西 城 区 高 三 统 一 测 试

数　学

2021.4

本试卷共 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\,|\,x\geqslant 1\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{2\}$　　（B）$\{1,2\}$　　（C）$\{0,1,2\}$　　（D）$\{x\,|\,x\geqslant -1\}$

（2）已知复数 z 满足 $\bar{z}-z=2\mathrm{i}$，则 z 的虚部是

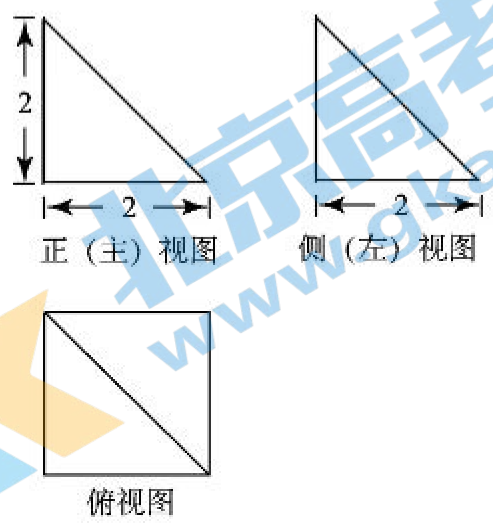
（A）-1　　（B）1　　（C）$-\mathrm{i}$　　（D）i

（3）在 $(x-\frac{1}{x^2})^6$ 的展开式中，常数项为

（A）15　　（B）-15

（C）30　　（D）-30

（4）某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的表面积为



（A）12　　（B）$8+\sqrt{2}$

（C）16　　（D）$8+4\sqrt{2}$

（5）已知函数 $f(x)=\frac{2}{x}-\log_2 x$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是

（A）$(0,1)$　　（B）$(-\infty,2)$　　（C）$(2,+\infty)$　　（D）$(0,2)$

（6）在 $\triangle ABC$ 中，$C=90^\circ$，$AC=4$，$BC=3$，点 P 是 AB 的中点，则 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}=$

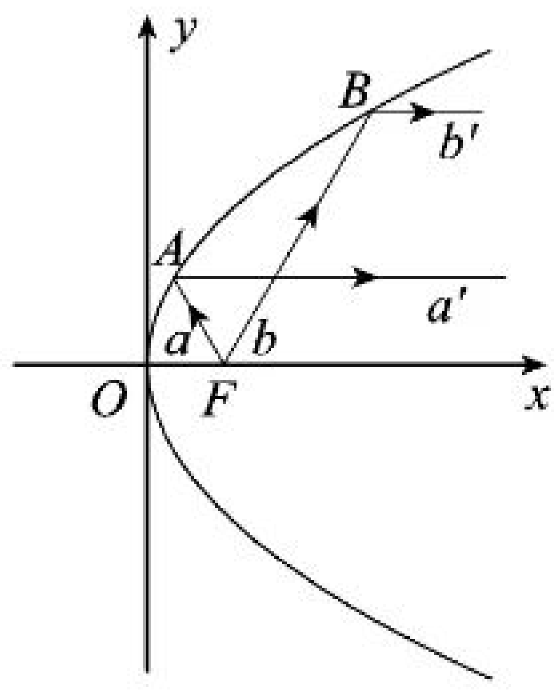
（A）$\frac{9}{4}$　　（B）4　　（C）$\frac{9}{2}$　　（D）6

（7）在△ ABC 中，$C=60^{\circ}$，$a+2b=8$，$\sin A=6\sin B$，则 $c=$

（A）$\sqrt{35}$　　（B）$\sqrt{31}$

（C）6　　（D）5

（8）抛物线具有以下光学性质：从焦点出发的光线经抛物线反射后平行于抛物线的对称轴．该性质在实际生产中应用非常广泛．如图，从抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 发出的两条光线 a,b 分别经抛物线上的 A,B 两点反射，已知两条入射光线与 x 轴所成锐角均为 $60°$，则两条反射光线 a' 和 b' 之间的距离为



（A）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\dfrac{8}{3}$

（C）$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

（9）在无穷等差数列 $\{a_n\}$ 中，记 $T_n=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-\cdots+(-1)^{n+1}a_n\ (n=1,2,\cdots)$，则“存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $T_m<T_{m+2}$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（10）若非空实数集 X 中存在最大元素 M 和最小元素 m，则记 $\Delta(X)=M-m$．下列命题中正确的是

（A）已知 $X=\{-1,1\}$，$Y=\{0,b\}$，且 $\Delta(X)=\Delta(Y)$，则 $b=2$

（B）已知 $X=[a,a+2]$，$Y=\{y\mid y=x^2,x\in X\}$，则存在实数 a，使得 $\Delta(Y)<1$

（C）已知 $X=\{x\mid f(x)\geqslant g(x),x\in[-1,1]\}$，若 $\Delta(X)=2$，则对任意 $x\in[-1,1]$，都有 $f(x)\geqslant g(x)$

（D）已知 $X=[a,a+2]$，$Y=[b,b+3]$，则对任意的实数 a，总存在实数 b，使得 $\Delta(X\cup Y)\leqslant 3$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=\ln x+\sqrt{1-x}$ 的定义域是______.

（12）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$，则 C 的渐近线方程是______；过 C 的左焦点且与 x 轴垂直的直线交其渐近线于 M,N 两点，O 为坐标原点，则 $\triangle OMN$ 的面积是______.

（13）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=-5$，则公比 $q=$______；若 $a_n>1$，则 n 的最大值为______.

（14）已知函数 $f(x)=\sin x$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f(x+m)=c$（c 为常数），则常数 m 的一个取值为______.

（15）长江流域水库群的修建和联合调度，极大地降低了洪涝灾害风险，发挥了重要的防洪减灾效益．每年洪水来临之际，为保证防洪需要、降低防洪风险，水利部门需要在原有蓄水量的基础上联合调度，统一蓄水，用蓄满指数（蓄满指数 $=\dfrac{\text{水库实际蓄水量}}{\text{水库总蓄水量}}\times 100$）来衡量每座水库的水位情况．假设某次联合调度要求如下：

（ⅰ）调度后每座水库的蓄满指数仍属于区间 $[0,100]$；

（ⅱ）调度后每座水库的蓄满指数都不能降低；

（ⅲ）调度前后，各水库之间的蓄满指数排名不变．

记 x 为调度前某水库的蓄满指数，y 为调度后该水库的蓄满指数，给出下面四个 y 关于 x 的函数解析式：

① $y=-\dfrac{1}{20}x^2+6x$；　② $y=10\sqrt{x}$；　③ $y=10^{\frac{x}{50}}$；　④ $y=100\sin\dfrac{\pi}{200}x$.

则满足此次联合调度要求的函数解析式的序号是______.

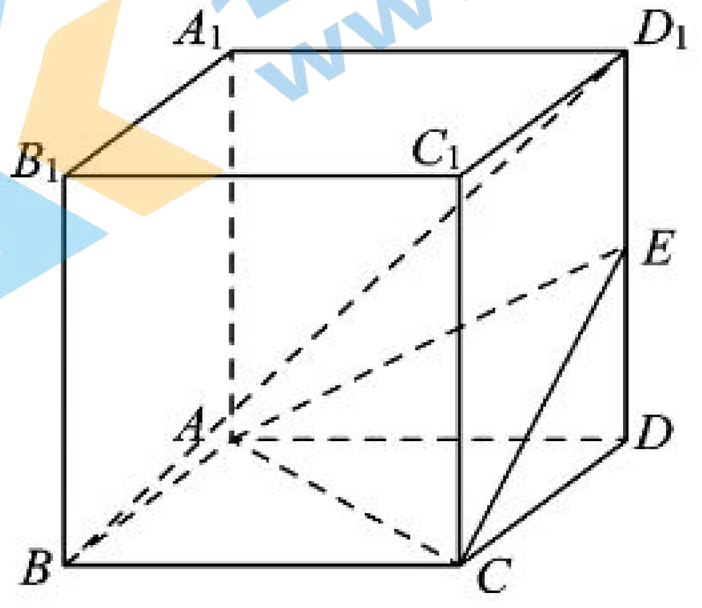
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 DD_1 的中点.

（Ⅰ）求证：BD_1 // 平面 ACE；

（Ⅱ）求直线 AD 与平面 ACE 所成角的正弦值.



（17）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，且 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，再从条件①、条件②、条件③中选择两个作为一组已知条件.

（Ⅰ）确定 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 图象的对称轴只有一条落在区间 $[0,a]$ 上，求 a 的取值范围.

条件①：$f(x)$ 的最小值为 -2；

条件②：$f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12},0)$；

条件③：$f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{5\pi}{6},-1)$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

天文学上用星等表示星体亮度，星等的数值越小，星体越亮. **视星等**是指观测者用肉眼所看到的星体亮度；**绝对星等**是假定把恒星放在距地球32.6光年的地方测得的恒星的亮度，反映恒星的真实发光本领.

下表列出了（除太阳外）视星等数值最小的 10 颗最亮恒星的相关数据，其中 $a\in[0,1.3]$.

星名	天狼星	老人星	南门二	大角星	织女一	五车二	参宿七	南河三	水委一	参宿四*
视星等	-1.47	-0.72	-0.27	-0.04	0.03	0.08	0.12	0.38	0.46	a
绝对星等	1.42	-5.53	4.4	-0.38	0.6	0.1	-6.98	2.67	-2.78	-5.85
赤纬	-16.7°	-52.7°	-60.8°	19.2°	38.8°	46°	-8.2°	5.2°	-57.2°	7.4°

（Ⅰ）从表中随机选择一颗恒星，求它的绝对星等的数值小于视星等的数值的概率；

（Ⅱ）已知北京的纬度是北纬 40°，当且仅当一颗恒星的“赤纬”数值大于 -50° 时，能在北京的夜空中看到它. 现从这10颗恒星中随机选择4颗，记其中能在北京的夜空中看到的数量为 X 颗，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记 $a=0$ 时10颗恒星的视星等的方差为 s_1^2，记 $a=1.3$ 时10颗恒星的视星等的方差为 s_2^2，判断 s_1^2 与 s_2^2 之间的大小关系.（结论不需要证明）

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=e^x(\ln x-a)$.

（Ⅰ）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $a>1$，求证：函数 $f(x)$ 存在极小值；

（Ⅲ）若对任意的实数 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)\geqslant -1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的焦点在 x 轴上，且经过点 $E(1,\frac{3}{2})$，左顶点为 D，右焦点为 F.

（Ⅰ）求椭圆 C 的离心率和 $\triangle DEF$ 的面积；

（Ⅱ）已知直线 $y=kx+1$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点. 过点 B 作直线 $y=t(t>\sqrt{3})$ 的垂线，垂足为 G. 判断是否存在常数 t，使得直线 AG 经过 y 轴上的定点？若存在，求 t 的值；若不存在，请说明理由.

（21）（本小题 15 分）

已知数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_N\ (N\geqslant 3)$ 的各项均为正整数，设集合 $T=\{x|x=a_j-a_i,1\leqslant i<j\leqslant N\}$，记 T 的元素个数为 $P(T)$.

（Ⅰ）若数列 $A:1,2,4,3$，求集合 T，并写出 $P(T)$ 的值；

（Ⅱ）若 A 是递增数列，求证：“$P(T)=N-1$”的充要条件是“A 为等差数列”；

（Ⅲ）若 $N=2n+1$，数列 A 由 $1,2,3,\cdots,n,2n$ 这 $n+1$ 个数组成，且这 $n+1$ 个数在数列 A 中每个至少出现一次，求 $P(T)$ 的取值个数.

西 城 区 高 三 统 一 测 试

数学参考答案

2021.4

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B	（2）A	（3）A	（4）D
（5）D	（6）C	（7）B	（8）C
（9）B	（10）D		

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$(0,1]$　　（12）$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$6\sqrt{2}$

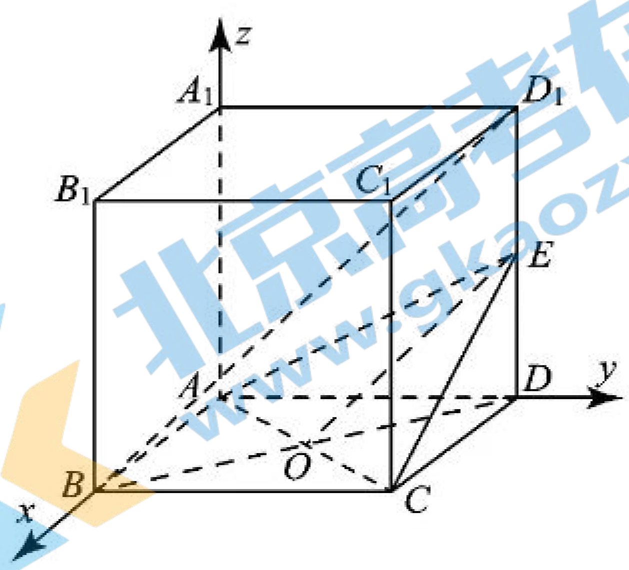
（13）$-\dfrac{1}{2}$，3　　（14）π（答案不唯一，只要是 $(2k+1)\pi$ 即可）

（15）②④

注：第（12）和（13）题第一空 3 分，第二空 2 分．第（15）题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分．

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）



解：（Ⅰ）连接 BD 交 AC 于点 O，连接 OE，

在正方形 $ABCD$ 中，$OB=OD$．

因为 E 为 DD_1 的中点，

所以 $OE\,/\!/\,BD_1$．　　…………………3 分

因为 $BD_1\not\subset$ 平面 ACE，$OE\subset$ 平面 ACE，

所以 $BD_1\,/\!/$ 平面 ACE．　　…………………5 分

（Ⅱ）不妨设正方体的棱长为 2，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$．

则 $A(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$E(0,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$．　　…………………8 分

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 所以$\begin{cases}2x+2y=0,\\ 2y+z=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=-y,\\ z=-2y,\end{cases}$ ………………10 分

令 $y=-1$，则 $x=1$， $z=2$，

于是 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$. ………………11 分

设直线 AD 与平面 ACE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ………………13 分

所以直线 AD 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由于函数 $f(x)$ 图象上两相邻对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\times\dfrac{\pi}{2}=\pi$， $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$. ………………2 分

此时 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$.

选条件①②：

因为 $f(x)$ 的最小值为 $-A$，所以 $A=2$. ………………3 分

因为 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\dfrac{5\pi}{12},0)$，

所以 $2\times\dfrac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi\ \ (k\in\mathbf{Z})$， ………………5 分

所以 $\varphi=k\pi-\dfrac{5\pi}{6}\ \ (k\in\mathbf{Z})$，

因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，此时 $k=1$. ………………7 分

所以 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$. ………………8 分

选条件①③：

因为 $f(x)$ 的最小值为 $-A$，所以 $A=2$. ………………3 分

因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(\frac{5\pi}{6},-1)$，

则 $f(\frac{5\pi}{6})=-1$，即 $2\sin(\frac{5\pi}{3}+\varphi)=-1$， $\sin(\frac{5\pi}{3}+\varphi)=-\frac{1}{2}$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{7\pi}{6}<\varphi+\frac{5\pi}{3}<\frac{13\pi}{6}$， ………………5 分

所以 $\varphi+\frac{5\pi}{3}=\frac{11\pi}{6}$， $\varphi=\frac{\pi}{6}$. ………………7 分

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. ………………8 分

选条件②③：

因为函数 $f(x)$ 的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12},0)$，

所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$， ………………4 分

所以 $\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，此时 $k=1$. ………………6 分

所以 $f(x)=A\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(\frac{5\pi}{6},-1)$，

所以 $f(\frac{5\pi}{6})=-1$，即 $A\sin(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=-1$， $A\sin\frac{11\pi}{6}=-1$，

所以 $A=2$. ………………7 分

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. ………………8 分

（Ⅱ）因为 $x\in[0,a]$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},2a+\frac{\pi}{6}]$，

因为 $f(x)$ 图象的对称轴只有一条落在区间 $[0,a]$ 上，

所以 $\frac{\pi}{2}\leqslant 2a+\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}$， ………………11 分

得 $\frac{\pi}{6} \leqslant a < \frac{2\pi}{3}$，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………13 分

所以 a 的取值范围为 $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$.

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）设一颗星的绝对星等的数值小于视星等的数值为事件 A．由图表可知，10 颗恒星有 5 颗恒星绝对星等的数值小于视星等的数值.

所以 $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………3 分

（Ⅱ）由图表知，有 7 颗恒星的"赤纬"数值大于 -50°，有 3 颗恒星的"赤纬"数值小于 -50°．所以随机变量 X 的所有可能取值为：$1,2,3,4$.…………………4 分

$P(X=1) = \frac{C_7^1 \cdot C_3^3}{C_{10}^4} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$，　$P(X=2) = \frac{C_7^2 \cdot C_3^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{10}$，

$P(X=3) = \frac{C_7^3 \cdot C_3^1}{C_{10}^4} = \frac{1}{2}$，　$P(X=4) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^0}{C_{10}^4} = \frac{1}{6}$.　　　…………………8 分

所以随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

…………………9 分

所以 $E(X) = 1 \times \frac{1}{30} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{14}{5}$.　　　　　…………………11 分

（Ⅲ）$s_1^2 < s_2^2$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………14 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x) = e^x(\ln x - 1)$，

所以 $f'(x) = e^x(\ln x - 1) + e^x \frac{1}{x} = e^x(\ln x + \frac{1}{x} - 1)$.　　　　　　　…………………1 分

所以 $f(1) = -e$，$f'(1) = 0$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………3 分

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -e$.　　　　　　　　　　…………………4 分

（Ⅱ）由 $f(x)=e^x(\ln x-a)$，得 $f'(x)=e^x(\ln x+\frac{1}{x}-a)$，

令 $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-a$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$. ··················6 分

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是减函数，在区间 $(1,+\infty)$ 上是增函数.

所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(1)=1-a$. ··················7 分

当 $a>1$ 时，$h(1)=1-a<0$，$h(e^a)=e^{-a}>0$， ··················9 分

又 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

故存在 $x_0\in(1,e^a)$，使得 $h(x_0)=0$，在区间 $(1,x_0)$ 上 $h(x)<0$，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上 $h(x)>0$. ··················10 分

所以，在区间 $(1,x_0)$ 上 $f'(x)<0$，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，

所以，在区间 $(1,x_0)$ 上 $f(x)$ 单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递增，

故函数 $f(x)$ 存在极小值. ··················11 分

（Ⅲ）对任意的实数 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)\geqslant-1$ 恒成立，等价于 $f(x)$ 的最小值大于或等于 -1.

① 当 $a\leqslant1$ 时，$h(1)=1-a\geqslant0$，由（Ⅱ）得 $h(x)\geqslant0$，所以 $f'(x)\geqslant0$.

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=-ae$.

由 $-ae\geqslant-1$，得 $a\leqslant\frac{1}{e}$，满足题意. ··················13 分

② 当 $a>1$ 时，由（Ⅱ）知，$f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，

所以在 $(1,x_0)$ 上 $f(x)\leqslant f(1)=-ae<-e$，不满足题意.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1}{e}]$. ··················15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）依题意，$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4}=1$，解得 $a=2$. ··················1 分

因为 $c^2=a^2-b^2=4-3=1$，即 $c=1$， ··················2 分

所以 $D(-2,0)$，$F(1,0)$，

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\triangle DEF$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$. ……………………5 分

（Ⅱ）由已知，直线 DE 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$.

当 $A(-2,0)$，$B(1,\frac{3}{2})$，$G(1,t)$ 时，

直线 AG 的方程为 $y=\frac{t}{3}(x+2)$，交 y 轴于点 $(0,\frac{2}{3}t)$；

当 $A(1,\frac{3}{2})$，$B(-2,0)$，$G(-2,t)$ 时，

直线 AG 的方程为 $y-\frac{3}{2}=\frac{t-\frac{3}{2}}{-3}(x-1)$，交 y 轴于点 $(0,\frac{t+3}{3})$.

若直线 AG 经过 y 轴上定点，则 $\frac{2}{3}t=\frac{t+3}{3}$，

即 $t=3$，直线 AG 交 y 轴于点 $(0,2)$. ……………………7 分

下面证明存在实数 $t=3$，使得直线 AG 经过 y 轴上定点 $(0,2)$.

联立 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消 y 整理，得 $(4k^2+3)x^2+8kx-8=0$， ……………………8 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

则 $x_1+x_2=\frac{-8k}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{-8}{4k^2+3}$. ……………………10 分

设点 $G(x_2,3)$，所以直线 AG 的方程：$y-3=\frac{y_1-3}{x_1-x_2}(x-x_2)$. ………11 分

令 $x=0$，得 $y=\frac{-x_2y_1+3x_2}{x_1-x_2}+3=\frac{3x_1-x_2y_1}{x_1-x_2}$

$=\frac{3x_1-x_2(kx_1+1)}{x_1-x_2}=\frac{3x_1-x_2-kx_1x_2}{x_1-x_2}$. ……………………12 分

因为 $kx_1x_2=x_1+x_2$，

所以 $y=\dfrac{3x_1-x_2-(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{2x_1-2x_2}{x_1-x_2}=2$. ………………14 分

所以直线 AG 过定点 $(0,2)$.

综上，存在实数 $t=3$，使得直线 AG 经过 y 轴上定点 $(0,2)$. ………15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $a_1=1$， $a_2=2$， $a_3=4$， $a_4=3$，

所以 $T=\{1,2,3,-1\}$， $P(T)=4$. ………………4 分

（Ⅱ）充分性：若 A 是等差数列，设公差为 d.

因为数列 A 是递增数列，所以 $d>0$.

则当 $j>i$ 时， $a_j-a_i=(j-i)d$.

所以 $T=\{d,2d,\cdots,(N-1)d\}$， $P(T)=N-1$. ………………6 分

必要性：若 $P(T)=N-1$.

因为 A 是递增数列，所以 $a_2-a_1<a_3-a_1<\cdots<a_N-a_1$，

所以 $a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_N-a_1\in T$，且互不相等.

所以 $T=\{a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_N-a_1\}$.

又 $a_3-a_2<a_4-a_2<\cdots<a_{N-1}-a_2<a_N-a_2<a_N-a_1$，

所以 $a_3-a_2,a_4-a_2,\cdots,a_N-a_2,a_N-a_1\in T$，且互不相等.

所以 $a_3-a_2=a_2-a_1$， $a_4-a_2=a_3-a_1$， $\cdots$， $a_N-a_2=a_{N-1}-a_1$.

所以 $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_N-a_{N-1}$，

所以 A 为等差数列. ………………9 分

（Ⅲ）因为数列 A 由 $1,2,3,\cdots,n,2n$ 这 $n+1$ 个数组成，任意两个不同的数作差，

差值只可能为 $\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm(n-1)$ 和 $\pm(2n-1),\pm(2n-2),\cdots,\pm n$.

共 $2(n-1)+2n=4n-2$ 个不同的值；且对任意的 $m=1,2,3,\cdots,n-1,n,\cdots,2n-1$，

m 和 $-m$ 这两个数中至少有一个在集合 T 中. ………………11 分

又因为 $1,2,3,\cdots,n,2n$ 这 $n+1$ 个数在数列 A 中共出现 $N=2n+1$ 次，所以数列 A 中存在 $a_i=a_j(i\neq j)$，所以 $0\in T$.

综上， $P(T)\leqslant 4n-1$，且 $P(T)\geqslant 2n$. ………………12 分

设数列 A_0：$1,1,2,2,3,3,4,4,\cdots,n,n,2n$，此时 $T=\{0,1,2,\cdots,2n-1\}$，$P(T)=2n$.

现对数列 A_0 分别作如下变换：

把一个 1 移动到 $2,3$ 之间，得到数列：$1,2,2,1,3,3,4,4,\cdots,n,n,2n$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,(2n-1),-1\}$，$P(T)=2n+1$.

把一个 1 移动到 $3,4$ 之间，得到数列：$1,2,2,3,3,1,4,4,\cdots,n,n,2n$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,(2n-1),-1,-2\}$，$P(T)=2n+2$.

……

把一个 1 移动到 $n-1,n$ 之间，得到数列：$1,2,2,3,3,4,4,\cdots,n-1,n-1,1,n,n,2n$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,(2n-1),-1,-2,\cdots,2-n\}$，$P(T)=2n+n-2=3n-2$.

把一个 1 移动到 $n,2n$ 之间，得到数列：$1,2,2,3,3,4,4,\cdots,n,n,1,2n$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,2n-1,-1,-2,\cdots,1-n\}$，$P(T)=2n+n-1=3n-1$.

再对数列 A_0 依次作如下变换：

把一个 1 移为 $2n$ 的后一项，得到数列 A_1：$1,2,2,3,3,4,4,\cdots,n,n,2n,1$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,2n-1,-1,-2,\cdots,1-n,1-2n\}$，$P(T)=3n$；

再把一个 2 移为 $2n$ 的后一项：得到数列 A_2：$1,2,3,3,4,4,\cdots,n,n,2n,2,1$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,2n-1,-1,-2,\cdots,1-n,1-2n,2-2n\}$，$P(T)=3n+1$；

依此类推……

最后把一个 n 移为 $2n$ 的后一项：得到数列 A_n：$1,2,3,4,\cdots,n,2n,n,n-1,\cdots,2,1$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,2n-1,-1,-2,\cdots,1-n,1-2n,2-2n,\cdots,-n\}$，$P(T)=4n-1$.

综上所述，$P(T)$ 可以取到从 $2n$ 到 $4n-1$ 的所有 $2n$ 个整数值，所以 $P(T)$ 的取值个数为 $2n$. ………………15 分