

北京市第一七一中学高三第一次月考试卷

数 学

2021.08

本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

1. 已知集合 $A = \{x | x > -1\}$, 集合 $B = \{x | x(x+2) < 0\}$, 那么 $A \cup B$ 等于()
A. $\{x | x > -2\}$ B. $\{x | -1 < x < 0\}$ C. $\{x | x > -1\}$ D. $\{x | -1 < x < 2\}$
2. 下列函数中, 既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是()
A. $y = \sqrt{x}$ B. $y = x \sin x$ C. $y = x^2 + |x|$ D. $y = |x+1|$
3. 某公司购买一批机器投入生产, 若每台机器生产的产品可获得的总利润 s (万元) 与机器运转时间 t (年数, $t \in \mathbf{N}^*$) 的关系为 $s = -t^2 + 23t - 64$. 要使年平均利润最大, 则每台机器运转的年数 t 为()
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
4. 在 $(x - \frac{1}{x})^5$ 的展开式中, x^3 的系数为()
A. -5 B. 5 C. -10 D. 10
5. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = f(x)$, 若 $f(2) > 1, f(7) = a$, 则实数 a 的取值范围是()
A. $(-\infty, -3)$ B. $(3, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(1, +\infty)$
6. “ $m = \frac{5}{12}\pi$ ” 是 “函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象关于直线 $x = m$ 对称” 的()
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$, 则 $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \cdot \tan(\pi + \alpha)$ 等于()
A. $\frac{15}{17}$ B. $-\frac{15}{17}$ C. $-\frac{8}{17}$ D. $\frac{8}{17}$
8. “回文数” 是指从左到右读与从右到左读都一样的正整数. 如 22, 121, 3443 等. 那么在四位数中, 回文数共有()
A. 81 个 B. 90 个 C. 100 个 D. 900 个

9. 大气压强 $p = \frac{\text{压力}}{\text{受力面积}}$ ，它的单位是“帕斯卡”(Pa, $1\text{Pa}=1\text{N}/\text{m}^2$)，大气压强 p (Pa) 随海拔高

度 h (m) 的变化规律是 $p = p_0 e^{-kh}$ ($k = 0.000126\text{m}^{-1}$), p_0 是海平面大气压强. 已知在某高山

A_1, A_2 两处测得的大气压强分别为 p_1, p_2 , $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$, 那么 A_1, A_2 两处的海拔高度的差约为 (参考

数据: $\ln 2 \approx 0.693$) ()

A. 550m

B. 1818m

C. 5500m

D. 8732m

10. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果对任意 $x_1 \in D$, 都存在唯一的 $x_2 \in D$, 使得 $f(x_1) + f(x_2) = m$

(m 为常数) 成立, 那么称函数 $f(x)$ 在 D 上具有性质 Ψ_m . 现有函数:

① $f(x) = 3x$

② $f(x) = 3^x$;

③ $f(x) = \log_3 x$;

④ $f(x) = \tan x$.

其中, 在其定义域上具有性质 Ψ_m 的函数的序号是 ()

A. ①③

B. ①④

C. ②③

D. ②④

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 函数 $f(x) = \ln(4x - x^2) + \frac{1}{x-2}$ 的定义域为 _____

12. $\lg 25 + \lg 50 + \lg 2 \cdot \lg 500 + (\lg 2)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 角 a 的终边与单位圆的交点 A 位于第一象限其横坐标为 $\frac{3}{5}$ 那么 $\sin a = \underline{\hspace{2cm}}$, 点 A 沿单位圆逆

时针运动到点 B , 所经过的弧长为 $\frac{\pi}{4}$, 则点 B 的横坐标为 _____

14. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 在区间 $(1, 4)$ 上存在最小值, 则实数 a 的取值范围是 _____.

15. 华人数学家李天岩和美国数学家约克给出了“混沌”的数学定义, 由此发展的混沌理论在生物学、经济学和社会学领域都有重要作用. 在混沌理论中, 函数的周期点是一个关键概念, 定义如下: 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 对于 $x_0 \in \mathbf{R}$ 令 $x_n = f(x_{n-1})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 若存在正整数 k 使得 $x_k = x_0$, 且当 $0 < j < k$ 时, $x_j \neq x_0$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个周期为 k 的周期点. 给出下列四个结论:

① 若 $f(x) = e^{x-1}$, 则 $f(x)$ 存在唯一的一个周期为 1 的周期点;

② 若 $f(x) = 2(1-x)$, 则 $f(x)$ 存在周期为 2 的周期点;

③ 若 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 不存在周期为 3 的周期点;

④ 若 $f(x) = x(1-x)$, 则对任意正整数 n , $\frac{1}{2}$ 都不是 $f(x)$ 的周期为 n 的周期点.
其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 证明: $e^x - e^2 \ln x > 0$ 恒成立.

17. (本小题共 14 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x + m (m \in \mathbf{R})$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(III) 对于任意 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 都有 $f(x) < 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

18. (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示。

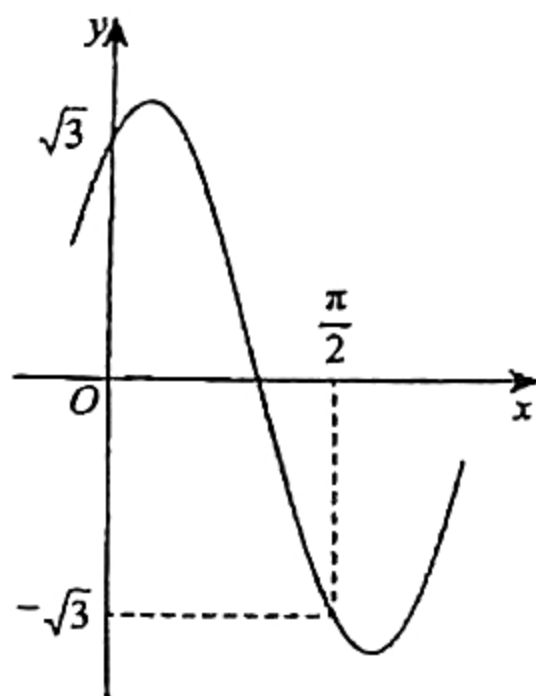
(I) 直接写出 ω 的值;

(II) 再从条件①、条件②中选择一个作为已知,

求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值。

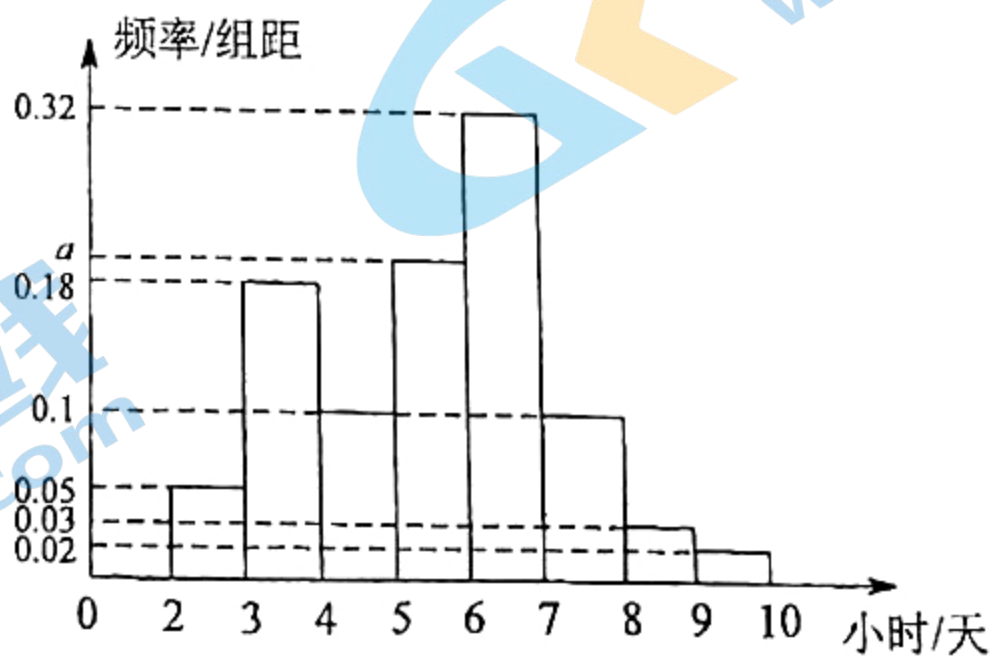
条件①: 直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 为函数 $y = f(x)$ 的图象的一条对称轴;

条件②: $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 为函数 $y = f(x)$ 的图象的一个对称中心



19. (本小题共 15 分)

为了认真贯彻落实北京市教委关于做好中小学生延期开学期间“停课不停学”工作要求,各校以教师线上指导帮助和学生居家自主学习相结合的教学模式积极开展工作,并鼓励学生积极开展锻炼身体和课外阅读活动.为了解学生居家自主学习和锻炼身体的情况,从某校高三年级随机抽取了 100 名学生,获得了他们一天中用于居家自主学习和锻炼身体的总时间分别在 $[2,3), [3,4), [4,5), \dots, [8,9), [9,10)$ (单位:小



时)的数据,整理得到的数据绘制成频率分布直方图(如图)。

- (I) 由图中数据求 a 的值, 并估计从该校高三年级中随机抽取一名学生, 这名学生该天居家自主学习和锻炼身体的总时间在 $[5,6)$ 的概率;
- (II) 为了进一步了解学生该天锻炼身体的情况, 现从抽取的 100 名学生该天居家自主学习和锻炼身体的总时间在 $[2,3)$ 和 $[8,9)$ 的人中任选 3 人, 求其中在 $[8,9)$ 的人数 X 的分布列和数学期望;
- (III) 假设同一时间段中的每个数据可用该时间段的中点值代替, 试估计样本中的 100 名学生该天居家自主学习和锻炼身体总时间的平均数在哪个时间段? (只需写出结论)

20. (本小题共 15 分)

已知函数 $f(x) = e^x + ax$.

(I) 当 $a = -1$ 时,

- ①求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- ②求函数 $f(x)$ 的最小值;

(II) 求证: 当 $a \in (-2, 0)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = 1 - \ln x$ 有且只有一个交点.

21. (本小题共 15 分)

给定整数 $n(n \geq 2)$, 数列 $A_{2n+1}: x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ 每项均为整数, 在 A_{2n+1} 中去掉一项 x_k , 并将剩下的数分成个数相同的两组, 其中一组数的和与另外一组数的和之差的最大值记为 m_k ($k=1, 2, \dots, 2n+1$). 将 $m_1, m_2, \dots, m_{2n+1}$ 中的最小值称为数列 A_{2n+1} 的特征值.

(I) 已知数列 $A_5: 1, 2, 3, 3, 3$, 写出 m_1, m_2, m_3 的值及 A_5 的特征值;

(II) 若 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n+1}$, 当 $[i-(n+1)][j-(n+1)] \geq 0$, 其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$ 且 $i \neq j$

时, 判断 $|m_i - m_j|$ 与 $|x_i - x_j|$ 的大小关系, 并说明理由;

(III) 已知数列 A_{2n+1} 的特征值为 $n-1$, 求 $\sum_{1 \leq i < j \leq 2n+1} |x_i - x_j|$ 的最小值.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018