考号________ 姓名________ 班级________ 学校________

密 封 线 内 不 要 答 题

金太阳大联考

河南省2021～2022年度高三阶段性检测(三)

数学(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共150分。考试时间120分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:集合与常用逻辑用语,函数与导数,三角与向量,数列,不等式。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<5, x\in\mathbf{N}\}$, $B=\{0,2,3,5\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{0,2,3\}$　　B. $\{-1,0,1,2,3,4\}$

C. $\{0,1,2,3,4,5\}$　　D. $\{-1,0,1,2,3,4,5\}$

2. “$x^2+x-2=0$”是“$x=-2$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 不等式 $\frac{1}{x-2}<2$ 的解集是

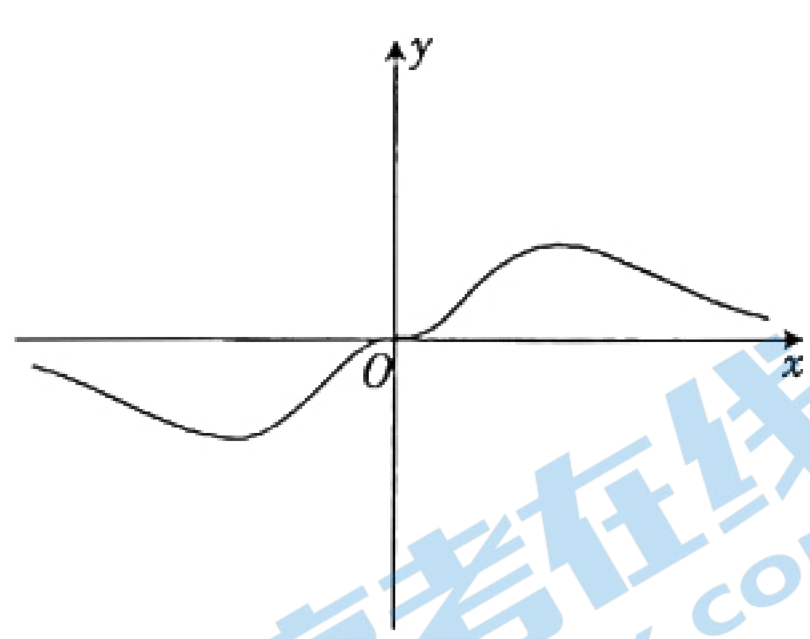
A. $(2,\frac{5}{2})$　　B. $(\frac{5}{2},+\infty)$

C. $(-\infty,2)$　　D. $(-\infty,2)\cup(\frac{5}{2},+\infty)$

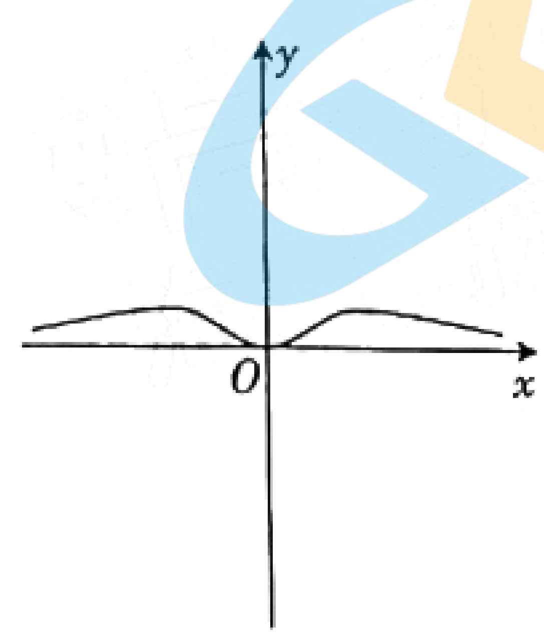
4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,若 $a_3+a_7=14$,则 $S_9=$

A. 21　　B. 63　　C. 42　　D. 126

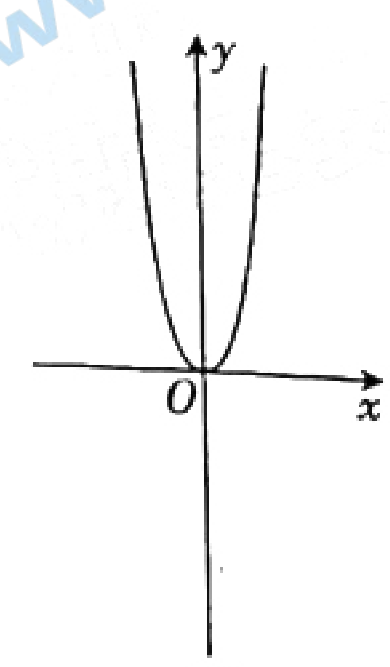
5. 函数 $f(x)=\frac{x^3}{e^{|x|}}$ 的部分图象大致为



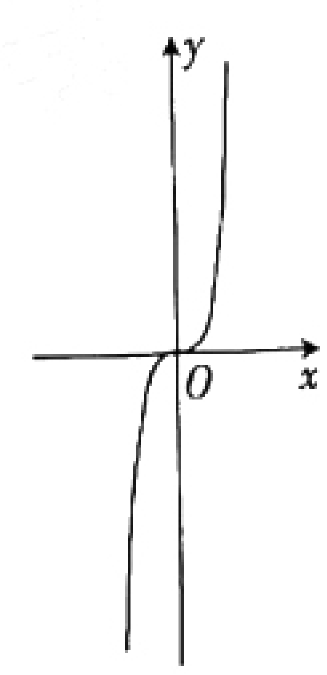
A



B



C



D

6. 函数 $f(x)=xe^{2x}-x^2-x-\frac{1}{4}$ 的极大值为

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2e}$　　C. 0　　D. $-\frac{1}{4}$

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^{x-1}, x\leqslant 1,\\ 1-\log_{\frac{1}{2}}(x-1), x>1,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)\leqslant 2$ 的解集为

A. $[0,3]$　　B. $(-\infty,3]$

C. $[0,+\infty)$　　D. $[0,1]\cup[3,+\infty)$

8. 设 $p:\forall x\in[2,3],kx>1$，$q:\exists x\in\mathbf{R},x^2+x+k\leqslant 0$. 若 p 或 q 为真，p 且 q 为假，则 k 的取值范围为

A. $(-\infty,\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$　　B. $[\frac{1}{4},\frac{1}{2})$

C. $(-\infty,\frac{1}{4}]\cup(\frac{1}{2},+\infty)$　　D. $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$

9. 十九世纪下半叶集合论的创立，奠定了现代数学的基础. 著名的“康托三分集”是数学理性思维的构造产物，具有典型的分形特征，其操作过程如下：将闭区间$[0,1]$均分为三段，去掉中间的开区间段$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，记为第一次操作；再将剩下的两个区间$[0,\frac{1}{3}]$，$[\frac{2}{3},1]$分别均分为三段，并各自去掉中间的开区间段，记为第二次操作；…. 如此这样，每次在上一次操作的基础上，将剩下的各个区间分别均分为三段，同样各自去掉中间的开区间段. 操作过程不断地进行下去，以至无穷，剩下的区间集合即“康托三分集”. 第三次操作后，从左到右第六个区间为

A. $[\frac{2}{9},\frac{7}{27}]$　　B. $[\frac{8}{27},\frac{1}{3}]$　　C. $[\frac{2}{3},\frac{19}{27}]$　　D. $[\frac{20}{27},\frac{7}{9}]$

10. 已知$\triangle ABC$的三个内角分别为A,B,C，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\sin C})$，$\lambda\in(0,+\infty)$，则动点$P$的轨迹一定经过$\triangle ABC$的

A. 重心　　B. 垂心　　C. 内心　　D. 外心

11. 设 $a=\ln 1.2$，$b=2\ln 1.1$，$c=\sqrt{1.5}-1$，则

A. $b<a<c$　　B. $c<a<b$　　C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

12. 已知函数 $f(x)=ax^3-x$，若 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)+\cos x\geqslant 0$，则实数 a 的最小值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{7}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-4,x)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|=$___▲___.

14. 已知钝角 α 满足 $\tan(\pi-2\alpha)=\frac{4}{3}$，则 $\cos^2\alpha+\sin 2\alpha-1=$___▲___.

15. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c. 若 $\sin A=\frac{1}{3}$，$\cos B=\frac{4}{5}$，$a=5$，则$\triangle ABC$的面积为___▲___，其内切圆的半径为___▲___.（本题第一空 3 分，第二空 2 分）

16. 已知 $\theta\in[0,2\pi]$，函数 $f(x)=\ln(x^2\sin\theta-x+\cos\theta)$在$[0,1]$上是单调函数，则$\theta$的取值范围为___▲___.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=4$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1) 证明：数列$\{\frac{a_n}{2^n}\}$是等差数列.

(2) 求 S_n.

18. (12 分)

已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$图象的一条对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{6}$,这条对称轴与相邻对称中心之间的距离为$\frac{\pi}{4}$.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)若 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\frac{3}{5}$,$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$,求 $f(\alpha+\frac{\pi}{3})$.

19. (12 分)

某厂家拟举行促销活动,经调查测算,该产品的年销售量(即该厂家的年产量)x 万件与年促销费用 m 万元($m\geqslant 0$)满足关系式 $x=2.5-\frac{k}{m+1}$(k 为常数),如果不搞促销活动,则该产品的年销售量是 1.5 万件.已知生产该产品的固定年投入为 10 万元,每生产 1 万件该产品需要再投入 25 万元,厂家将每件产品的销售价格定为每件产品年平均成本的 2 倍(产品成本包括固定投入和再投入两部分资金).

(1)将该产品的年利润 y(万元)表示为年促销费用 m(万元)的函数;

(2)该厂家年利润的最大值为多少?

20. (12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x^a}(x>0)$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

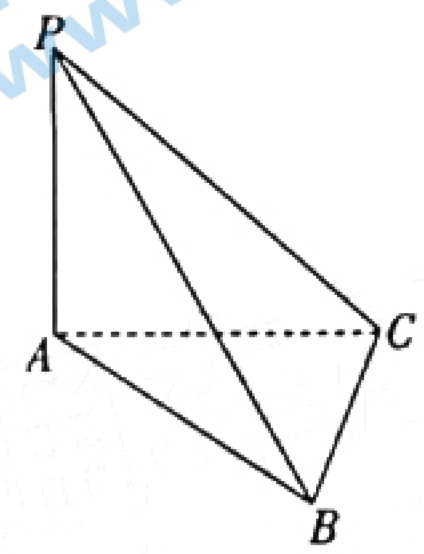
(2)当 $a=2$ 时,求曲线 $y=f(x)$过点(2,0)的切线与曲线 $y=f(x)$的公共点的坐标.

21.(12 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA\perp$底面 ABC,$PA=AC=2$,$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$,$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$.

(1)求 $\cos\angle PBC$.

(2)若点 M 在线段 PB 上,记$\triangle ACM$ 的周长为 l,证明:$l>5$.



密 封 线 内 不 要 答 题

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2)若函数 $g(x)=f(x)-(a+1)\ln x$ 恰有两个零点,求 a 的取值范围.

河南省 2021～2022 年度高三阶段性检测(三)

数学参考答案(理科)

1. C 【解析】本题考查集合的并集，考查运算求解能力.

因为 $A=\{x|-1\leqslant x<5,x\in N\}=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{0,2,3,5\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5\}$.

2. B 【解析】本题考查充分条件与必要条件，考查逻辑推理的核心素养.

由 $x^2+x-2=0$，得 $x=-2$ 或 $x=1$，所以"$x^2+x-2=0$"是"$x=-2$"的必要不充分条件.

3. D 【解析】本题考查解不等式，考查运算求解能力.

由$\frac{1}{x-2}<2$变形得$\frac{2x-5}{x-2}>0$，解得 $x\in(-\infty,2)\cup(\frac{5}{2},+\infty)$.

4. B 【解析】本题考查等差数列，考查运算求解能力.

因为 $a_3+a_7=2a_5=14$，所以 $a_5=7$，所以 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=63$.

5. A 【解析】本题考查函数图象的识别，考查推理论证能力.

因为 $f(-x)=\frac{-x^3}{e^{|x|}}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，排除 B，C；当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{x^3}{e^x}$，若 $x\to+\infty$，显然 $f(x)\to0$，故排除 D.

6. B 【解析】本题考查导数的应用，考查运算求解能力.

因为 $f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-2x-1=(2x+1)(e^{2x}-1)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $[-\frac{1}{2},0]$ 上单调递减，故 $f(x)$ 的极大值为 $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2e}$.

7. A 【解析】本题考查分段函数，考查分类讨论的数学思想.

当 $x\leqslant1$ 时，由 $f(x)=(\frac{1}{2})^{x-1}\leqslant2$，得 $2^{1-x}\leqslant2$，即 $x\geqslant0$，所以 $0\leqslant x\leqslant1$；当 $x>1$ 时，由 $f(x)=1-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\leqslant2$，得 $-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\leqslant1$，即 $1<x\leqslant3$. 故不等式 $f(x)\leqslant2$ 的解集为 $[0,3]$.

8. C 【解析】本题考查复合命题，考查推理论证能力.

若 p 为真，则 $\begin{cases}2k>1,\\3k>1,\end{cases}$ 解得 $k>\frac{1}{2}$. 若 q 为真，则 $\Delta=1-4k\geqslant0$，解得 $k\leqslant\frac{1}{4}$.

因为 p 或 q 为真，p 且 q 为假，所以 p，q 一真一假.

①若 p 假 q 真，则 $\begin{cases}k\leqslant\frac{1}{2},\\k\leqslant\frac{1}{4},\end{cases}$ 解得 $k\leqslant\frac{1}{4}$；②若 p 真 q 假，则 $\begin{cases}k>\frac{1}{2},\\k>\frac{1}{4},\end{cases}$ 解得 $k>\frac{1}{2}$.

故 k 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1}{4}]\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.

9. D 【解析】本题考查区间的表示与集合的新概念，考查推理论证能力与创新意识.

第一次操作剩下的区间为 $[0,\frac{1}{3}]$，$[\frac{2}{3},1]$；

第二次操作剩下的区间为 $[0,\frac{1}{9}]$，$[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]$，$[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]$，$[\frac{8}{9},1]$；

第三次操作剩下的区间为 $[0,\frac{1}{27}]$，$[\frac{2}{27},\frac{1}{9}]$，$[\frac{2}{9},\frac{7}{27}]$，$[\frac{8}{27},\frac{1}{3}]$，$[\frac{2}{3},\frac{19}{27}]$，$[\frac{20}{27},\frac{7}{9}]$，$[\frac{8}{9},\frac{25}{27}]$，$[\frac{26}{27},1]$.

则……$[\frac{20}{27},\frac{7}{9}]$.

10. A 【解析】本题考查平面向量与正弦定理，考查推理论证能力.

由正弦定理得$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{\sin C}=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{\sin B}$，即$|\overrightarrow{AB}|\sin B=|\overrightarrow{AC}|\sin C$，所以$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B})$，即$\overrightarrow{AP}=\frac{\lambda}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{2\lambda}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}\overrightarrow{AM}$，其中$M$为$BC$的中点，所以动点$P$的轨迹一定经过$\triangle ABC$的重心.

11. D 【解析】本题考查基本初等函数，考查抽象概括能力与推理论证能力.

令$f(x)=\ln x-x+1$，则$f'(x)=\frac{1-x}{x}$，所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$f(x)\leq f(1)=0$，即$\ln x\leq x-1$. 因为$\sqrt{1.5}-1.21=\sqrt{1.5}-\sqrt{1.4641}>0$，所以$\sqrt{1.5}-1.21>0$，即$\sqrt{1.5}-1>0.21$. 因为$b=2\ln 1.1=\ln 1.21<1.21-1=0.21$，所以$b<c$. 因为$\ln 1.2<\ln 1.21$，所以$a<b$，故$a<b<c$.

12. D 【解析】本题考查导数在函数中的应用，考查逻辑推理的核心素养及化归与转化的数学思想.

由题知$f'(x)=3ax^2-1$，设$g(x)=3ax^2-1+\cos x$，则$g(x)$为偶函数，且$g(0)=0$.

当$a\leq 0$时，$g(x)=3ax^2-1+\cos x\leq 3ax^2\leq 0$，不符合题意.

当$a>0$时，$g'(x)=-\sin x+6ax$，令$h(x)=-\sin x+6ax$，则$h'(x)=-\cos x+6a$，

当$a\geq\frac{1}{6}$时，$h'(x)=-\cos x+6a\geq-\cos x+1\geq 0$，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以当$x>0$时，$h(x)>h(0)=0$，即$g'(x)>0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$g(x)>g(0)=0$.

因为$g(x)$为偶函数，且$g(0)=0$，所以当$x\in\mathbf{R}$时，$g(x)\geq 0$恒成立.

当$0<a<\frac{1}{6}$，$x\in(0,2\pi)$时，存在$x_1\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得$\cos x_1=6a$，

当$0<x<x_1$时，$h'(x)=-\cos x+6a<0$，$h(x)$单调递减，所以$h(x)<h(0)=0$，

即当$x\in(0,x_1)$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,x_1)$上单调递减，此时$g(x)<g(0)=0$，不符合题意.

所以实数a的最小值为$\frac{1}{6}$.

13. $2\sqrt{13}$ 【解析】本题考查平面向量的数量积，考查运算求解能力.

因为$a\perp b$，所以$-4\times 3+2x=0$，得$x=6$，故$|a|=\sqrt{(-4)^2+6^2}=2\sqrt{13}$.

14. -1 【解析】本题考查三角恒等变换，考查化归与转化的数学思想以及数学运算的核心素养.

因为$\tan(\pi-2\alpha)=\frac{4}{3}$，所以$\tan 2\alpha=-\frac{4}{3}$.

因为$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$，所以$2\tan^2\alpha-3\tan\alpha-2=0$，所以$\tan\alpha=2$或$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.

因为α为钝角，$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，所以$\cos^2\alpha+\sin 2\alpha-1=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-1$.

15. $6+9\sqrt{2}$；$\sqrt{2}$ 【解析】本题考查解三角形，考查运算求解能力.

因为$\cos B=\frac{4}{5}$，所以$\sin B=\frac{3}{5}$. 因为$\sin A=\frac{1}{3}$，$a=5$，所以$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=9$. 因为$\sin A=\frac{1}{3}$，$a<b$，所以$\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 因为$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{4+6\sqrt{2}}{15}$，所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 5\times 9\times\frac{4+6\sqrt{2}}{15}=6+9\sqrt{2}$. 因为$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=4+6\sqrt{2}$，所以$\triangle ABC$的周长$l=18+6\sqrt{2}$. 设其内切圆的

16. $(0,\frac{\pi}{6}]$ 【解析】本题考查复合函数的单调性，考查逻辑推理的核心素养.

由题意知当 $x\in[0,1]$ 时，$x^2\sin\theta-x+\cos\theta>0$ 恒成立，所以 $\cos\theta>0$，且 $\sin\theta+\cos\theta-1>0$，所以 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\sin\theta>0$. 要使 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是单调函数，需满足 $\frac{1}{2\sin\theta}\geq 1$，所以 $0<\sin\theta\leq\frac{1}{2}$，故 $\theta\in(0,\frac{\pi}{6}]$.

17. (1)证明：由 $a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$，得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$. …………………… 3分

因为 $\frac{a_1}{2^1}=2$，所以数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 是以 2 为首项，1 为公差的等差数列. …………………… 5分

(2)解：因为 $\frac{a_n}{2^n}=2+(n-1)\times 1=n+1$，所以 $a_n=(n+1)\cdot 2^n$，…………………… 6分

所以 $S_n=2\times2^1+3\times2^2+\cdots+n\times2^{n-1}+(n+1)\times2^n$，① …………………… 7分

$2S_n=2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n+(n+1)\times2^{n+1}$，② …………………… 8分

①－②得 $-S_n=2\times2^1+2^2+\cdots+2^n-(n+1)\times2^{n+1}=-n\cdot2^{n+1}$，…………………… 9分

所以 $S_n=n\cdot2^{n+1}$. …………………… 10分

18. 解：(1)因为函数 $f(x)$ 图象的对称轴与相邻对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$，

所以最小正周期 $T=\pi$，故 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$. …………………… 3分

因为 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

故 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. …………………… 6分

(2)当 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\frac{3}{5}$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，因为 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\cos2\alpha=-\frac{3}{5}$，所以 $\cos2\alpha=\frac{3}{5}$. …………………… 8分

因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\sin2\alpha=\frac{4}{5}$，…………………… 10分

所以 $f(\alpha+\frac{\pi}{3})=2\sin[2(\alpha+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{6}]=2\sin(2\alpha+\frac{5\pi}{6})=2\sin2\alpha\cos\frac{5\pi}{6}+2\cos2\alpha\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{3-4\sqrt{3}}{5}$. …… 12分

19. 解：(1)由题意可知当 $m=0$ 时，$x=1.5$，由 $1.5=2.5-\frac{k}{1}$，得 $k=1$，

所以 $x=2.5-\frac{1}{m+1}$. …………………… 2分

因为每件产品的销售价格为 $2\times\frac{10+25x}{x}$(元)，

所以 $y=2x\cdot\frac{10+25x}{x}-10-25x-m=25x+10-m=\frac{145}{2}-\frac{25}{m+1}-m$，

即 y 关于 m 的函数表达式为 $y=\frac{145}{2}-\frac{25}{m+1}-m$，$m\geq0$. …………………… 6分

(2)因为 $m\geq0$，所以 $\frac{25}{m+1}+m+1\geq2\sqrt{\frac{25}{m+1}\times(m+1)}=10$，即 $\frac{25}{m+1}+m\geq9$，…………………… 8分

所以 $y\leq\frac{145}{2}-9=\frac{127}{2}$. …………………… 10分

当且仅当 $\frac{25}{m+1}=m+1$，即 $m=4$ 时等号成立，$y_{max}=\frac{127}{2}$(万元).

故当该厂家投入的年促销费用为 4 万元时，年利润最大，且最大值为 $\frac{127}{2}$ 万元. …………………… 12分

20. 解：(1) $f'(x)=\frac{e^x(x-a)}{x^{a+1}}$， ………… 1分

当 $a\leq 0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； ………… 3分

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. ………… 5分

(2) 当 $a=2$ 时，$f(x)=\frac{e^x}{x^2}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}(x>0)$. ………… 6分

设切点为 $(x_0,f(x_0))$，则切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，

即 $y-\frac{e^{x_0}}{x_0^2}=\frac{e^{x_0}(x_0-2)}{x_0^3}(x-x_0)$. ………… 8分

将 $(2,0)$ 代入，得 $-\frac{e^{x_0}}{x_0^2}=\frac{e^{x_0}(x_0-2)}{x_0^3}(2-x_0)$，解得 $x_0=1$ 或 4. ………… 11分

因为 $f(1)=e$，$f(4)=\frac{e^4}{16}$，且结合图象（图略）可知，两条切线与曲线 $y=f(x)$ 分别只有一个公共点，

所以曲线 $y=f(x)$ 过点 $(2,0)$ 的切线与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标为 $(1,e)$ 和 $(4,\frac{e^4}{16})$. ………… 12分

21. (1) 解：因为 $PA\perp$ 底面 ABC，$PA=AC=2$，所以 $PC=2\sqrt{2}$. ………… 1分

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$，所以 $AB=2\sqrt{3}$. ………… 2分

在 Rt$\triangle PAB$ 中，由勾股定理得 $PB=4$. ………… 3分

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\frac{\pi}{6}=4$， ………… 4分

所以 $BC=2$. ………… 5分

在 $\triangle PBC$ 中，$\cos\angle PBC=\frac{PB^2+BC^2-PC^2}{2PB\cdot BC}=\frac{3}{4}$. ………… 6分

(2) 证明：将三棱锥 $P-ABC$ 按下图展开. ………… 7分

则 $\triangle ACM$ 周长 l 的最小值为 $AC+AC_1$. ………… 8分

由(1)可知 $\angle AB_1P=\frac{\pi}{6}$，$\cos\angle PB_1C_1=\frac{3}{4}$，$\sin\angle PB_1C_1=\frac{\sqrt{7}}{4}$， ………… 9分

所以 $\cos\angle AB_1C_1=\cos(\frac{\pi}{6}+\angle PB_1C_1)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{8}$. ………… 10分

在 $\triangle AB_1C_1$ 中，$AC_1^2=AB_1^2+B_1C_1^2-2AB_1\cdot B_1C_1\cdot\cos\angle AB_1C_1$，所以 $AC_1=\sqrt{7+\sqrt{21}}$. ………… 11分

因为 $\sqrt{21}>4$，所以 $7+\sqrt{21}>11$，所以 $AC_1>3$，故 $l>5$. ………… 12分

22. 解：(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$，$f'(x)=x+1$. ………… 1分

因为 $f(1)=\frac{3}{2}$，$f'(1)=2$， ………… 2分

所以所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=2(x-1)$，即 $4x-2y-1=0$. ………… 4分

(2) 由题意知 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax-(a+1)\ln x$ ……

则 $g'(x)=x+a-\frac{a+1}{x}=\frac{(x-1)(x+a+1)}{x}(x>0)$. ………………………………………… 5 分

①当 $a+1\geq 0$, 即 $a\geq -1$ 时, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为当 $x\to 0$ 时, $g(x)\to +\infty$, 且 $g(2)=2+2a-(a+1)\ln 2=(a+1)(2-\ln 2)\geq 0$.

所以要使 $g(x)$ 有两个零点, 需 $g(1)=\frac{1}{2}+a<0$, 解得 $-1\leq a<-\frac{1}{2}$. ………………………… 7 分

②当 $a=-2$ 时, 因为 $g'(x)\geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x)$ 不可能有两个零点. …… 8 分

③当 $-1<a+1<0$, 即 $-2<a<-1$ 时, $g(x)$ 在 $(0,-a-1)$ 上单调递增, 在 $(-a-1,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为当 $x\to 0$ 时, $g(x)\to -\infty$; 当 $x\to +\infty$ 时, $g(x)\to +\infty$, 且 $g(1)=a+\frac{1}{2}<0$.

所以要使 $g(x)$ 有两个零点, 需 $g(-a-1)=0$. ………………………………………… 9 分

因为 $g(-a-1)=\frac{1}{2}(a+1)^2-a(a+1)-(a+1)\ln(-a-1)=(a+1)\left[\frac{1-a}{2}-\ln(-a-1)\right]$,

所以 $\frac{1-a}{2}-\ln(-a-1)=0$.

令 $m(a)=\frac{1-a}{2}-\ln(-a-1)$, $a\in(-2,-1)$, 则 $m'(a)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{a+1}=-\frac{a+3}{2(a+1)}>0$.

所以 $m(a)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递增.

因为 $m(a)>m(-2)=\frac{3}{2}>0$, 所以 $g(x)$ 不可能有两个零点. ………………………………………… 10 分

④当 $a+1<-1$, 即 $a<-2$ 时, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,-a-1)$ 上单调递减, 在 $(-a-1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $g(1)=a+\frac{1}{2}<0$, 所以 $g(x)$ 不可能有两个零点. ………………………………………… 11 分

综上, 当 $a\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right)$ 时, $g(x)$ 恰有两个零点. ………………………………………… 12 分