



A. 样本的众数约为  $67\frac{1}{2}$

B. 样本的中位数约为  $66\frac{2}{3}$

C. 样本的平均值约为 66

D. 为确保学生体质健康, 学校将对体重超过 75kg 的学生进行健康监测, 该校男生中需要监测的学生频数约为 200 人

6. 若双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的一条渐近线与圆  $M: x^2 + y^2 - 4x = 0$  交于点  $A, B$  两点, 则  $|AB|$  的值为

A.  $\sqrt{3}$

B. 1

C.  $2\sqrt{3}$

D. 2

7. 如图 2 所示的框图所给出的程序运行结果为  $S=28$ , 则判断框中应填入的条件是

A.  $n \leq 7?$

B.  $n < 7?$

C.  $n \geq 7?$

D.  $n > 7?$

8. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $AB=3, BC=\sqrt{13}, AC=4$ , 且  $D$  为  $AC$  的中点, 则  $|BD| =$

A.  $\sqrt{7}$

B.  $\sqrt{19}$

C.  $\sqrt{13} - 6\sqrt{5}$

D.  $\sqrt{13+6\sqrt{3}}$

9. 如图 3, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的外接球的体积为

A.  $6\pi$

B.  $24\pi$

C.  $8\sqrt{6}\pi$

D.  $64\sqrt{6}\pi$

10. 已知  $a = \log_2 2.5, b = \log_3 3.5, c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是

A.  $c < b < a$

B.  $c < a < b$

C.  $a < b < c$

D.  $b < a < c$

11. 古希腊数学家帕普斯在《数学汇编》第 3 卷中记载着一个定理: “如果同一个平面内的一个封闭图形的内部与一条直线不相交, 那么该封闭图形围绕这条直线旋转一周所得到的旋转体的体积等于该封闭图形的面积乘以重心旋转所得周长”. 如图 4, 半圆  $O$  的直径  $AB=18\text{cm}$ , 点  $D$  是该半圆弧的中点, 半圆弧与直径所围成的半圆面 (不含边界) 的重心  $G$  位于对称轴  $OD$  上, 则运用帕普斯的上述定理可以求出  $OG =$

A.  $24\pi\text{ cm}$

B.  $12\pi\text{ cm}$

C.  $\frac{12}{\pi}\text{ cm}$

D.  $\frac{24}{\pi}\text{ cm}$

12. 已知函数  $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ , 有如下四个结论: (1)  $f(x)$  的图象关于原点对称; (2)  $f(x)$  的图象关于  $y$  轴对称; (3) 若 “ $\forall x \in \mathbf{R}, m \geq f(x)$ ” 为真命题, 则  $m$  的最小值为 2; (4) 若 “ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, m \leq f(x_0)$ ” 为真命题, 则  $m$  的最大值为 -2. 其中所有正确结论的编号是

A. (1)(3)

B. (1)(4)

C. (2)(3)

D. (2)(4)

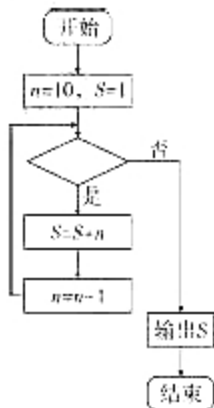


图 2

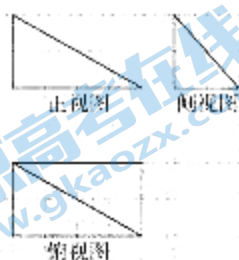


图 3

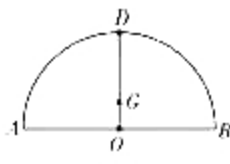


图 4

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $2\vec{a} + \vec{b}$  与  $\vec{b}$  垂直, 且  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ , 则  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  方向上的投影为 \_\_\_\_\_.

14. 已知等差数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $S_n$  和  $T_n$ , 且有  $a_3 + a_6 = 3, b_5 + b_7 = 6$ , 则  $\frac{S_{15}}{T_{15}}$  的值为 \_\_\_\_\_.

15. 已知点  $M$  为圆  $O': (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$  上的动点, 过圆心作直线  $l$  垂直于  $x$  轴交点为  $A$ , 点  $B$  为  $A$  关于  $y$  轴的对称点, 动点  $N$  满足到  $B$  点与到  $l$  的距离始终相等, 记动点  $N$  到  $y$  轴距离为  $m$ , 则  $m + |MN|$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

16. 如图 5, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1,  $E, F$  分别是棱  $AA_1, CC_1$  的中点, 过直线  $EF$  的平面分别与棱  $BB_1, DD_1$  交于  $M, N$ , 设  $BM = x, x \in [0, 1]$ , 给出以下四个结论: ①平面  $MENF \perp$  平面  $BDD_1B_1$ ; ②当且仅当  $x = \frac{1}{2}$  时, 四边形  $MENF$  的面积最小; ③四边形  $MENF$  的周长  $L = f(x), x \in [0, 1]$  是单调减函数; ④四棱锥  $C_1-MENF$  的体积  $V = h(x)$  在  $[0, 1]$  上先减后增. 其中正确命题的序号是 \_\_\_\_\_.

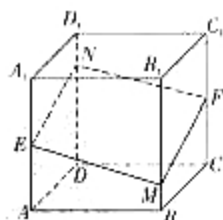


图 5

三、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 12 分)

给出下列 3 个条件: ①  $S_n = \frac{n(n+3)}{2}$ ; ② 对任意  $n > 1$  满足  $S_n - 1 = S_{n-1} + a_{n-1}$  且  $a_2 = 3$ ; ③  $\{a_n\}$  是等差数列且

$a_2 = 3, 3a_3 + a_4 = 11$ . 现从中任选一个, 补充在下列问题中, 将序号填在横线上, 并解答.

问题: 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = 2^{n-1}$ , \_\_\_\_\_.

(1) 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{(a_n - 1) \cdot b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (本小题满分 12 分)

据贵州省气候中心报, 2021 年 6 月上旬, 我省降水量在 15.2~170.3mm 之间, 毕节市局地、遵义市北部、铜仁市局地和黔东南州东南部不足 50mm, 其余均在 50mm 以上, 局地超过 100mm. 若我省某地区 2021 年端午节前后 3 天, 每一天下雨的概率均为 50%. 通过模拟实验的方法来估计该地区这 3 天中恰好有 2 天下雨的概率. 利用计算机或计算器可以产生 0 到 9 之间取整数值的随机数  $x(x \in \mathbb{N}, \text{且 } 0 \leq x \leq 9)$  表示是否下雨: 当  $x \in [0, k] (k \in \mathbb{Z})$  时表示该地区下雨, 当  $x \in [k+1, 9]$  时, 表示该地区不下雨. 因为是 3 天, 所以每一个随机数作为一组, 从随机数表中随机取得 20 组数如下:

332 714 740 945 593 468 491 272 073 445  
992 772 951 431 169 332 435 027 898 719

(1) 求出  $k$  的值, 使得该地区每一天下雨的概率均为 50%; 并根据上述 20 组随机数估计该地区这 3 天中恰好有 2 天下雨的概率;

(2) 2016 年到 2020 年该地区端午节当天降雨量(单位: mm)如表:

时间	2016 年	2017 年	2018 年	2019 年	2020 年
年份 $t$	1	2	3	4	5
降雨量 $y$	28	27	25	23	22

经研究表明: 从 2016 年到 2020 年, 该地区端午节有降雨的年份的降雨量  $y$  与年份  $t$  具有线性相关关系, 求回归直线方程  $\hat{y} = bt + a$ . 并预测该地区 2022 年端午节有降雨的话, 降雨量约为多少?

参考公式: 
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i - n\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - n\bar{t}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}.$$

19. (本小题满分12分)

如图6, 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=BC=1$ ,  $BB_1=2$ ,  $E$  为棱  $AA_1$  的中点.

(1) 证明:  $BE \perp$  平面  $EB_1C_1$ ;

(2) 求二面角  $B-EC-C_1$  的大小.

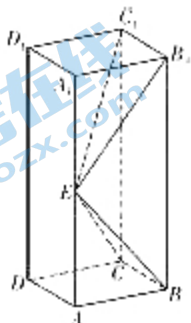


图6

20. (本小题满分12分)

已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .

(1) 函数  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ , 求  $g(x)$  的单调区间和极值;

(2) 求证: 对于  $\forall x \in (0, +\infty)$ , 总有  $f(x) > \frac{1}{4} \ln x + \frac{3}{4}$ .

21. (本小题满分12分)

已知  $F_1(\sqrt{3}, 0)$ ,  $F_2(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $P(0, 1)$ , 动点  $M$  满足  $|MF_1| + |MF_2| = |PF_1| + |PF_2|$ .

(1) 求动点  $M$  的轨迹方程;

(2) 设直线  $l$  不经过点  $P$  且与动点  $M$  的轨迹相交于  $A, B$  两点. 若直线  $PA$  与直线  $PB$  的斜率之和为  $-1$ , 证明: 直线  $l$  过定点.

请考生在第22、23、24三题中任选一题作答, 并用2B铅笔在答题卡上将所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致, 在答题卡指定区域指定位置答题. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分10分) 【选修4-4: 坐标系与参数方程】

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$  ( $t$  为参数). 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴

建立极坐标系, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho \sin \theta - 5\rho \cos \theta - 1 = 0$ .

(1) 求  $C_1$  与  $C_2$  的公共点的直角坐标;

(2)  $M$  与  $N$  是曲线  $C_2$  上的两点, 若  $OM \perp ON$ , 求  $\frac{1}{|OM|^2} + \frac{1}{|ON|^2}$  的值.

23. (本小题满分10分) 【选修4-5: 不等式选讲】

已知函数  $f(x) = |x-3| + |x-m|$ .

(1) 若  $m=1$ , 求不等式  $f(x) \geq 6$  的解集;

(2) 若  $\exists x \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x) < 2m$ , 求  $m$  的取值范围.

24. (本小题满分10分) (还未学过选修4-4、4-5的同学可不做此题)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对边长为  $a, b, c$ ,  $(c-2b)\cos A + a\cos C = 0$ .

(1) 求角  $A$  的大小;

(2) 若  $\sqrt{3}(c-b) = a$ , 证明:  $\triangle ABC$  是直角三角形.

# 贵阳市五校 2022 届高三年级联合考试 (一)

## 理科数学参考答案

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	B	D	C	D	D	A	C	D	C	A

【解析】

1. 在 B 中,  $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ ,  $\therefore A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$ , 故选 B.

2.  $z = 1 + \frac{2}{1+i} = 1 + \frac{2(1-i)}{2} = 2-i$ ,  $\therefore |z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ , 故选 A.

3. 由题可得其可行域为如图 1,  $z = x + 2y \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{z}{2}$ , 当  $l$  经过点 A(0, -1) 时,  $z$  取到最小值,  $\therefore z_{\min} = 0 + 2(-1) = -2$ , 故选 B.

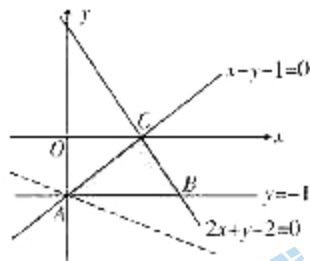


图 1

4. 展开式中常数项为  $T_{3+i} = C_5^3 (x^2)^i \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^3 = -32$ , 故选 D.

5. 由直方图估计样本平均值为  $57.5 \times 0.15 + 62.5 \times 0.25 + 67.5 \times 0.3 + 72.5 \times 0.2 + 77.5 \times 0.1 = 66.75$ , 故 C 错误, 故选 C.

6. 双曲线 C 的一条渐近线为  $\sqrt{3}x - y = 0$ , 在圆 M 中, 圆心  $M(2, 0)$ , 半径  $r = 2$ , 圆心到渐近线的距离  $d = \frac{|2\sqrt{3} - 0|}{2} = \sqrt{3}$ , 由垂径定理得  $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} = 2$ , 故选 D.

7. 按循环结构中, 每一次循环得情况为:  $S = 11, n = 9$ ;  $S = 20, n = 8$ ;  $S = 28, n = 7$ . 退出循环时,  $n = 7$ , 即  $n = 8$  满足循环条件, 但  $n = 7$  不满足条件, 所以条件为  $n > 7$ , 故选 D.

8. 在  $\triangle ABC$  中,  $\cos A = \frac{3^2 + 4^2 - \sqrt{13}^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{2}$ , 在  $\triangle ABD$  中,  $|BD| = \sqrt{3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{7}$ , 故选 A.

9. 根据三视图知该几何体是一个四棱锥, 底面为矩形, 一条侧棱与底面垂直, 因此可以将其补形为一个长方体, 则该四棱锥的外接球也就是长方体的外接球, 故

$$2R = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}, \text{ 所以 } R = \sqrt{6}, \text{ 所以 } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 8\sqrt{6}\pi.$$

10. 因为  $2 < 2.5 < 4$ ,  $3 < 3.5 < 9$ , 所以  $1 < a < 2$ ,  $1 < b < 2$ ,  $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5} = 2^{1.5} > 2$ , 所以  $c$  最大.

故排除 A, B: 设  $y = \log_x \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(x+0.5)}{\ln x}$ ,  $x > 1$ , 则  $y' = \frac{\frac{1}{x+0.5} \ln x - \frac{1}{x} \ln(x+0.5)}{(\ln x)^2} =$

$\frac{\ln x^x - \ln(x+0.5)^{(x-0.5)}}{x(x+0.5)(\ln x)^2}$ , 因为  $x > 1$ , 所以  $x^x < (x+0.5)^{(x-0.5)}$ , 所以  $\ln x^x - \ln(x+0.5)^{(x-0.5)} < 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $f(2) > f(3)$ , 即  $a > b$ , 所以  $b < a < c$ , 故选 D.

11. 取直线  $AB$  为旋转轴, 设  $OG = x$ , 由帕普斯得定理知  $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot 2\pi \cdot x$ , 所以  $x = \frac{12}{\pi}$  cm,

即  $OG = \frac{12}{\pi}$  cm, 故选 C.

12. 在  $f(x)$  中, 定义域  $\mathbf{R}$  关于原点对称, 且  $f(-x) = \frac{4 \cdot (-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{4x}{x^2 + 1} = -f(x)$ , 所以  $f(x)$  为

奇函数, 其图象关于原点对称, 故①正确, ②错误;  $\forall x \in \mathbf{R}, m > f(x) \Leftrightarrow m \geq f(x)_{\max}$ .

当  $x \leq 0$  时,  $f(x) \leq 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{4}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{4}{2\sqrt{1}} = 2$ , 当且仅当  $x = \frac{1}{x}$ .

即  $x = 1$  时, 上式等号成立, 故  $f(x)_{\max} = 2$ , 所以  $m \geq 2$ , 所以  $m_{\min} = 2$ , 所以③正确, 故选 A.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

题号	13	14	15	16
答案	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2\sqrt{2} - 2$	①②

【解析】

13. 设  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $\theta$ , 由题可得  $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 2|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos \theta + |\vec{b}|^2 = 0$ , 因为  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ , 可求得  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  方向上的投影  $|\vec{a}| \times \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

14. 因为  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  为等差数列, 则有  $a_3 - a_9 = 2a_6 = 3$ ,  $b_3 + b_9 = 2b_6 = 6$ ,  $S_{11} = 11a_6$ ,  $T_{11} = 11b_6$ .

所以  $\frac{S_{11}}{T_{11}} = \frac{11a_6}{11b_6} = \frac{a_6}{b_6} = \frac{1}{2}$ .

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息.

15. 由抛物线的定义可知, 如图 2, 动点  $N$  的轨迹为开口向左的抛物线, 其焦点坐标为  $B(-1, 0)$ , 准线方程为  $x=1$ , 可求得抛物线方程为:

$y^2 = -4x$ . 连接  $O'B$  交圆  $O'$  于  $M$  点, 交抛物线上  $N$  点, 此时

$|MN|+m$  最小, 利用两点距离公式可求得  $|O'B| = 2\sqrt{2}$ .

$$|MN|+m = 2\sqrt{2} - 2.$$

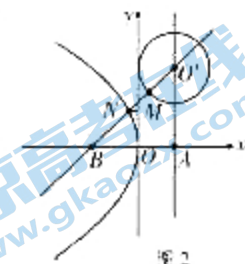


图 2

16. 如图 3, ①连接  $EF, BD, B_1D_1$ , 则由正方体的性质可知,  $EF \perp$  平面  $BDD_1B_1$ , 所以平面  $MENF \perp$  平面  $BDD_1B_1$ , 所以①正确; ②连接

$MN$ , 因为  $EF \perp$  平面  $BDD_1B_1$ , 所以  $EF \perp MN$ , 所以四边形  $MENF$

是菱形,  $S = \frac{1}{2} \times EF \times MN$ , 四边形  $MENF$  的对角线  $EF$  是固定的,

$|MN| = \sqrt{(1-2x)^2 + 2}$ , 所以当且仅当  $x = \frac{1}{2}$  时, 四边形  $MENF$  的面积最小, 故②正确; ③

因为  $EF \perp MN$ , 所以四边形  $MENF$  是菱形, 当  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  时,  $EM$  的长度由大变小, 当

$x \in [\frac{1}{2}, 1]$  时,  $EM$  的长度由小变大, 所以函数  $L = f(x), x \in [0, 1]$  不单调, 所以③错误;

④四棱锥则分别为两个小三棱锥, 它们以  $C_1EF$  为底, 以  $M, N$  分别为顶点的两个小棱锥  $M-C_1EF, N-C_1EF$ , 因为三角形  $C_1EF$  的面积是个常数,  $M, N$  到平面  $C_1EF$  的距离是个常数, 所以四棱锥  $C_1-MENF$  的体积  $V = h(x)$  为常值函数, 所以④错误.

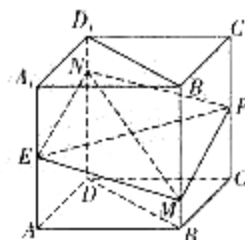


图 3

### 三、解答题 (共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 12 分)

解: (1) 选择①:  $\because S_n = \frac{n(n-3)}{2}$ ,  $\therefore$  可推得  $\{a_n\}$  是公差  $d=1, a_1=2$  的等差数列,

$$a_n = n-1, \therefore b_n = 2^n. \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

选择②:  $\because$  对任意  $n > 1$  满足  $S_n - 1 = S_{n-1} + a_{n-1}$ ,  $\therefore a_n - a_{n-1} = 1$ ,

$$\therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 是公差为 } 1 \text{ 的等差数列, } \therefore a_n = a_2 + (n-2)d = n+1. \therefore b_n = 2^n.$$

$\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

$$3a_1 - a_4 = 11, \therefore \begin{cases} a_2 = a_1 + d = 3, \\ 3a_1 + a_4 = 4a_1 + 3d = 11, \end{cases} \therefore a_1 = 2, d = 1,$$

$$a_n = n + 1, \therefore b_n = 2^n. \dots\dots\dots (6 \text{分})$$

(2) 设  $c_n = (a_n - 1)b_n = n \cdot 2^n$ , 数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ ,

$$\text{则 } T_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n,$$

$$\text{那么有 } 2T_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{故上面两式错位相减相消得 } -T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{化简得 } T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2. \dots\dots\dots (12 \text{分})$$

18. (本小题满分 12 分)

解: (1) 由题意可知,  $\frac{k+1}{10} = 50\%$ , 解得  $k = 4$ , 即  $0 \sim 4$  表示下雨,  $5 \sim 9$  表示不下雨,

$\dots\dots\dots (3 \text{分})$

所给的 20 组数据中 714, 740, 491, 272, 073, 445, 435, 027, 共 8 组表示 3 天中恰好有 2 天下雨,

$$\text{故所求的概率为 } \frac{8}{20} = \frac{2}{5}. \dots\dots\dots (6 \text{分})$$

(2) 由题中所给的数据可得  $\bar{t} = 3, \bar{y} = 25$ ,

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{-16}{10} = -\frac{8}{5}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 25 - \left(-\frac{8}{5}\right) \times 3 = \frac{149}{5},$$

$$\text{所以回归方程为 } \hat{y} = -\frac{8}{5}t + \frac{149}{5}, \text{ 当 } t = 7 \text{ 时, } \hat{y} = -\frac{8}{5} \times 7 + \frac{149}{5} = \frac{93}{5},$$

$\dots\dots\dots (10 \text{分})$

所以该地区 2022 年端午节有降雨的话, 降雨量约为  $\frac{93}{5}$  mm.  $\dots\dots\dots (12 \text{分})$

19. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: 因为  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  是长方体, 所以  $B_1C_1 \perp$  侧面  $A_1B_1B_1A_1$ ,

而  $BE \subset$  平面  $A_1B_1B_1A_1$ , 所以  $BE \perp B_1C_1$ ,

在  $\triangle BEB_1$  中,  $BE = \sqrt{2}, B_1E = \sqrt{2}, BB_1 = 2$ .



所以  $BE^2 + B_1E^2 = BB_1^2$ ，所以  $BE \perp B_1E$ ，

又  $B_1C_1 \cap B_1E = B_1$ ， $B_1C_1, B_1E \subset$  平面  $EB_1C_1$ ，因此  $BE \perp$  平面  $EB_1C_1$ 。

..... (6分)

(2) 解：如图4所示，以点  $D$  为坐标原点，以  $\overline{DA}, \overline{DC}, \overline{DD_1}$  分别为  $x, y, z$  轴，建立空间直角坐标系，

则  $B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), C_1(0, 1, 2), E(1, 0, 1)$ ，

$\overline{EC} = (-1, 1, -1), \overline{CC_1} = (0, 0, 2), \overline{BE} = (0, -1, 1)$ ，

设  $\overline{m} = (x_1, y_1, z_1)$  是平面  $BEC$  的法向量，

$$\text{则 } \begin{cases} \overline{m} \cdot \overline{BE} = 0, \\ \overline{m} \cdot \overline{EC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y_1 + z_1 = 0, \\ -x_1 + y_1 - z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{m} = (0, 1, 1),$$

设  $\overline{n} = (x_2, y_2, z_2)$  是平面  $ECC_1$  的法向量，

$$\text{则 } \begin{cases} \overline{n} \cdot \overline{CC_1} = 0, \\ \overline{n} \cdot \overline{EC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z_2 = 0, \\ -x_2 + y_2 - z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{n} = (1, 1, 0),$$

所以  $\left| \frac{\overline{m} \cdot \overline{n}}{|\overline{m}| \cdot |\overline{n}|} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}$ ，所以二面角  $B-EC-C_1$  的大小为  $120^\circ$ 。

..... (12分)

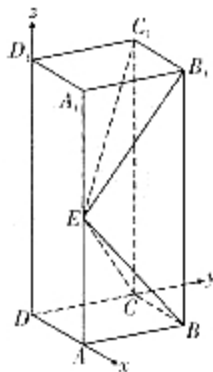


图4

20. (本小题满分12分)

(1) 解：  $g(x) = \frac{e^x}{x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$ ，

当  $0 < x < 2$  时， $g'(x) < 0$ ；

当  $x < 0$  或  $x > 2$  时， $g'(x) > 0$ 。

$\therefore g(x)$  在  $(0, 2)$  上单调递减，在  $(-\infty, 0), (2, +\infty)$  上单调递增；

故  $g(x)$  有一个极小值  $g(2) = \frac{e^2}{4}$ ，无极大值。..... (6分)

(2) 证明：要证  $f(x) > \frac{1}{4} \ln x - \frac{3}{4}$  成立，只需证  $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{4} \ln x - \frac{3}{4}$  成立，

即证  $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{4x} (\ln x - 3)$  成立。

令  $h(x) = \frac{1}{4x}(\ln x - 3)$ , 则  $h'(x) = \frac{4 - \ln x}{4x^2}$ ,

当  $0 < x < e^4$  时,  $h'(x) > 0$ ;

当  $x > e^4$  时,  $h'(x) < 0$ .

$\therefore h(x)$  在  $(0, e^4)$  上单调递增, 在  $(e^4, +\infty)$  上单调递减,

$\therefore h(x)_{\max} = h(e^4) = \frac{1}{4e^2}$ ,

$\because g(x) = \frac{e^x}{x^2}$  由 (1) 可知  $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{e^2}{4}$ ,

$\therefore g(x)_{\min} > h(x)_{\max}$ ,

$\therefore g(x) > h(x)$ ,

$\therefore f(x) > \frac{1}{4} \ln x - \frac{3}{4}$ . ..... (12分)

21. (本小题满分12分)

(1) 解: 由题意得  $|MF_1| + |MF_2| = |PF_1| + |PF_2| = 4$ , 则动点  $M$  的轨迹为椭圆, 焦点在  $x$  轴上,

可设为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a = 2$ ,  $c = \sqrt{3}$ ,  $b = 1$ ,

故动点  $M$  的轨迹方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . ..... (6分)

(2) 证明: 设直线  $PA$  与直线  $PB$  的斜率为  $k_1, k_2$ . 如果直线  $l$  与  $x$  轴垂直, 设  $l: x = t$ ,

由题设可得  $t \neq 0$ , 且  $|t| < 2$ , 可得  $A, B$  的坐标分别为  $\left(t, \frac{\sqrt{4-t^2}}{2}\right), \left(t, -\frac{\sqrt{4-t^2}}{2}\right)$ ,

则  $k_1 + k_2 = \frac{\sqrt{4-t^2} - 2}{2t} - \frac{\sqrt{4-t^2} + 2}{2t} = -1$ , 得  $t = 2$ , 不符合题设.

从而可设直线  $l: y = kx + m (m \neq 1)$ , 将  $y = kx + m (m \neq 1)$  代入  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

得  $(4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$ . 由题意可得  $\Delta = 16(4k^2 - m^2 - 1) > 0$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{4k^2 + 1}$ ,

而  $k_1 + k_2 = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = \frac{kx_1 + m - 1}{x_1} + \frac{kx_2 + m - 1}{x_2}$

$$= \frac{2kx_1x_2 + (m-1)(x_1 + x_2)}{x_1x_2},$$

由题意得  $k_1 + k_2 = -1$ ，故  $(2k+1)x_1x_2 + (m-1)(x_1 + x_2) = 0$ 。

$$\text{即 } (2k+1)\frac{4m^2-4}{4k^2+1} + (m-1)\frac{-8km}{4k^2+1} = 0, \text{ 解得 } k = -\frac{m-1}{2}.$$

当且仅当  $m > -1$  时， $\Delta > 0$ ，欲使  $l: y = -\frac{m+1}{2}x + m$ ，即  $y+1 = -\frac{m+1}{2}(x-2)$ 。

所以  $l$  过定点  $(2, -1)$ 。..... (12分)

22. (本小题满分10分) 【选修4-4: 坐标系与参数方程】

解: (1) 曲线  $C_1$  的普通方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ,

曲线  $C_2$  的直角坐标方程为  $y - 5x - 1 = 0$ 。

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y - 5x - 1 = 0. \end{cases} \text{ 消 } y \text{ 得到 } 101x^2 + 40x = 0, \text{ 解得 } x_1 = 0, x_2 = -\frac{40}{101}.$$

故  $C_1$  与  $C_2$  的公共点的直角坐标为  $(0, 1), \left(-\frac{40}{101}, -\frac{99}{101}\right)$ 。..... (5分)

(2) 曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\rho^2 = \frac{4}{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}$ ，

令  $M(\rho_1, \theta_1)$ ,  $N\left(\rho_2, \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)$ 。

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{1}{|OM|^2} + \frac{1}{|ON|^2} &= \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \\ &= \frac{\cos^2\theta_1 + 4\sin^2\theta_1}{4} + \frac{\cos^2\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) + 4\sin^2\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{4} \\ &= \frac{\cos^2\theta_1 + 4\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_1 + 4\cos^2\theta_1}{4} \\ &= \frac{5\cos^2\theta_1 + 5\sin^2\theta_1}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

即  $\frac{1}{|OM|^2} + \frac{1}{|ON|^2}$  的值为  $\frac{5}{4}$ 。.....

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

解: (1) 当  $m=1$  时,  $f(x)=|x-3|-|x+1|$ ,

当  $x \leq -1$  时,  $f(x)=-x+3-x-1=-2x-2 \geq 6 \Rightarrow x \leq -2$ , 所以  $x \leq -2$ ;

当  $-1 < x < 3$  时,  $f(x)=-x+3+x+1=4 \geq 6$ , 不成立;

当  $x \geq 3$  时,  $f(x)=x-3+x+1=2x-2 \geq 6 \Rightarrow x \geq 4$ , 所以  $x \geq 4$ ;

所以, 综上所述, 所求解集为  $\{x \mid x \geq 4 \text{ 或 } x \leq -2\}$ . ..... (5 分)

(2) 要求  $\exists x \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x) < 2m$ ,  $m$  的取值范围,

可先求  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x) \geq 2m$  时,  $m$  的取值范围,

$\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x)=|x-3|+|x+m| \geq |x-3-(x+m)|=|-3-m| \geq 2m$ ,

当  $m < 0$  时,  $|-3-m| \geq 2m$  恒成立;

当  $m \geq 0$  时,  $m \leq 3$ ;

综上,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x) \geq 2m$  时,  $m$  的取值范围为  $(-\infty, 3]$ ,

故  $\exists x \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x) < 2m$  时,  $m$  的取值范围为  $(3, +\infty)$ . ..... (10 分)

24. (本小题满分 10 分)

(1) 解:  $\because (c-2b)\cos A + a\cos C = 0$ ,

由正弦定理有:  $\sin C \cos A - 2\sin B \cos A + \sin A \cos C = 0$ ,

$\sin C \cos A + \sin A \cos C = 2\sin B \cos A$ ,

$\sin(A+C) = 2\sin B \cos A$ ,  $\sin B = 2\sin B \cos A$ , 则  $\cos A = \frac{1}{2}$ ;

因为  $A \in (0, \pi)$ , 所以  $A = \frac{\pi}{3}$ . ..... (5 分)

(2) 证明: 因为  $A = \frac{\pi}{3}$ , 所以  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ , 即  $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ ,

又因为  $\sqrt{3}(c-b) = a$ , 可得  $b^2 + c^2 - 3(c-b)^2 = bc$ ,

即  $2b^2 - 2c^2 - 5bc = 0$ , 即  $(c-2b)(2c-b) = 0$ , 而  $b < c$ , 解得  $c = 2b$ .

所以  $a = \sqrt{3}b$ .

故  $c^2 = a^2 + b^2$ .

即  $\triangle ABC$  是直角三角形, 得证. ....