的概率为 $\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$，因此 $\xi\sim B(4,\frac{3}{5})$

$P(\xi=0)=C_4^0(\frac{2}{5})^4=\frac{16}{625}$，$P(\xi=1)=C_4^1(\frac{3}{5})^1(\frac{2}{5})^3=\frac{96}{625}$

$P(\xi=2)=C_4^2(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^2=\frac{216}{625}$，$P(\xi=3)=C_4^3(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^1=\frac{216}{625}$

$P(\xi=4)=C_4^4(\frac{3}{5})^4=\frac{81}{625}$ ………………………………………………………………………… 9 分

ξ 分布列如下：

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

……………………………………………………………………………………………………… 10 分

所以 ξ 的数学期望 $E(\xi)=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$ ………………………………………………………… 12 分

19. 解析：(1) 证明：因为 $\angle BAP=90^\circ$，则 $PA\perp AB$，又侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，

面 $PAB\cap$ 面 $ABCD=AB$，$PA\subset$ 面 PAB，则 $PA\perp$ 面 $ABCD$ ………………………………… 2 分

$BD\subset$ 面 $ABCD$，则 $PA\perp BD$ 又因为 $\angle BCD=120^\circ$，$ABCD$ 为平行四边形，

则 $\angle ABC=60^\circ$，又 $AB=AC$ 则 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则 $ABCD$ 为菱形，则 $BD\perp AC$ …………… 4 分

又 $PA\cap AC=A$，则 $BD\perp$ 面 PAC，$BD\subset$ 面 PBD，则面 $PAC\perp$ 面 PBD …………………… 6 分

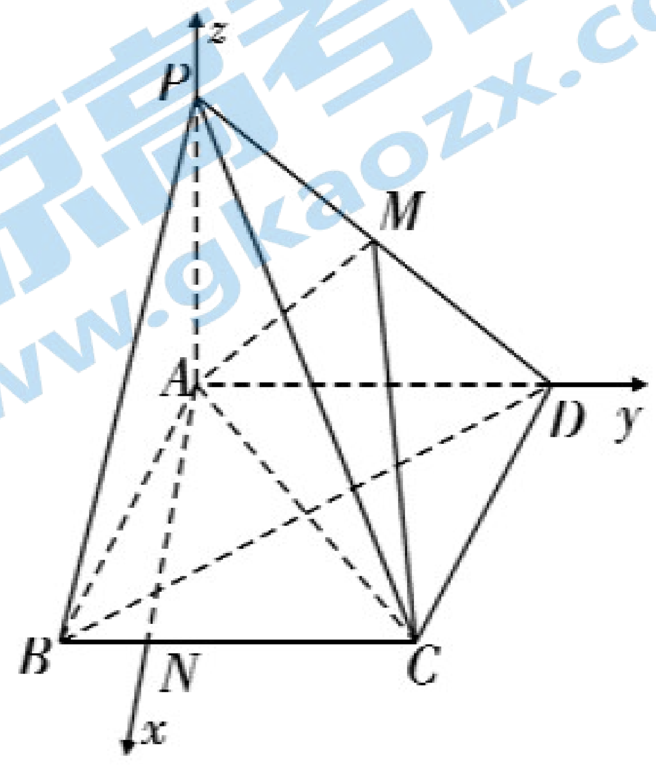
(2) 由平面 AMC 把四面体 $P-ACD$ 分成体积相等的两部分，则 M 为 PD 中点，

取 BC 中点 N，连接 AN，由 $AB=AC$ 知 $AN\perp BC$

由(1)知 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，以 AN，AD，AP 为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间

直角坐标系，则 $B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，则中点

M 为 $(0,1,1)$ ………………………………………………………………… 8 分



设面 MPC 的法向量为 $\vec{v_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PM}\cdot\vec{v_1}=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{v_1}=0\end{cases}$，

可取 $\vec{v_1}=(\frac{\sqrt{3}}{3},1,1)$ ………………………………………………………………………… 9 分

设面 MAC 的法向量为 $\vec{v_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v_2}=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{v_2}=0\end{cases}$，

可取 $\vec{v_2}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$ …………………………………………………………………… 10 分

设二面角 $P-MC-A$ 的大小为 θ，则 $|\cos\theta|=\left|\frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|}\right|=\frac{1}{7}$， ………………………… 11 分

则二面角 $P-MC-A$ 的正弦值为$\frac{4\sqrt{3}}{7}$. …………………………………………………………… 12 分

20. 解析:(1)由题意得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ \frac{12}{\sqrt{7}+5}=b\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$,解得 $a=4,b=2\sqrt{3},c=2$,故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ………… 4 分

(2)设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,直线 PQ 的方程设为 $x=my+3$,代入椭圆方程 $3x^2+4y^2=48$,

$\therefore (3m^2+4)y^2+18my-21=0$

$\therefore y_1+y_2=-\frac{18m}{3m^2+4},y_1y_2=-\frac{21}{3m^2+4}$, ………………………………………………………… 6 分

由 A,P,M 三点共线可知,$\frac{y_M}{\frac{16}{3}+4}=\frac{y_1}{x_1+4}$

$\therefore y_M=\frac{28y_1}{3(x_1+4)}$

同理可得,$y_N=\frac{28y_2}{3(x_2+4)}$ ……………………………………………………………………………… 8 分

$\therefore k_1k_2=\frac{y_M}{\frac{16}{3}-3}\cdot\frac{y_N}{\frac{16}{3}-3}=\frac{9y_My_N}{49}=\frac{16y_1y_2}{(x_1+4)(x_2+4)}$ ………………………………………… 9 分

$\because (x_1+4)(x_2+4)=(my_1+7)(my_2+7)=m^2y_1y_2+7m(y_1+y_2)+49$

$\therefore k_1k_2=\frac{16y_1y_2}{m^2y_1y_2+7m(y_1+y_2)+49}=-\frac{12}{7}$ ……………………………………………… 12 分

21. 解析:(1)由题意,$f'(x)=x^2-ax$,当 $a=2$ 时,$f(3)=0,f'(x)=x^2-2x$,所以 $f'(3)=3$, …………… 2 分

因此,曲线 $y=f(x)$ 在点$(3,f(3))$处的切线方程是 $y=3(x-3)$,

即 $3x-y-9=0$. ……………………………………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$,

所以 $g'(x)=f'(x)+\cos x-(x-a)\sin x-\cos x$

$=x(x-a)-(x-a)\sin x$

$=(x-a)(x-\sin x)$ …………………………………………………………………………………… 6 分

令 $h(x)=x-\sin x$,则 $h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,

所以 $h(x)$ 在 **R** 上单调递增.

因为 $h(0)=0$,所以当 $x>0,h(x)>0$;当 $x<0,h(x)<0$. …………………………………………… 7 分

①当 $a<0$ 时,$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$,

当 $x\in(-\infty,a)$时,$x-a<0,g'(x)>0,g(x)$单调递增;

当 $x\in(a,0)$ 时,$x-a>0$,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;

当 $x\in(0,+\infty)$时,$x-a>0$,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增.

所以,当 $x=a$ 时,$g(x)$取到极大值,极大值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$,

当 $x=0$ 时,$g(x)$取到极小值,极小值是 $g(0)=-a$. ······································ 8 分

②当 $a=0$ 时,$g'(x)=x(x-\sin x)$,

当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$g'(x)\geq 0$,$g(x)$单调递增;

所以,$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增,无极大值也无极小值. ································· 9 分

③当 $a>0$ 时,$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$,

当 $x\in(-\infty,0)$时,$x-a<0$,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;

当 $x\in(0,a)$时,$x-a<0$,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;

当 $x\in(a,+\infty)$时,$x-a>0$,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增.

所以,当 $x=0$ 时,$g(x)$取到极大值,极大值是 $g(0)=-a$;

当 $x=a$ 时,$g(x)$取到极小值,极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$. ································ 10 分

综上所述:

当 $a<0$ 时,函数 $g(x)$在$(-\infty,a)$和$(0,+\infty)$上单调递增,在$(a,0)$上单调递减,函数既有极大值,又有极小值,极大值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$,极小值是 $g(0)=-a$.

当 $a=0$ 时,函数 $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增,无极值;

当 $a>0$ 时,函数 $g(x)$在$(-\infty,0)$和$(a,+\infty)$上单调递增,在$(0,a)$上单调递减,函数既有极大值,又有极小值,极大值是 $g(0)=-a$,极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$. ························· 12 分

22. 解析:(1)曲线 C_1 的极坐标方程可以化为:$\rho^2-4\rho\sin\theta=0$,

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为:$x^2+y^2-4y=0$, ·· 2 分

曲线 C_2 的直角坐标方程为:$x+\sqrt{3}y-4=0$, ·· 4 分

(2)曲线 C_2 的参数方程可化为:$\begin{cases} x=4-\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)

将 C_2 的参数方程代入曲线 C_1 的直角坐标方程得到:$(4-\frac{\sqrt{3}}{2}t)^2+\frac{t^2}{4}-2t=0$

整理得:$t^2-(4\sqrt{3}+2)t+16=0$,判别式 $\Delta>0$

不妨设 A,B 的参数分别为 t_1,t_2,则 $t_1+t_2=4\sqrt{3}+2$,$t_1t_2=16$ ·································· 6 分

又点 $M(4,0)$，所以 $|MA|=|t_1|$，$|MB|=|t_2|$，所以 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_1|}$ ……

…………………………………………………………………………………………………… 8 分

又因为 $t_1+t_2=4\sqrt{3}+2>0$，$t_1t_2=16>0$，所以 $|t_1|+|t_2|=t_1+t_2=4\sqrt{3}+2$，$|t_1t_1|=16$

$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{4\sqrt{3}+2}{16}=\frac{2\sqrt{3}+1}{8}$ …………………………………………………… 10 分

23. 解析：(1) $f(x)=\begin{cases}-2x-2,(x\leqslant-3)\\4,(-3<x<1)\\2x+2,(x\geqslant1)\end{cases}$ …………………………………………………… 2 分

令 $\begin{cases}x\leqslant-3\\-2x-2\geqslant6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant1\\2x+2\geqslant6\end{cases}$ 解得 $x\leqslant-4$ 或 $x\geqslant2$ …………………………………… 4 分

所以解集为 $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$ ………………………………………………………… 5 分

(2) 当 $x\leqslant-3$ 时，$f(x)-g(x)=-2x-2-x-a\geqslant0$ 恒成立，即 $3x+2+a\leqslant0$ 恒成立，即 $a\leqslant7$ ……

…………………………………………………………………………………………………… 7 分

当 $-3<x<1$ 时，$f(x)-g(x)=4-x-a\geqslant0$ 恒成立，即 $a\leqslant4-x$ 恒成立，所以 $a\leqslant3$ ………… 8 分

当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)-g(x)=2x+2-x-a\geqslant0$ 恒成立，即 $a\leqslant x+2$，所以 $a\leqslant3$ …………………… 9 分

综上：$a\leqslant3$ ………………………………………………………………………………… 10 分