2021 北京工大附中高二（上）期中

数　　学

命题人：谢辉　　审核人：肖志军

（考试时间 120 分钟，总分 150 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的）

1．若直线经过 $A\ 1,0$ ，$B(4,3)$ 两点，则直线 AB 的倾斜角为

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．120°

2．已知点 $A(x,1,2)$ 和点 $B(2,3,4)$，且 $|AB|=2\sqrt{6}$，则实数 x 的值是

A．6 或 -2　　B．6 或 2　　C．3 或 -4　　D．-3 或 4

3．过点 $P(1,-1)$ 且垂直于 $l:x-2y+1=0$ 的直线方程为

A．$x+2y+1=0$　　B．$2x+y-1=0$　　C．$x-2y-3=0$　　D．$2x-y+3=0$

4．已知双曲线的下、上焦点分别为 $F_1(0,-3)$，$F_2(0,3)$，P 是双曲线上一点且 $\left||PF_1|-|PF_2|\right|=4$，则双曲线的标准方程为

A．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$　　B．$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　C．$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{5}=1$　　D．$\dfrac{y^2}{5}-\dfrac{x^2}{4}=1$

5．点 A 为圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上的动点，PA 是圆的切线，$|PA|=1$，则点 P 的轨迹方程是

A．$(x-1)^2+y^2=4$　　B．$(x-1)^2+y^2=2$　　C．$(x+1)^2+y^2=4$　　D．$(x+1)^2+y^2=2$

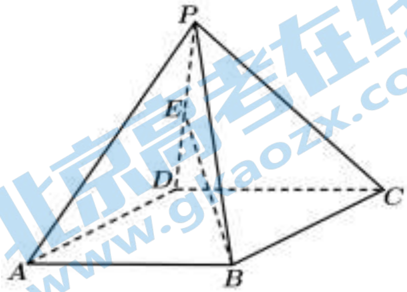
6．椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的中心 O 与一个焦点 F 及短轴的一个端点 B 组成等腰直角三角形 FBO，则椭圆的离心率是

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，已知 $\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{PE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PD}$，则 $\overrightarrow{BE}=$

A. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

C. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　D. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$



8．若椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）满足$2b=a+c$，则该椭圆的离心率$e=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

9．设 $p:mx^2+ny^2=1$表示的是椭圆；$q:m>0,n>0$，则 p 是q成立的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10.正方体 $A_1A_2A_3A_4-B_1B_2B_3B_4$ 的棱长为 1，则集合$\{x\mid x=\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_iB_j},i,j\in\{1,2,3,4\}\}$中元素的个数为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

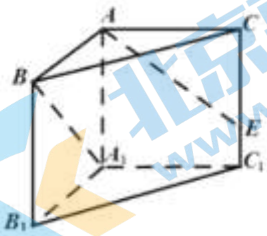
11.已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，过点$F_1$的直线$l$交椭圆于$M,N$两点，则$\Delta F_2MN$ 的周长为

__________.

12.已知平面 α 和平面 β 的法向量分别为$\vec{a}=(1,1,2)$，$\vec{b}=(x,-2,3)$，且 $\alpha\perp\beta$，则 $x=$________.

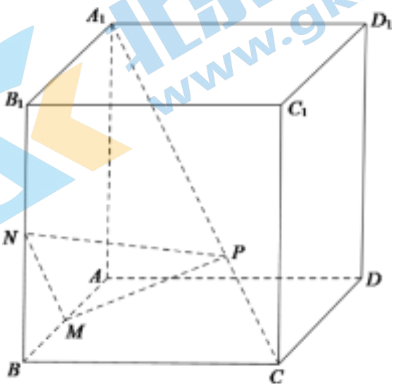
13.直线$x+2y-5=0$与圆$x^2+y^2=16$交于点 A，B 两点，则线段 AB 的长__________.

14.如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle BAC=90°$，$AA_1=A_1B_1=A_1C_1=4$，点 E 是棱CC_1上一点，且$\frac{C_1E}{CE}=\frac{1}{3}$，则异面直线$A_1B$与$AE$所成角的余弦值为________.



15.北京大兴国际机场的显著特点之一是各种弯曲空间的运用．刻画空间的弯曲性是几何研究的重要内容．用曲率刻画空间弯曲性，规定：多面体顶点的曲率等于2π与多面体在该点的面角之和的差（多面体的面的内角叫做多面体的面角，角度用弧度制），多面体面上非顶点的曲率均为零，多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和，例如：正四面体在每个顶点有 3 个面角，每个面角是$\frac{\pi}{3}$，所以正四面体在各顶点的曲率为$2\pi-3\times\frac{\pi}{3}=\pi$，故其总曲率为$4\pi$，则四棱锥的总曲率为______.

16. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M，N分别是棱AB，BB_1的中点，点P在对角线CA_1上运动．当$\triangle PMN$的面积取得最小值时，则$\frac{A_1P}{AC}=$______.



三、解答题（本大题共 5 个小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 15 分）

已知圆$C: x^2+y^2-6x-8y+21=0$，直线l过点$A(1,0)$.

（I）求圆C的圆心坐标及半径长；

（II）若直线l与圆C相切，求直线l的方程；

（III）当直线l的斜率存在且与圆C相切于点B时，求$|AB|$.

18. (本小题满分 13 分)

已知长轴长为$2\sqrt{2}$的椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的一个焦点为$\left(-1,0\right)$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 若斜率为1的直线l交椭圆C于A，B两点，且$|AB|=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，求直线l的方程.

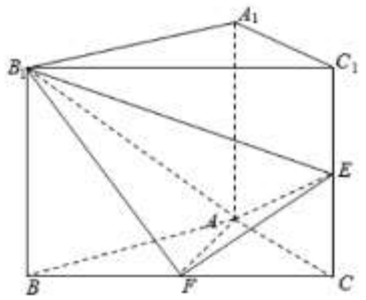
19.（本小题满分 15 分）

已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱垂直于底面，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=AA_1=1$，E、F分别是棱C_1C、BC的中点.

(I) 求证：$B_1F\perp$平面AEF;

(II) 求二面角$F-B_1E-A$的大小;

(III) 求点F到平面EAB_1的距离.



20.（本小题满分 13 分）

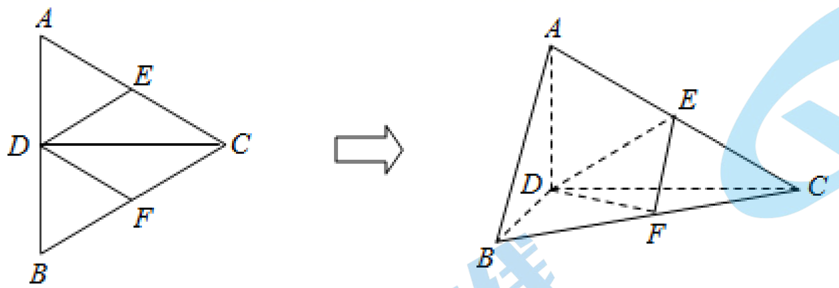
已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$过点$P\left(0,1\right)$，离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，直线$l:y=kx-2$与椭圆$C$交于点$P_1$，$P_2$，记直线$PP_1$，$PP_2$的斜率分别为$k_1$，$k_2$.

(I) 求椭圆C的方程;

(II) 求k_1k_2的值.

21．（本小题满分 14 分）

等边三角形 ABC 的边长为 4，CD 是 AB 边上的高，E、F 分别是 AC 和 BC 边的中点，现将 ΔABC 沿 CD 翻折成直二面角 $A\text{-}DC\text{-}B$.



（I）试判断直线 AB 与平面 DEF 的位置关系，并说明理由；

（II）求平面 DEF 和平面 CDF 夹角的余弦值；

（III）在线段 BC 上是否存在一点 P，使 $AP \perp DE$？若存在，请指出 P 点的位置，若存在，请说明理由.

2021 北京工大附中高二（上）期中数学

参考答案

1．B

【分析】

首先根据斜率公式求出斜率，再根据倾斜角与斜率的关系计算可得；

【详解】

解：因为 $A\ 1,0$ ，$B(4,3)$，所以 $k_{AB}=\dfrac{3-0}{4-1}=1$，设直线 AB 的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=1$，因为 $0^\circ\le\theta<180^\circ$，所以 $\theta=45^\circ$

故选：B

2．A

【分析】

利用空间两点间的距离公式求解.

【详解】

点 $A(x,1,2)$ 和点 $B(2,3,4)$，且 $|AB|=2\sqrt{6}$，

$\therefore\sqrt{(x-2)^2+(1-3)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{6}$，

化简得 $(x-2)^2=16$，解得 $x=6$ 或 $x=-2$，

$\therefore$ 实数 x 的值是 6 或 -2 .

故选：A

3．B

【分析】

求出直线 l 的斜率，再借助垂直关系的条件即可求解作答.

【详解】

直线 $l:x-2y+1=0$ 的斜率为 $k=\dfrac{1}{2}$，而所求直线垂直于直线 l，则所求直线斜率为 -2，

于是有： $y+1=-2(x-1)$，即 $2x+y-1=0$，

所以所求直线方程为$2x+y-1=0$.

故选：B

4．C

【分析】

求出实半轴的长、虚半轴的长后可得双曲线的标准方程.

【详解】

设双曲线的方程为：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，半焦距为$c$.

则$c=3$，$2a=4$，则$a=2$，

故$b^2=c^2-a^2=9-4=5$，所以双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$.

故选：C.

5．B

【分析】

由圆的切线性质，结合已知有P和圆心的距离恒为$\sqrt{2}$，设$P(x,y)$即可写出P的轨迹方程.

【详解】

$\because |PA|=1$，

$\therefore$点P和圆心的距离恒为$\sqrt{2}$，又圆心$(1,0)$，设$P(x,y)$，

$\therefore$由两点间的距离公式，得$(x-1)^2+y^2=2$.

故选：B

6．D

【分析】

设椭圆半焦距为 c，根据给定条件可得 $b=c$，再确定 a 与 c 的关系即可得解.

【详解】

设椭圆半焦距为 c，因椭圆的中心 O 与一个焦点 F 及短轴的一个端点 B 组成等腰直角三角形 FBO，则有 $b=c$，

而$a^2=b^2+c^2$，于是得$a=\sqrt{2}c$，

所以椭圆的离心率是$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：D

7．A

【分析】

利用空间向量的线性运算即可求解.

【详解】

因为在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{PE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BD}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

故选：A.

8．C

【分析】

由题意构建齐次式即可得到结果.

【详解】

由题意知 $2b=a+c$，又 $a^2=b^2+c^2$，

$\therefore 4\left(a^2-c^2\right)=\left(a+c\right)^2$

$\therefore 5e^2+2e-3=0$，即 $e=\frac{3}{5}$ 或 $e=-1$（舍），

故选:C.

9．A

【分析】

根据椭圆方程的特征以及充分条件必要条件的概念可得结果.

【详解】

若 $mx^2+ny^2=1$ 表示的是椭圆，则 $m>0,n>0$ 且 $m\neq n$，即 $p\Rightarrow q$ 成立；

反例：当 $m=n=1$ 时，$mx^2+ny^2=1$ 表示的是圆，即 $q\Rightarrow p$ 不成立；

即 p 是 q 成立的充分不必要条件，

故选：A.

10.D

【解析】熟悉向量数量积的几何意义的话，这道题就很简单，

∵ $\overrightarrow{A_iB_j}$ 在 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 方向上投影始终是 1，$\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_iB_j}=1$，选 D

11．12

【分析】

利用椭圆的定义求解.

【详解】

因为过点 F_1 的直线 l 交椭圆于 M,N 两点，

由椭圆的定义得：$|MF_1|+|MF_2|=2a=6,|NF_1|+|NF_2|=2a=6$，

所以 $\triangle F_2MN$ 的周长为 $(|MF_1|+|MF_2|)+(|NF_1|+|NF_2|)=12$，

故答案为：12

12．-4

【分析】

根据法向量垂直即可求出 x 的值.

【详解】

∵$\alpha\perp\beta$，∴$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即$1\times x+1\times(-2)+2\times3=0$，解得 $x=-4$.

故答案为：-4.

13．$2\sqrt{11}$.

【分析】

求出圆 $x^2+y^2=16$ 的圆心和半径，结合点到直线的距离公式求出圆心到直线的距离，然后结合圆的几何性质即可求出结果.

【详解】

圆 $x^2+y^2=16$ 的圆心为$(0,0)$，半径为 4，

则圆心到直线的距离为$\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，

所以线段AB的长为$2\sqrt{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=2\sqrt{11}$，

故答案为：$2\sqrt{11}$.

14．$\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

【分析】

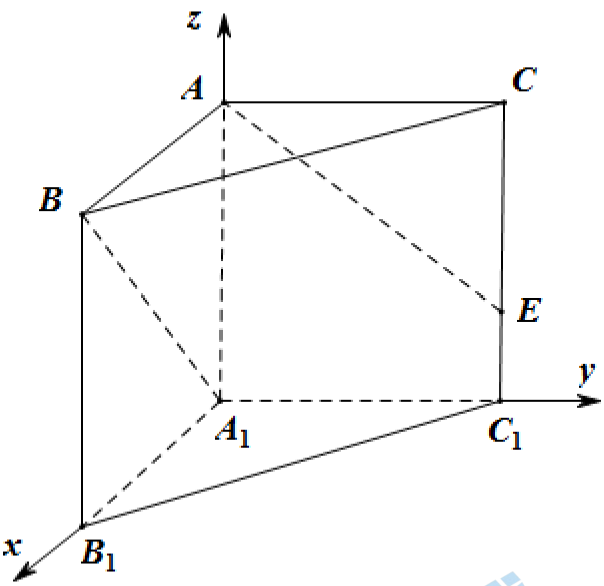
建立空间直角坐标系，利用空间向量法求出异面直线所成角的余弦值；

【详解】

解：如图建立空间直角坐标系，则$A_1(0,0,0)$，$B(4,0,4)$，$A(0,0,4)$，$E(0,4,1)$，所以$\overrightarrow{A_1B}=(4,0,4)$，

$\overrightarrow{AE}=(0,4,-3)$，设异面直线$A_1B$与$AE$所成角为$\theta$，则$\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AE}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|}=\dfrac{\left|4\times(-3)\right|}{\sqrt{4^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

故答案为：$\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$



15．4π

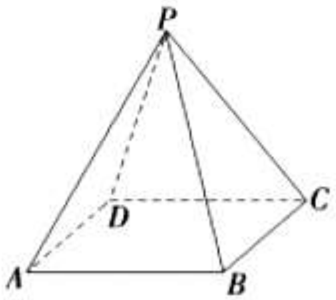
【分析】

由题意可知，四棱锥的总曲率等于四棱锥各顶点的曲率之和，可以从整个多面体的角度考虑，所有顶点相关的面角就是多面体的所有多边形表面的内角的集合，

【详解】

解：由图可知四棱锥有 5 个顶点，5 个面，其中 4 个三角形，1 个四边形，所以四棱锥的表面内角和由 4 个为三角形，1 个为四边形组成，所以面角和为$4\pi+2\pi=6\pi$，故总曲率为$5\times2\pi-6\pi=4\pi$.

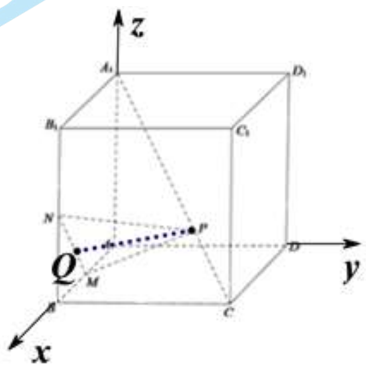
故答案为：4π.



16. $\frac{1}{2}$

【解析】设正方体的棱长为 1，以 A 为原点，AB, AD, AA_1 分别为x, y, z轴，建立空间直角坐标系，如图所示：

则$M(\frac{1}{2},0,0)$，$N(1,0,\frac{1}{2})$，MN 的中点 $Q(\frac{3}{4},0,\frac{1}{4})$，



$A_1(0,0,1)$，$C(1,1,0)$，则$\overrightarrow{A_1C}=(1,1,-1)$，设$P(t,t,z)$，$\overrightarrow{PC}=(1-t,1-t,-z)$，

由$\overrightarrow{A_1C}$与$\overrightarrow{PC}$共线，可得$\frac{1-t}{1}=\frac{1-t}{1}=\frac{-z}{-1}$，所以$t=1-z$，所以$P(1-z,1-z,z)$，其中$0\le z\le1$，因为

$$|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{(1-z-\frac{1}{2})^2+(1-z-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{3z^2-3z+\frac{5}{4}},$$

$$|\overrightarrow{PN}|=\sqrt{(1-z-1)^2+(1-z-0)^2+(z-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{3z^2-3z+\frac{5}{4}},$$

所以$|\overrightarrow{PM}|=|\overrightarrow{PN}|$，所以$PQ\perp MN$，即$|PQ|$是动点 P 到直线 MN 的距离，

由空间两点间的距离公式可得$|PQ|=\sqrt{(1-z-\frac{3}{4})^2+(1-z-0)^2+(z-\frac{1}{4})^2}=\sqrt{3z^2-3z+\frac{9}{8}}$

$=\sqrt{3(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{8}}$，所以当 $c=\frac{1}{2}$ 时，$|PQ|$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{6}}{4}$，

此时 P 为线段 CA_1 的中点，由于 $|MN|=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 为定值，所以当△PMN 的面积取得最小值时，P 为线段 CA_1 的中点.

17.（本小题满分 14 分）

已知圆 $C:x^2+y^2-6x-8y+21=0$，直线 l 过点 $A(1,0)$.

（1）求圆 C 的圆心坐标及半径长；

（2）若直线 l 与圆 C 相切，求直线 l 的方程；

（3）当直线 l 的斜率存在且与圆 C 相切于点 B 时，求 $|AB|$.

（1）圆心坐标是（3，4），半径长是 2；（2）$x=1$ 或 $3x-4y-3=0$；（3）4.

【分析】

（1）将圆的方程化为标准方程，即可得出圆心及半径；

（2）分直线斜率不存在和存在两种情况讨论，当直线 l 的斜率存在时，可设直线 l 的方程是 $y=k(x-1)$，再利用圆心到直线的距离等于半径，求得斜率，即可得解；

（3）由（2）得切线的方程，设圆 C 的圆心是点 $E(3,4)$，求出 AE 的长度，在利用勾股定理即可得解.

【详解】

解：把圆 C 的方程化成标准式方程，为 $(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$.

（1）圆 C 的圆心坐标是（3，4），半径长是 2.

（2）当直线 l 的斜率不存在即其方程是 $x=1$ 时，满足题设.

当直线 l 的斜率存在时，可设直线 l 的方程是 $y=k(x-1)$ 即 $kx-y-k=0$.

由圆心（3，4）到直线 l 的距离等于圆 C 的半径长 2，即 $\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=\frac{3}{4}$，

进而可得此时直线 l 的方程是 $3x-4y-3=0$.

综上所述，可得直线 l 的方程是 $x=1$ 或 $3x-4y-3=0$.

（3）由（2）的解答可得直线 l 的方程是 $3x-4y-3=0$.

设圆 C 的圆心是点 $E(3,4)$，则 $AE=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，

所以 $|AB|=\sqrt{|AE|^2-|EB|^2}=\sqrt{20-2^2}=4$.

18. 已知离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的一个焦点为 $\left(-1,0\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若斜率为 1 的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点，且 $|AB|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，求直线 l 的方程.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；（5 分）（2） $y=x+1$ 或 $y=x-1$ （10 分）

(1)由题意，$c=1$ ……………………1 分

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore a=\sqrt{2}$， ……………………3 分

$\therefore b=1$； ……………………4 分

$\therefore$椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………5 分

(2)设直线 l 的方程为 $y=x+m$，点 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$ ……………………6 分

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=x+m,\end{cases}$

化简，得 $3x^2+4mx+2m^2-2=0$ ……………………7 分

由已知得，$\Delta=16m^2-12\left(2m^2-2\right)=-8m^2+24>0$

即 $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$， ……………………9 分

且 $x_1+x_2=-\dfrac{4m}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{3}$ ……………………11 分

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(x_2+x_1\right)^2-4x_1x_2}$ ……………………12 分

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{-8m^2+24}{9}}$

$=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

解得 $m=\pm1$，符合题意 ……………………14 分

∴直线 l 的方程为 $y=x+1$ 或 $y=x-1$ ……………………15 分

19.（1）证明见解析；（2）45°；（3）$\frac{1}{2}$.

【分析】

（1）以 A 为原点，AB 为 x 轴，AC 为 y 轴，AA_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能证明 $B_1F\perp$ 平面 AEF.

（2）求出平面 EFB_1 的法向量和平面 AB_1E 的法向量，利用向量法能求出二面角 $F-B_1E-A$ 的大小.

（3）求出平面 AB_1E 的法向量 $\vec{m}=(2,1,-2)$，$\overrightarrow{AF}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，利用向量法能求出点 F 到平面 EAB_1 的距离.

【详解】

（1）∵三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面，$\angle BAC=90°$，

∴以 A 为原点，AB 为 x 轴，AC 为 y 轴，AA_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

∵ $AB=AC=AA_1=1$，E、F 分别是棱 C_1C、BC 的中点，

∴ $B_1(1,0,1)$，$F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，$A(0,0,0)$，$E(0,1,\frac{1}{2})$，

$\overrightarrow{B_1F}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{AF}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，

∵ $\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，$\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，

∴ $B_1F\perp AE$，$B_1F\perp AF$，

∵ $AE\cap AF=A$，AE，$AF\subset$ 平面 AEF，

∴ $B_1F\perp$ 平面 AEF.

（2）$\overrightarrow{FB_1}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$，$\overrightarrow{FE}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,\ 1),\overrightarrow{AE}=(0,1,\ \frac{1}{2})$，

设平面 EFB_1 的法向量 $\vec{n}=(x,y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{FB_1}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FE}=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，取 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,1,\ 0)$，

设平面 AB_1E 的法向量 $\vec{m}=(a,b,\ c)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=a+c=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=b+\frac{1}{2}c=0\end{cases}$，取 $a=2$，得 $\vec{m}=(2,1,\ -2)$，

设二面角 $F-B_1E-A$ 的大小为 θ，

则 $|\cos\theta|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\times3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

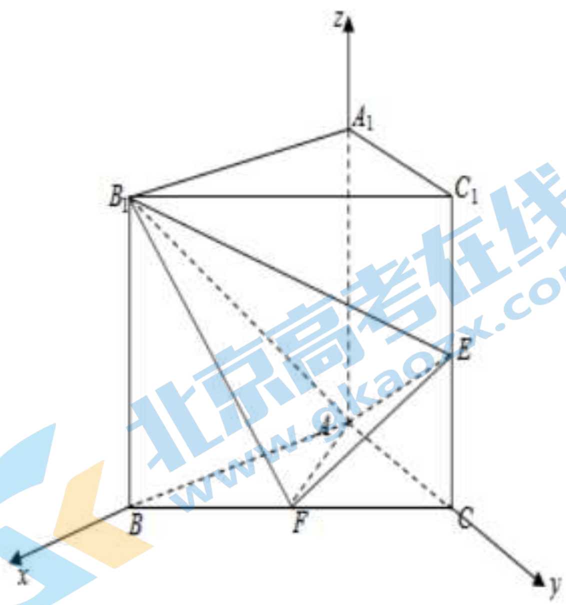
依图得二面角为锐角，

$\therefore$ 二面角 $F-B_1E-A$ 的大小为 $45°$.

（3）解：$\because$ 平面 AB_1E 的法向量 $\vec{m}=(2,1,\ -2),\overrightarrow{AF}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，

$\therefore$ 点 F 到平面 EAB_1 的距离：

$$d=\frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{AF}|}{|\vec{m}|}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}.$$



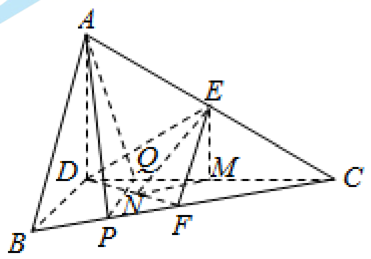
21．（1）平行（2）$\frac{\sqrt{21}}{7}$（3）靠近 B 的三等分点

【解析】

试题分析：（1）判定线面关系，可从线线关系寻找，由线段中点，可利用中位线性质得线线平行，再利用线面平行判定定理确定，（2）求二面角，一般利用空间直角坐标系，结合空间向量的数量积解决：先以点 D 为坐标原点，直线 DB、DC、DA 为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间坐标系，再分别计算平面 CDF 及平面 EDF 的法向量，其中平面 EDF 的法向量需列方程组求解，最后利用空间向量数量积求夹角的余弦值，经判断所求二面角为锐角得结论（3）确定点的位置，一般利用空间直角坐标系求出点的坐标，再明确位置关系.要求点 P 的坐标，只需列两个独立条件，一个为在直线上，另一个为垂直：可设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$,再转化条件 $AP\perp DE$ 为 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})\cdot\overrightarrow{DE}=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$，即可确定 P 位置.

试题解析：（1）如图，在 ΔABC 中，由 E、F 分别是 AC、BC 中点，得 $EF//AB$，

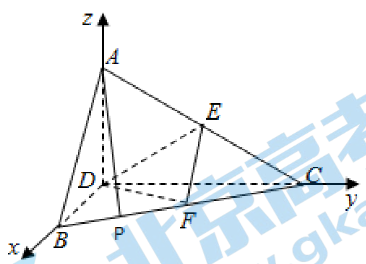
又 $AB\not\subset$ 平面 DEF，$EF\subset$ 平面 DEF，∴ $AB//$ 平面 DEF.



（2）由题知，$AD\perp CD$，平面 $ADC\perp$ 平面 BDC，且交线为 DC，

∴ $AD\perp$ 平面 BDC，∴ $AD\perp BD$，$AD\perp DC$，又已知 $BD\perp CD$，

∴ AD,BD,CD 两两垂直，以点 D 为坐标原点，直线 DB、DC、DA 为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，



则 $A(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2\sqrt{3},0)$，$E(0,\sqrt{3},1)$，$F(1,\sqrt{3},0)$，

平面 CDF 的法向量为 $\overrightarrow{DA}=(0,0,2)$，设平面 EDF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{DF}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0\\ \sqrt{3}y+z=0\end{cases}$，取$\vec{n}=(3,-\sqrt{3},3)$，

$\cos<\overrightarrow{DA},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DA}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

∴二面角 E-DF-C 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

（3）设$P(x,y,0)$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{3}y-2=0$，$\therefore y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

又$\overrightarrow{BP}=(x-2,y,0)$，$\overrightarrow{PC}=(-x,2\sqrt{3}-y,0)$，

$\because \overrightarrow{BP}//\overrightarrow{PC}$，$\therefore (x-2)(2\sqrt{3}-y)=-xy$，$\therefore \sqrt{3}x+y=2\sqrt{3}$，

把$y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$代入上式得$x=\dfrac{4}{3}$，$\therefore \overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

∴在线段 BC 上存在点$P(\dfrac{4}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0)$，即靠近 B 的三等分点，使$AP\perp DE$.

考点：线面平行判定定理,利用空间向量求二面角、确定点的位置

【名师点睛】判断或证明线面平行的常用方法有：

（1）利用线面平行的定义（无公共点）；

（2）利用线面平行的判定定理（a⊄α，b⊂α，a∥b⇒a∥α）；

（3）利用面面平行的性质定理（α∥β，a⊂α⇒a∥β）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。