# 2020北京高三模拟试卷（二）

## 数学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

学号：　　姓名：　　班级：　　学校：

密……封……线……内……不……要……答……题

## 第一部分（选择题 共 40 分）

**一、选择题共 10 题，每题 4 分，共 40 分。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

1. 已知集合 $A=\{x|x^2=1\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cup B=$（　）．

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

【答案】

D

解析:

集合 $A=\{x|x^2=1\}=\{1,-1\}$，$B=\{0,1,2\}$，

所以 $A\cup B=\{-1,0,1,2\}$，

故选 D．

2. 复数 $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点位于（　）．

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】

B

解析:

$z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{-1+3\mathrm{i}}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，

$z=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，在第二象限．

故选 B．

3. 若 $a=\mathrm{e}^{0.5}$，$b=\log_{\pi}\mathrm{e}$，$c=\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$，则（　）．

A. $a > b > c$　　B. $b > a > c$　　C. $c > a > b$　　D. $b > c > a$

【答案】

A

解析:

$a > 1$，$0 < b < 1$，$c < \ln 1 = 0$，所以 $a > b > c$ .

4. 将函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$的图象先向左平移 $\frac{\pi}{6}$，然后将所得图象上所有的点的横坐标变为原来的 2倍（纵坐标不变），则所得到的图象对应的函数解析式为（　）.

A. $y = -\cos x$　　B. $y = \sin 4x$　　C. $y = \sin x$　　D. $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$

【答案】

C

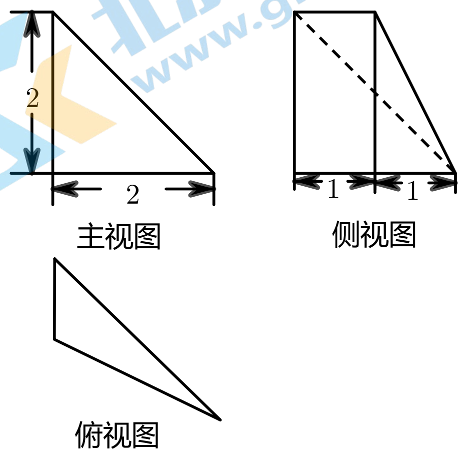
解析:

将函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$的图象先向左平移 $\frac{\pi}{6}$，

得到函数 $y = \sin[2(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{3}] = \sin(2x)$，然后将所得图象上所有的点的横坐标变为原来的 2倍

（纵坐标不变）得到 $y = \sin x$，故选 C .

5. 四棱锥的三视图如图所示，则其体积为（　）.



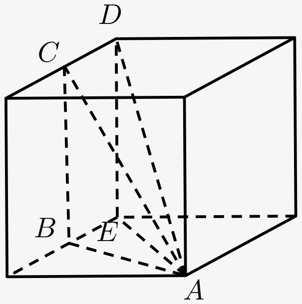

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $2$　　D. $\frac{8}{3}$

【答案】

B

解析:

三视图还原如图所示，




所以 $V=\frac{1}{3}\times 1\times 2\times 2=\frac{4}{3}$ .

6. $f(x)$， $g(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数， $h(x)=f(x)+g(x)$，则“$f(x)$， $g(x)$均为奇函数”是“$h(x)$为奇函数”的（ ）.

A. 充要条件

B. 充分而不必要的条件

C. 必要而不充分的条件

D. 既不充分也不必要的条件

【答案】

B

解析:

若 $f(x)$， $g(x)$均为奇函数， $h(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-h(x)$，所以 $h(x)$为奇函数；

若 $h(x)$为奇函数，如 $h(x)=x$， $f(x)=x^2+x$， $g(x)=-x^2$，显然 $f(x)$， $g(x)$均不为奇函数；

所以“$f(x)$， $g(x)$均为奇函数”是“$h(x)$为奇函数”的充分而不必要的条件．

故选：B．

7. 双曲线$C$： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的离心率为$2$，焦点到渐近线的距离为$\sqrt{3}$，则$C$的焦距等于（ ）.

A. $4$

B. $3$

C. $2$

D. $4\sqrt{2}$

【答案】

A

解析:

由双曲线$C$： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，

由 $C$的焦点 $(c,0)$到其渐近线 $bx+ay=0$的距离为 $\sqrt{3}$，

可得 $\dfrac{|bc+0|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\dfrac{bc}{c}=b=\sqrt{3}$，

又因为 $e=\dfrac{c}{a}=2$，又 $c^2=a^2+b^2$，解得 $a=1$， $c=2$，

所以 $C$的焦距为 $2c=4$ .

故选 A .

8. 在 $\triangle ABC$中，若 $\dfrac{\sin C}{\sin A}=3$， $b^2-a^2=\dfrac{5}{2}ac$，则 $\cos B$的值为（ ）.

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

【答案】

D

解析:

在 $\triangle ABC$中，$\because \dfrac{\sin C}{\sin A}=3$，

$\therefore \dfrac{c}{a}=3$，

$\therefore c=3a$，

代入 $b^2-a^2=\dfrac{5}{2}ac$，

解得 $b^2=\dfrac{17a^2}{2}$，

则 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+9a^2-\frac{17}{2}a^2}{2a\cdot 3a}=\dfrac{1}{4}$ .

故选 D .

9. 过直线 $y=x$上的一点作圆 $(x-5)^2+(y-1)^2=2$的两条切线 $l_1$， $l_2$，当直线 $l_1$， $l_2$关于 $y=x$对称时，它们之间的夹角为（ ）.

A. $30^\circ$　　B. $45^\circ$　　C. $60^\circ$　　D. $90^\circ$

【答案】

C

解析:

方法一：

设过直线 $y=x$上一点 $P$作圆的切线，圆心为 $Q(5,1)$，

$\because$直线 $l_1$、 $l_2$关于 $y=x$对称，

$\therefore$直线 $PQ$与 $l: y=x$垂直，

点 $Q$到直线 $l$的距离 $d=\dfrac{|5-1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

又圆的半径为 $\sqrt{2}$，

$\therefore l_1$、 $l_2$与直线 $PQ$的夹角均是 $30^\circ$，

$\therefore l_1$与 $l_2$的夹角为 $2\times30^\circ=60^\circ$，

故选 C．

方法二：

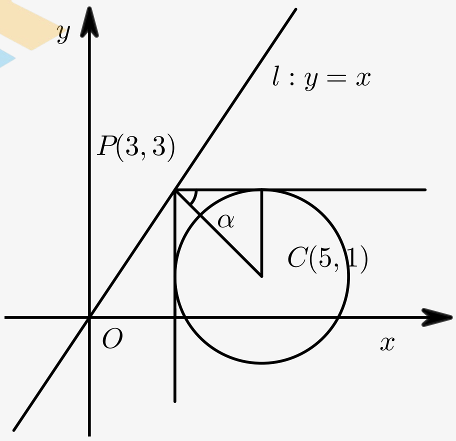
$CP\perp l$，$C(5,1)$，$k_{CP}=-1$，

$\therefore x=3$，$\therefore P(3,3)$，

$\therefore |CP|=2\sqrt{2}$，

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$夹角为 $60^\circ$．




故选 C．

10. 甲乙两人做如下一种游戏：首先由甲想好一个没有重复数字的三位数，然后由乙来猜测．乙每次都猜一个三位数，然后甲会给乙一个提示 $x+y$，其中 $x$表示位置正确的数的个数，$y$表示数字正确而位置错误的数的个数，例如：甲想的数是 $135$，乙猜 $123$，则甲会告诉乙 $1+1$（其中乙猜的数字 $1$是“位置正确”，数字 $3$是“数字正确而位置错误”）．现已知乙猜的前 $4$次的结果如下：由此可以推断（　）．

| 乙的猜想 | 结果 |
|---|---|
| 123 | $1+0$ |
| 456 | $1+0$ |
| 789 | $0+1$ |
| 147 | $1+1$ |

A. 可以唯一确定甲想的三位数是什么

B. 不能唯一确定甲想的三位数是什么，但是其中一定包含数字 $7$

C. 不能唯一确定甲想的三位数是什么，但是其中一定包含数字 $4$

D. 不能唯一确定甲想的三位数是什么，但是其中一定包含数字 $1$

【答案】

B

解析:

甲想的数可能是 $176$或 $427$ .

## 第二部分（非选择题 共 110 分）

**二、填空题共 5 题，每题 5 分，共 25 分。**

11. 已知点 $A(1,1)$，点 $B(-2,5)$，则与 $\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量为 ______ .

【答案】

$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

解析:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3,4)$，

$\therefore$与 $\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量 $=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{(-3,4)}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ .

故答案为：$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ .

12. 记者要为 $3$位老人和为他们服务的 $5$名志愿者拍照，要求排成一排， $3$位老人任意两位不相邻且均不排在两端，不同的排法共有 ______ （用数字作答）.

【答案】

$2880$

解析:

插空法，先排列5名志愿者，然后再将3名老人插入4个空中，

所以有 $A_5^5A_4^3=2880$种排法．

13. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-1$，其中 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则函数 $f(x)$的零点个数是______．

【答案】

2

解析:

由 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-1$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}-1=\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

可得零点有两个：0，$\frac{2\pi}{3}$．

14. 抛物线 $y^2=2px$与直线 $ax+y-4=0$交于两点 $A$、$B$，其中点 $A$的坐标是 $(1,2)$，设抛物线的焦点 $F$，则 $|FA|+|FB|=$______．

【答案】

7

解析:

将 $A(1,2)$代入抛物线 $y^2=2px$，得 $2p=4$，$\therefore y^2=4x$．

又把 $A(1,2)$代入 $ax+y-4=0$得 $a=2$，$\therefore$直线方程 $y=-2x+4$．

由 $\begin{cases}y^2=4x\\y=-2x+4\end{cases}$得 $x^2-5x+4=0$，$\therefore x_A+x_B=5$，

$\therefore|FA|+|FB|=x_A+x_B+p=5+2=7$．

15. 若函数 $y=f(x)$满足：对于 $y=f(x)$图象上任意一点 $P$，在其图象上总存在点 $P'$，使得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=0$成立，称函数 $y=f(x)$是“特殊对点函数”．给出下列五个函数：

① $y=x^{-1}$；② $y=e^x-2$（其中e为自然对数的底数）；③ $y=\ln x$；④ $y=\sin x+1$；

⑤ $y=\sqrt{1-x^2}$．

其中是“特殊对点函数”的序号是______．

【答案】

②④⑤

解析:

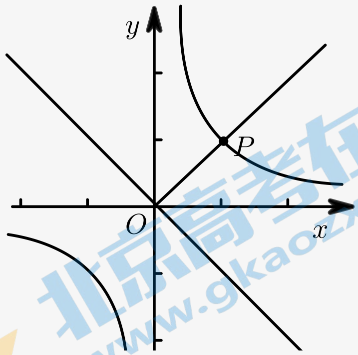
设点 $P\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$，点 $P'\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$，

由 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=0$，得 $x_1x_2+f(x_1)f(x_2)=0$，

即 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OP'}$；

对于①，当 $P\left(1,1\right)$时，满足 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OP'}$的 $P'\left(-1,1\right)$不在 $f(x)$的图象上，

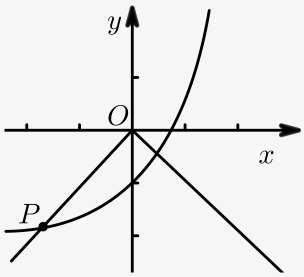
∴①不是“特殊对点函数”，如图所示；




对于②，作出函数 $y=\mathrm{e}^x-2$的图象，如图所示，

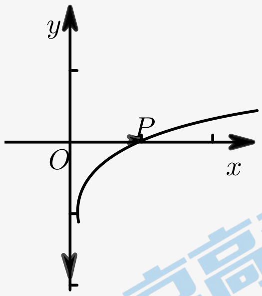
由图象知满足 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OP'}$的点 $P'\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$都在 $y=f(x)$图象上，

∴②是“特殊对点函数”；




对于③，如图所示，当取点 $P\left(1,0\right)$时，满足 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OP'}$的 $P'$不在 $f(x)$的图象上，

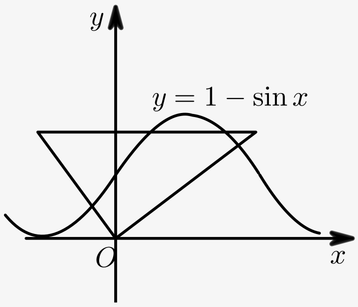
∴③不是“特殊对点函数”；




对于④，作出函数 $y=\sin x+1$的图象如图所示，由图象知，

满足 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OP'}$的点 $P'\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$都在 $y=f(x)$图象上，

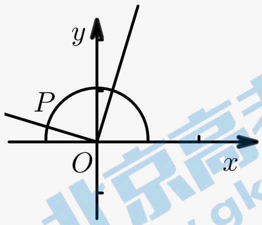
∴④是“特殊对点函数”；




对于⑤，作出函数$y=\sqrt{1-x^2}$的图象如图所示，由图象知，

满足$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OP'}$的点$P'(x_2, f(x_2))$都在$y=f(x)$图象上，

∴⑤是“特殊对点函数”．



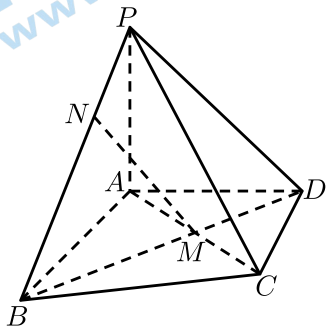

综上，正确的命题序号是②④⑤．

故答案为：②④⑤．

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或有错选得0分，其他得 3 分。

**三、解答题共 6 题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。**

16. (14分) 在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$\triangle ABC$是正三角形，$AC$与$BD$的交点$M$恰好是$AC$中点，又$PA=AB=4$，$\angle CDA=120^\circ$，点$N$在线段$PB$上，且$PN=\sqrt{2}$．




（1）求证：$MN//$平面$PDC$．

（2）求二面角$A-PC-B$的余弦值．

【答案】

（1）证明见解析．

（2）$\frac{\sqrt{7}}{7}$．

解析:

( 1 ) 在正三角形 $ABC$中， $BM=2\sqrt{3}$，

在 $\triangle ACD$中，$\because M$为 $AC$中点， $DM\perp AC$，

$\therefore AD=CD$，

又 $\angle CDA=120^\circ$，

$\therefore DM=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \dfrac{BM}{MD}=\dfrac{3}{1}$．

在等腰直角三角形 $PAB$中， $PA=AB=4$，

$\therefore PB=4\sqrt{2}$，

$\therefore \dfrac{BN}{NP}=\dfrac{3}{1}$，

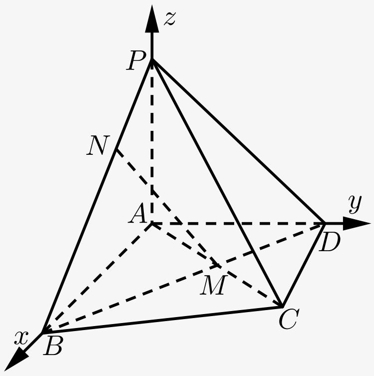
$\therefore \dfrac{BN}{NP}=\dfrac{BM}{MD}$，

$\therefore MN//PD$．

又 $MN\not\subset$平面 $PDC$， $PD\subset$平面 $PDC$，

$\therefore MN//$平面 $PDC$．

( 2 )




$\because \angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=90^\circ$，

$\therefore AB\perp AD$，分别以 $AB$， $AD$， $AP$P为 $x$轴， $y$轴， $z$轴建立如图的空间直角坐标系，

$\therefore B(4,0,0)$， $C(2,2\sqrt{3},0)$， $D\left(0,\dfrac{4\sqrt{3}}{3},0\right)$， $P(0,0,4)$，

由 (1)可知， $\overrightarrow{DE}=\left(4,-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},0\right)$为平面 $PAC$的法向量， $\overrightarrow{PC}=(2,2\sqrt{3},-4)$，

$\overrightarrow{PB}=(4,0,-4)$，

设平面 $PBC$的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x+2\sqrt{3}y-4z=0\\ 4x-4z=0\end{cases}$，

令 $z=3$，解得 $x=3$， $y=\sqrt{3}$，

则平面 $PBC$的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(3,\sqrt{3},3)$，

设二面角 $A-PC-B$的大小为 $\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DB}}{\left|\overrightarrow{n}\right|\left|\overrightarrow{DB}\right|}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，

$\therefore$二面角 $A-PC-B$余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$ .

17. (14分) 在① $a_3=5$ , $a_2+a_5=6b_2$ ; ② $b_2=2$ , $a_3+a_4=3b_3$ ; ③ $S_3=9$ , $a_4+a_5=8b_2$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答 .

已知等差数列 $\{a_n\}$的公差为 $d\,(d>1)$ , 前 $n$项和为 $S_n$ , 等比数列 $\{b_n\}$的公比为 $q$ , 且 $a_1=b_1$ , $d=q$ .

( 1 ) 求数列 $\{a_n\}$ , $\{b_n\}$的通项公式 .

( 2 ) 记 $c_n=\frac{a_n}{b_n}$ , 求数列 $\{c_n\}$的前 $n$项和 $T_n$ .

【答案】

( 1 ) $a_n=2n-1$ , $b_n=2^{n-1}$ .

( 2 ) $T_n=6-(2n+3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

解析:

( 1 ) 方法一：

选条件①

$\because a_3=5$ , $a_2+a_5=6b_2$ , $a_1=b_1$ , $d=q$ , $d>1$ ,

$\therefore\begin{cases}a_1+2d=5\\2a_1+5d=6a_1d\end{cases}$ .

解得 $\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=\frac{25}{6}\\d=\frac{5}{12}\end{cases}$ (舍去) ,

$\therefore\begin{cases}b_1=1\\q=2\end{cases}$ .

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$ ,

$b_n=b_1q^{n-1}=2^{n-1}$ .

方法二：

选条件②

$\because b_2=2$ , $a_3+a_4=3b_3$ , $a_1=b_1$ , $d=q$ , d>1 ,

$\therefore\begin{cases}a_1d=2\\2a_1+5d=3a_1d^2\end{cases}$ ,

$\therefore\begin{cases}a_1d=2\\2a_1+5d=6d\end{cases}$ ,

解得、 $\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=-1\\d=-2\end{cases}$ (舍去)

$\therefore\begin{cases}b_1=1\\q=2\end{cases}$ ,

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$

$= 2n - 1$,

$b_n = b_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$.

方法三：

选条件③

$\therefore S_3 = 9$，$a_4 + a_5 = 8b_2$，$a_1 = b_1$，$d = q$，d>1，

$\therefore \begin{cases} a_1 + d = 3 \\ 2a_1 + 7d = 8a_1 d \end{cases}$

解 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = \dfrac{21}{8} \\ d = \dfrac{3}{8} \end{cases}$（舍去），

$\begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$，

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$

$= 2n - 1$，

$b_n = b_1 q^{n-1}$

$= 2^{n-1}$.

（2）$\because c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$，

$\therefore c_n = \dfrac{2n-1}{2^{n-1}} = (2n-1) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$\therefore T_n = 1 + 3 \times \dfrac{1}{2} + 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (2n-3) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} + (2n-1) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$\therefore \dfrac{1}{2}T_n = \dfrac{1}{2} + 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (2n-3) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + (2n-1) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$\therefore \dfrac{1}{2}T_n = 1 + 2\left[\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right] - (2n-1) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$= 1 + 2 \times \dfrac{\dfrac{1}{2}\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1 - \dfrac{1}{2}} - (2n-1) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$= 3 - (2n+3) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$\therefore T_n = 6 - (2n+3) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

18.（14分）某学校高一、高二、高三三个年级共有300名教师，为调查他们的备课时间情况，通过分层抽样获得了20名教师一周的备课时间，数据如下表（单位：小时）：

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 高一年级 | 7 | 7.5 | 8 | 8.5 | 9 | | | |
| 高二年级 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | |
| 高三年级 | 6 | 6.5 | 7 | 8.5 | 11 | 13.5 | 17 | 18.5 |

（1） 试估计该校高三年级的教师人数．

（2） 从高一年级和高二年级抽出的教师中，各随机选取一人，高一年级选出的人记为甲，高二年级选出的人记为乙，假设所有教师的备课时间相对独立，求该周甲的备课时间不比乙的备课时间长的概率．

（3） 再从高一、高二、高三三个年级中各随机抽取一名教师，他们该周的备课时间分别是 $8$、 $9$、 $10$（单位：小时），这三个数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为 $\bar{x}_1$，表格中的数据平均数记为 $\bar{x}_0$，试判断 $\bar{x}_0$与 $\bar{x}_1$的大小．（结论不要求证明）

【答案】

（1）$120$．

（2）$P=\dfrac{29}{35}$．

（3）$\bar{x}_1<\bar{x}_0$．

解析:

（1）抽出的 $20$位教师中，来自高三年级的有 $8$名，

根据分层抽样方法，高三年级的教师共有 $300\times\dfrac{8}{20}=120$（人）．

（2）从高一、高二年级分别抽取一人，共有 $35$种基本结果，

其中甲该周备课时间比乙长的结果有：

$(7.5,7)$，$(8,7)$，$(8.5,7)$，$(8.5,8)$，$(9,7)$，$(9,8)$，共 $6$种，

故该周甲的备课时间不比乙的备课时间长的基本结果有 $35-6=29$种，

$\therefore$该周甲的备课时间不比乙的备课时间长的概率 $P=\dfrac{29}{35}$．

（3）$\bar{x}_1<\bar{x}_0$．

19. （14分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的左右焦点分别为 $F_1,F_2$，过直线 $x=-1$上一点 $M$作直线 $l$与椭圆相交于 $A$、 $B$两点，且 $M$为线段 $AB$中点．

（1） 若直线 $l$垂直于 $x$轴，求线段 $|AB|$长度；

（2） 求证：若 $l$不经过 $F_1$点，则直线 $F_1A$、 $l$、 $F_1B$的斜率依次成等差数列．

【答案】

（1）$3$．

（2）证明见解析．

解析:

（ 1 ）依题 $AB$两点坐标分别为 $A(-1,\frac{3}{2})$， $B(1,\frac{3}{2})$故 $|AB|=3$．

（ 2 ）因为直线 $l$不过椭圆左焦点，故 $l$斜率存在，不妨设为 $k$，

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，直线 $l$方程为 $y=kx+m$

所以 $k_{F_1A}+k_{F_1B}=\frac{y_1}{x_1+1}+\frac{y_2}{x_2+1}$

$=\frac{y_1(x_2+1)+y_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$=\frac{(kx_1+m)(x_2+1)+(kx_2+m)(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$=\frac{2kx_1x_2+(k+m)(x_1+x_2)+2m}{x_1x_2+x_1+x_2+1}$

$=\frac{2kx_1x_2+(k+m)(-2)+2m}{x_1x_2-1}$

$=2k$

所以直线 $F_1A$、 $l$、 $F_1B$的斜率依次成等差数列．

20. （15分）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}ax^2$ ．

（ 1 ） 求 $f(x)$在 $x=0$处的切线方程．

（ 2 ） 设 $a>\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，求证：当 $x\in(-1,0)$时， $f(x)$存在唯一的极值点，且 $f(x)>\frac{3}{2\mathrm{e}}$恒成立．

【答案】

（ 1 ） $y=x+1$．

（ 2 ）证明见解析．

解析:

（ 1 ） $f'(x)=\mathrm{e}^x+ax$．因为 $f(0)=1$， $f'(0)=1$，

所以切线方程为 $y=x+1$．

（ 2 ） $f'(x)=\mathrm{e}^x+ax$．由于 $a>\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，所以 $f'(x)$单调递增．

又因为 $f'(-1)=\frac{1}{\mathrm{e}}-a<0$， $f'(0)=1>0$，

所以 $f'(x)$在 $(-1,0)$上存在唯一的变号零点，

即 $f(x)$在 $(-1,0)$上存在唯一的极值点．

设该极值点为 $x_0$（ $-1<x_0<0$ ），

则 $f'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}+ax_0=0$，

即 $a=-\frac{\mathrm{e}^{x_0}}{x_0}$．

| $x$ | $(-\infty,x_0)$ | $x_0$ | $(x_0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

| $f(x)$ | $\searrow$ | 极小值 | $\nearrow$ |
|---|---|---|---|

所以 $f_{\min}(x)=f(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{2}ax_0^2$ .

将 $a=\frac{e^{x_0}}{x_0}$ 代入得 $f_{\min}(x)=e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0e^{x_0}=e^{x_0}(1-\frac{x_0}{2})$ ,

设函数 $g(x)=e^x(1-\frac{x}{2})(-1<x<0)$ ,

则 $g'(x)=\frac{e^x(1-x)}{2}>0$ ,

因此函数 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，

于是 $g(x)>g(-1)=\frac{3}{2e}$ ，即 $f_{\min}(x)>\frac{3}{2e}$ ,

故 $f(x)>\frac{3}{2e}$ 恒成立 .

21. (14分) 若一个 $n$ 维向量的每一个分量都是自然数，则称这个向量为一个 $n$ 维“自然向量”．

设有一个 $n$ 维“自然向量” $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ ，其中 $a_i\in\mathbf{N},1\leqslant i\leqslant n$ .定义下面三种操作方式：

① $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)(a_1\neq0)$ ，则 $T_1(A)=(a_1-1,a_2+1,a_3,\cdots,a_n)$ ；

② $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)(a_n\neq0)$ ，则 $T_2(A)=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}+1,a_n-1)$ ；

③ $A=(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\cdots,a_n)(a_k\geqslant2)$ ，则 $T_{3,k}(A)=(a_1,\cdots,a_{k-1}+1,a_k-2,a_{k+1}+1,\cdots,a_n)$

.

（1） 对于一个3维“自然向量” $A=(3,0,0)$ ，求 $T_1(T_{3,2}(T_1(T_1(A))))$ .

（2） 试证明：一个 $n$ 维“自然向量” $A=(2,1,\cdots,1,0,a_{k+1}\cdots,a_n)$ ，可以经过有限次操作，变成 $n$ 维“自然向量” $A'=(1,1,\cdots,1,1,a_{k+1}\cdots,a_n)$ ，而且，向量中的其他数值均不变 .

（3） 试证明：任意一个 $n$ 维“自然向量” $A$ ，只要满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$ ，就能够经过有限次 $T_1,T_2,T_{3,k}$ 操作之后，得到 $n$ 维“自然向量” $\underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{n}$ .

【答案】

（1） $T_1(T_{3,2}(T_1(T_1(A))))=(1,1,1)$ .

（2）证明见解析 .

（3）证明见解析 .

解析:

（1）由题意，可得：

$A=(3,0,0)$ ，故有 $T_1(A)=(2,1,0)$ ， $T_1(T_1(A))=(1,2,0)$ ， $T_{3,2}(T_1(T_1(A)))=(2,0,1)$ ，

从而可得， $T_1(T_{3,2}(T_1(T_1(A))))=(1,1,1)$ .

（2）

执行操作 $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_{3,2}, \cdots, \mathrm{T}_{3,k-1}$之后，会得到向量 $\mathrm{A}_1 = (2, 1, \cdots, 1, 0, 1, a_{k+1} \cdots, a_n)$， 0的位置向前移动了一位，而其他数不变．

$k \geqslant 2$时，若对向量 $\mathrm{A}_1$再执行操作 $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_{3,2}, \cdots, \mathrm{T}_{3,k-2}$之后，会得到向量

$\mathrm{A}_2 = (2, 1, \cdots, 1, 0, 1, 1, a_{k+1} \cdots, a_n)$， 0的位置向前又移动了一位，而其他数也不变．

这样，以此类推，经过 $(k-1)$步操作之后， 0的位置向前移动了 $(k-1)$位，就会得到向量

$\mathrm{A}_{k-1} = (2, 0, 1, \cdots, 1, a_{k+1} \cdots, a_n)$，从而， $\mathrm{A}_k = \mathrm{T}_1(A_{k-1}) = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{k}, a_{k+1} \cdots, a_n)$满足要求．

（3）首先证明，对于任意一个 $n$维“自然向量” A，总可以经过有限步 $\mathrm{T}_2$和 $\mathrm{T}_{3,k}$的操作，得到“自然向量” $B = (b_1, \cdots, b_n)$，且满足 $b_k \leqslant 1, \forall k \geqslant 2, k \in \mathrm{N}^*$．

设对于“自然向量” $\mathrm{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，定义 $f(A) = a_1 n^2 + a_2 (n-1)^2 + \cdots + a_n \cdot 1^2$.

则有， $f(T_2(A)) = a_1 n^2 + a_2 (n-1)^2 + \cdots +$

$(a_{n-1}+1) \cdot 2^2 + (a_n - 1) \cdot 1^2$，

因此， $f(T_2(A)) - f(A) = 4 - 1 = 3 > 0$；

$f(T_{3,k}(A)) = a_1 n^2 + \cdots + (a_{k-1}+1) \cdot (n-k+2)^2 + (a_k - 2) \cdot (n-k+1)^2 + (a_{k+1}+1) \cdot (n-k)^2$

$+ \cdots + a_n \cdot 1^2,$

从而， $f(T_{3,k}(A)) - f(A) = (n-k+2)^2 -$

$2(n-k+1)^2 + (n-k)^2 = 2 > 0$

因此，不论是经过 $\mathrm{T}_2$还是 $\mathrm{T}_{3,k}$的操作，函数 $f$的值都会增大，但 $f$的值有上界，因此这样的操作只能进行有限多次，最终得到 $B = (b_1, \cdots, b_n)$，且满足 $b_k \leqslant 1, \forall k \geqslant 2, k \in \mathrm{N}^*$．

然后，再证明可以从“自然向量” $B = (b_1, \cdots, b_n)$得到“自然向量” $(\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n})$．

若 $b_k = 1, \forall k \geqslant 2, k \in \mathrm{N}^*$成立，则结论得证．

若不然，则必 $\exists k \in \mathrm{N}^*, k \geqslant 2$使得 $b_k = 0$，此时 $b_1 \geqslant 2$.取所有满足 $b_k = 0$的 $k$值中最小的一个，记为 $k_0$.由 (2)的结论知，可以经过有限步操作，将 $B = (b_1, \cdots b_{k_0}, \cdots, b_n)$变为

$B' = (b_1 - 1, \cdots 1, \cdots, b_n)$．

若此时满足 $\mathrm{B}' = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n})$，则结论得证，若不然，重复上述过程，至多 $n-1$次之后，一定可以将后面所有的分量调整为 1.此时，由于这些分量的和是 $n$，第一个分量的值也是 1，结论得证．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。