2023 北京丰台高三一模
数　　学

2023.03

第一部分　（选择题 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$　　（B）$\{x|0<x\leqslant 1\}$

（C）$\{x|0<x\leqslant 2\}$　　（D）$\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

2．若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，$a>b$，则

（A）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　（B）$a^2>b^2$　（C）$ac>bc$　（D）$a-c>b-c$

3. 已知圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2(r>0)$ 与 y 轴相切，则 $r=$

（A）$\sqrt{2}$　（B）$\sqrt{3}$　（C）2　（D）3

4．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_2 x$，则 $f(-2)=$

（A）-1　（B）0　（C）1　（D）2

5. 在平面直角坐标系 xoy 中，若角 α 以 x 轴非负半轴为始边，其终边与单位圆交点的横坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 α 的一个可能取值为

（A）$-60°$　（B）$-30°$　（C）$45°$　（D）$60°$

6．在△ ABC 中，若 $2\cos A\sin B=\sin C$，则该三角形的形状一定是

（A）等腰三角形　（B）等边三角形

（C）直角三角形　（D）等腰直角三角形

7．设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则“对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n>0$”是“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

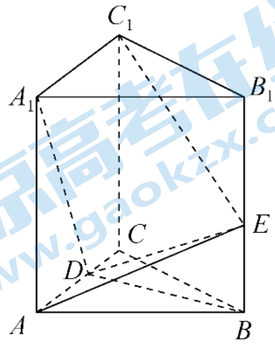
8．已知抛物线 C：$y^2=2px$ $(p>0)$的顶点是坐标原点 O，焦点为 F，A 是抛物线 C 上的一点，点 A 到 x 轴的距离为 $2\sqrt{2}$，过点 A 向抛物线 C 的准线作垂线，垂足为 B.若四边形 $ABOF$ 为等腰梯形，则 p 的值为

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　（C）2　（D）$2\sqrt{2}$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，存在常数 t（$t>0$），使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+t)=f(x)$，当 $x\in[0,t)$ 时，$f(x)=|x-\frac{t}{2}|$.若 $f(x)$ 在区间 $(3,4)$ 上单调递减，则 t 的最小值为

（A）3　（B）$\frac{8}{3}$　（C）2　（D）$\frac{8}{5}$

10．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，$AC=2$，$BC=1$，$AA_1=2$，点 D 在棱 AC 上，点 E 在棱 BB_1 上，给出下列三个结论：



①三棱锥 $E-ABD$ 的体积的最大值为 $\dfrac{2}{3}$；

② A_1D+DB 的最小值为 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$；

③点 D 到直线 C_1E 的距离的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

其中所有正确结论的个数为

（A）0　　　（B）1　　　（C）2　　　（D）3

第二部分　（非选择题 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

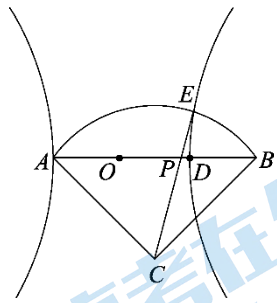
11. 若复数 $\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ $(a\in\mathbf{R})$ 是纯虚数，则 $a=$________.

12. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

13. 从 -2，-1，1，2，3 这 5 个数中任取 2 个不同的数，记“两数之积为正数”为事件 A，“两数均为负数”为事件 B，则 $P(B|A)=$________.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}a-x, & x<a,\\ x^3-x, & x\geqslant a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为________；a 的最大值为________.

15. 三等分角是“古希腊三大几何问题”之一，目前尺规作图仍不能解决这个问题. 古希腊数学家 Pappus（300~350 前后）借助圆弧和双曲线给出了一种三等分角的方法：如图，以角的顶点 C 为圆心作圆交角的两边于 A，B 两点；取线段 AB 的三等分点 O，D；以 B 为焦点，A，D 为顶点作双曲线 $\mathcal{H}$. 双曲线 $\mathcal{H}$ 与弧 AB 的交点记为 E，连接 CE，则 $\angle BCE=\dfrac{1}{3}\angle ACB$.



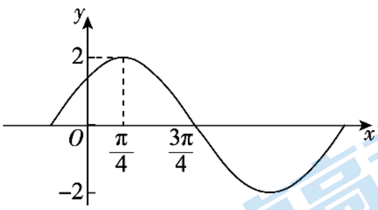
（Ⅰ）双曲线 $\mathcal{H}$ 的离心率为________；

（Ⅱ）若 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，$|AC|=3\sqrt{2}$，$CE$ 交 AB 于点 P，则 $|OP|=$________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示.



（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若函数 $g(x)=f(x)\sin x$，求 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

17.（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面是边长为 2 的菱形，AC 交 BD 于点 O，$\angle BAD=60°$，$PB=PD$，点 E 是棱 PA 的中点，连接 OE，OP.

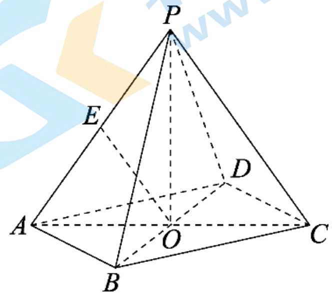
（Ⅰ）求证：OE//平面 PCD；

（Ⅱ）若平面 PAC 与平面 PCD 的夹角的余弦值 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求线段 OP 的长.

条件①：平面 $PBD\perp$平面 $ABCD$；

条件②：$PB\perp AC$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

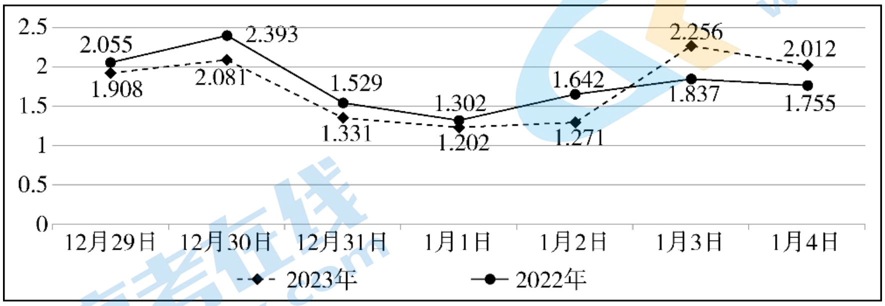


18.（本小题 14 分）

交通拥堵指数（TPI）是表征交通拥堵程度的客观指标，用 TPI 表示，TPI 越大代表拥堵程度越高.某平台计算 TPI 的公式为：$\text{TPI}=\dfrac{\text{实际行程时间}}{\text{畅通行程时间}}$，并按 TPI 的大小将城市道路拥堵程度划分为如下表所示的 4 个等级：

TPI	[1，1.5)	[1.5，2)	[2，4)	不低于 4
拥堵等级	畅通	缓行	拥堵	严重拥堵

某市 2023 年元旦及前后共 7 天与 2022 年同期的交通高峰期城市道路 TPI 的统计数据如下图：



（Ⅰ）从 2022 年元旦及前后共 7 天中任取 1 天，求这一天交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”的概率；

（Ⅱ）从 2023 年元旦及前后共 7 天中任取 3 天，将这 3 天中交通高峰期城市道路 TPI 比 2022 年同日 TPI 高的天数记为 X，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）把 12 月 29 日作为第 1 天，将 2023 年元旦前后共 7 天的交通高峰期城市道路 TPI 依次记为 $a_1,a_2,\cdots,a_7$，将 2022 年同期 TPI 依次记为 $b_1,b_2,\cdots,b_7$.记 $c_i=a_i-b_i\ (i=1,2,\cdots,7)$，$\bar{c}=\dfrac{1}{7}\sum\limits_{i=1}^{7}c_i$.请直接写出 $|c_i-\bar{c}|$ 取得最大值时 i 的值.

19.（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，焦距为 2.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）过点 $P(2,0)$ 的直线与椭圆 E 交于 B，C 两点，过点 B，C 作直线 $l:x=t$ 的垂线（点 B，C 在直线 l 的两侧），垂足分别为 M，N，记△BMP，△MNP，△CNP 的面积分别为 S_1，S_2，S_3. 试问：是否存在常数 t，使得 S_1，$\frac{1}{2}S_2$，S_3 总成等比数列？若存在，求出 t 的值，若不存在，请说明理由.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{\mathrm{e}^x}(a>0)$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 有两个不相等的零点 x_1，x_2，

（i）求 a 的取值范围；

（ii）证明：$x_1+x_2>2\ln a$.

21.（本小题 14 分）

已知集合 $S_n=\{1,2,3,\cdots,2n\}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 4)$，对于集合 S_n 的非空子集 A，若 S_n 中存在三个互不相同的元素 a,b,c，使得 $a+b,b+c,c+a$ 均属于 A，则称集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”.

（Ⅰ）试判断集合 $A_1=\{3,4,5\}$，$A_2=\{3,5,7\}$ 是否为集合 S_4 的“期待子集”；（直接写出答案，不必说明理由）

（Ⅱ）如果一个集合中含有三个元素 x,y,z，同时满足①$x<y<z$，②$x+y>z$，③$x+y+z$ 为偶数，那么称该集合具有性质 P.对于集合 S_n 的非空子集 A，证明：集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”的充要条件是集合 A 具有性质 P；

（Ⅲ）若 $S_n(n\geqslant 4)$ 的任意 m 元子集都是集合 S_n 的“期待子集”，求 m 的最小值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

2023. 03

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	C	A	B	A	A	C	B	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．-1　　12．4　　13．$\dfrac{1}{4}$

14．0；1　　15．2；$7-3\sqrt{3}$

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.（本小题 13 分）

（Ⅰ）如图所示，可得 $\dfrac{T}{4}=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}$，所以 $T=2\pi$，

又因为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$，所以 $\omega=1$，

又因为 $f(x)$ 过点 $(\dfrac{\pi}{4},0)$，$0<\varphi<\pi$，

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$．　　............................6 分

（Ⅱ）依题意 $g(x)=f(x)\sin x$

$$=2\sin(x+\frac{\pi}{4})\sin x$$

$$=2(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4})\sin x$$

$$=\sqrt{2}\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos 2x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，所以 $2x-\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，

所以 $\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$，

当 $2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，即 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$g(x)$ 取最大值，最大值为 $\sqrt{2}$，

当 $2x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}$，即 $x=0$ 时，$g(x)$ 取最小值，最小值为 0．　............................13 分

17.（本小题 14 分）

（Ⅰ）证明：因为底面 $ABCD$ 是菱形，所以 O 是 AC 的中点，

因为 E 是 PA 的中点，所以 $OE//PC$，

因为 $PC\subset$ 平面 PCD，$OE\not\subset$ 平面 PCD

所以 $OE//$平面PCD；　　............................5分

（Ⅱ）选择条件①：

因为 $PB=PD$，O 是 BD 的中点，所以 $PO\perp BD$，

因为平面 $PBD\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PBD\cap$ 平面$ABCD=BD$，$PO\subset$ 平面PBD，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，因为 $AC\subset$ 平面$ABCD$，

所以 $PO\perp AC$，

又 $AC\perp BD$，所以 OB,OC,OP 两两垂直，

以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

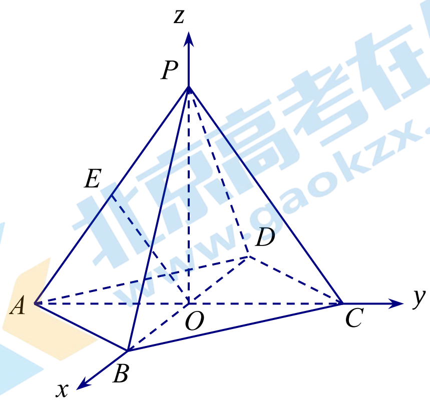
因为菱形的边长为 2，$\angle BAD=60^\circ$，

所以 $BD=2, AC=2\sqrt{3}$，

所以 $C(0,\sqrt{3},0), D(-1,0,0)$，设 $P(0,0,t)(t>0)$，

所以 $\overrightarrow{DC}=(1,\sqrt{3},0), \overrightarrow{DP}=(1,0,t)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 PCD 的一个法向量，



由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DC},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DP},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ x+tz=0,\end{cases}$ 取 $x=\sqrt{3}t$，则 $y=-t, z=-\sqrt{3}$

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}t,-t,-\sqrt{3})$，

因为 $BO\perp$ 平面 PAC，所以平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$，

因为平面 PAC 与平面 PCD 的夹角的余弦值 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_1\rangle|=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

即 $\left|\dfrac{1\times\sqrt{3}t}{\sqrt{(\sqrt{3}t)^2+(-t)^2+(-\sqrt{3})^2}\times 1}\right|=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

所以 $5t^2=4t^2+3$，即 $t^2=3$，因为 $t>0$，

所以 $t=\sqrt{3}$

所以线段 OP 的长为 $\sqrt{3}$．　　　　　　…………………………14 分

选择条件②：

因为 $PB\perp AC$．在菱形 $ABCD$ 中，$BD\perp AC$，

因为 $BD\subset$ 平面PBD, $PB\subset$ 平面PBD, $PB\cap BD=B$，所以 $AC\perp$ 平面PBD，

因为 $PO\subset$ 平面PBD，所以 $AC\perp PO$，因为 $PO\perp BD, AC\perp BD$

所以 OB,OC,OP 两两垂直．以下同条件②．

18.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）2022 年元旦及前后共 7 天中，交通高峰期城市道路拥堵程度为“拥堵”有 2 天．

设事件 A =“从 2022 年元旦及前后共 7 天中任取 1 天，这一天交通高峰期城市道路拥堵程度为‘拥堵’”，

则 $P(A)=\dfrac{2}{7}$．　　　　　　…………………………3 分

（Ⅱ）X 的所有可能取值为 0,1,2,

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7},\ P(X=1)=\frac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\frac{4}{7},\ P(X=2)=\frac{C_5^1C_2^2}{C_7^3}=\frac{1}{7},$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$E(X)=0\times\dfrac{2}{7}+1\times\dfrac{4}{7}+2\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$．　　　　…………………………11 分

（Ⅲ）6．　　　　…………………………14 分

19.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由已知得：$\begin{cases} b=1 \\ 2c=2 \end{cases}$，

因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $a^2=2$，

所以，椭圆 E 的方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ....5 分

（Ⅱ）由已知得：直线 BC 的斜率存在，且点 B，C 在 x 轴的同侧.

设直线 BC 的方程：$y=k(x-2)$，点 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，不妨设 $x_1<x_2$.

则 $y_1y_2>0$，$x_1<t<x_2$.

由 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得：$(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-2=0$，

所以，$\Delta=8(1-2k^2)>0$，$x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{8k^2-2}{1+2k^2}$.

因为 $S_1=(t-x_1)|y_1|$，$S_2=(2-t)|y_2-y_1|$，$S_3=(x_2-t)|y_2|$

所以，$S_1\cdot S_3=(x_2-t)(t-x_1)|y_1y_2|=(x_2-t)(t-x_1)y_1y_2$

$$=(x_2-t)(t-x_1)y_1y_2$$

$$=k^2(x_2-t)(t-x_1)(x_1-2)(x_2-2)$$

$$=k^2[t(x_1+x_2)-x_1\cdot x_2-t^2]\cdot[x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2)+4]$$

$$=k^2[\frac{8k^2t}{1+2k^2}-\frac{8k^2-2}{1+2k^2}-t^2]\cdot[\frac{8k^2-2}{1+2k^2}-\frac{16k^2}{1+2k^2}+4]$$

$$=\frac{2k^2}{(1+2k^2)^2}[-2k^2(t-2)^2-t^2+2]$$

$$\frac{1}{4}S_2^2=\frac{1}{4}(2-t)^2(y_2-y_1)^2=\frac{1}{4}k^2(2-t)^2(x_2-x_1)^2$$

$$=\frac{1}{4}k^2(2-t)^2[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2]$$

$$=\frac{1}{4}k^2(2-t)^2[(\frac{8k^2}{1+2k^2})^2-\frac{32k^2-8}{1+2k^2}]$$

$$=\frac{2k^2}{(1+2k^2)^2}[-2k^2(t-2)^2+(t-2)^2]$$

要使 S_1，$\frac{1}{2}S_2$，S_3 总成等比数列，则应由 $-t^2+2=(t-2)^2$

解得：$t=1$

所以，存在常数 t=1，使得 S_1，$\frac{1}{2}S_2$，S_3 总成等比数列. ....15 分

20.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=x+\frac{a}{e^x}$，$f'(x)=1-\frac{a}{e^x}=\frac{(e^x-a)}{e^x}$，

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)$=0 得，$x=\ln a$，

x，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$的极小值为 $f(\ln a)=\ln a+1$. ....6 分

（Ⅱ）（i）$f(x)$有两个零点的必要条件是 $\ln a+1<0$，即 $0<a<\frac{1}{e}$；

当 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(0)=a>0$，$f(-1)=-1+\frac{a}{\mathrm{e}^{-1}}<0$， $\ln a<-1$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(\ln a,+\infty)$ 上有且仅有一个零点，

又因为 $x\to+\infty$ 时， $f(x)\to+\infty$，（或 $f(-\frac{1}{a})=-\frac{1}{a}+\frac{a}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}}>0$）

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln a)$ 上有且仅有一个零点，

所以 $f(x)$ 有两个零点时，a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$.

（ii） $f(x_1)=f(x_2)=0$，不妨设 $x_1<x_2$， 可知 $x_1<\ln a<-1<x_2$，

即 $x_1+\frac{a}{\mathrm{e}^{x_1}}=x_2+\frac{a}{\mathrm{e}^{x_2}}=0$，所以 $a=-x_1\mathrm{e}^{x_1}=-x_2\mathrm{e}^{x_2}$，

$x_1+x_2>2\ln a$ 等价于 $x_1>2\ln a-x_2$，

因为 $2\ln a-x_2<\ln a$，

所以 $x_1>2\ln a-x_2$ 等价于 $f(x_1)<f(2\ln a-x_2)$，即 $2\ln a-x_2+\frac{a}{e^{2\ln a-x_2}}>0$，

令 $g(x_2)=2\ln a-x_2+\frac{a}{\mathrm{e}^{2\ln a-x_2}}(x_2>-1)$，因为 $a=-x_2\mathrm{e}^{x_2}$，

所以 $g(x_2)=2\ln(-x_2)+x_2-\frac{1}{x_2}$，

$g'(x_2)=\frac{2}{x_2}+1+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_2^2+2x_2+1}{x_2^2}>0$，

所以 $g(x_2)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x_2)>g(-1)=0$，

所以 $x_1+x_2>2\ln a$. ....15 分

21.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）集合 A_1 是集合 S_4 的“期待子集”，集合 A_2 不是集合 S_4 的“期待子集”. ....3 分

（Ⅱ）先证明必要性：

当集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”时，由题意，存在互不相同的 $a,b,c\in S_n$，

使 $a+b,b+c,c+a\in A$，

不妨设 $a<b<c$， 令 $x=a+b,y=c+a,z=b+c$，

则 $x<y<z$，即条件 P 中的①成立；

又 $x+y-z=(a+b)+(c+a)-(b+c)=2a>0$，

所以 $x+y>z$，即条件 P 中的②成立；

因为 $x+y+z=(a+b)+(c+a)+(b+c)=2(a+b+c)$，

所以 $x+y+z$ 是偶数，即条件 P 中的③成立.

所以集合 A 满足条件 P.

再证明充分性：

当集合 A 满足条件 P 时，有 $\exists x,y,z\in A$，

满足 ①$x<y<z$,②$x+y>z$,③$x+y+z$ 为偶数，

记 $a=\frac{x+y+z}{2}-z,b=\frac{x+y+z}{2}-y,c=\frac{x+y+z}{2}-x$，

由③得： $a,b,c\in Z$， 由①得： $a<b<c<z$， 由②得： $a=\frac{x+y-z}{2}>0$，

所以 $a,b,c\in S_n$，

因为 $a+b=x,a+c=y,b+c=z$，所以 $a+b,b+c,c+a$ 均属于 A，

即集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”． ....8 分

（Ⅲ）m 的最小值为 $n+2$．理由如下：

一方面，当 $3\le m\le n$ 时，对于集合 $M=\{a_i|a_i=2i-1,i=1,2,3,\cdots,m\}$，其中任意三个元素之和均为奇数，由（II）知，$M$ 不是 S_n 的“期待子集”；

当 $m=n+1$ 时，对于集合 $M=\{a_i|a_i=2i-1,i=1,2,3,\cdots,n\}\cup\{2\}$．从中任取三个不同元素，若不含有 2，则不满足条件 P 中的③；若三个元素中含有 2，则另两数必都是奇数，因为任意两个奇数之差都不小于 2，故不满足条件 P 中的②，所以 M 不是 S_n 的“期待子集”；所以 $m\ge n+2$．

另一方面，我们用数学归纳法证明集合 S_n 的任意含有 $n+2$ 个元素的子集，都是 S_n 的“期待子集”：

（1）当 $n=4$ 时，对于集合 S_4 的任意含有 6 个元素的子集，记为 B，

当 4,6,8 三个数中恰有 1 个属于 B 时，则 $\{1,2,3,5,7\}\subseteq B$，因为数组 $3,4,5$ 、$3,5,6$ 、$5,7,8$ 都满足条件 P，所以此时集合 B 是集合 S_4 的“期待子集”；

当 4,6,8 三个数恰有两个属于集合 B，则 3,5,7 中至少有两个属于集合 B，

因为数组 $3,4,5$ 、$3,5,6$ 、$3,6,7$ 、$3,7,8$ 、$5,6,7$ 、$5,7,8$ 都满足条件 P，

当 4,6,8 三个数都属于集合 B，因为数组 $4,6,8$ 满足条件 P，

所以此时集合 B 集合 S_4 的“期待子集”；

所以集合 B 必是集合 S_4 的“期待子集”；

所以当 $n=4$ 时，S_4 的任意含有 6 个元素的子集都是集合 S_4 的“期待子集”．

（2）假设当 $n=k(k\ge 4)$ 时，结论成立，即集合 S_k 的任意含有 $k+2$ 个元素的子集都是 S_k 的“期待子集”，那么 $n=k+1$ 时，对于集合 S_{k+1} 的任意含有 $k+3$ 个元素的子集 C，分成两类：

①若 $2k+1,2k+2$，至多有 1 个属于 C，则 C 中至少有 $k+2$ 个元素都在集合 S_k，由归纳假设知，结论成立；

②若 $2k-1\in C,2k\in C$，则集合 C 中恰含 S_k 的 $k+1$ 个元素，此时，当 C 中只有一个奇数时，则集合 C 中包含 S_k 中的所有偶数，此时数组 $2k-4,2k-2,2k$ 符合条件 P，结论成立；当集合 C 中至少有两个奇数时，则必有一个奇数 c 不小于 3，此时数组 $c,2k-1,2k$ 符合条件 P，结论成立；

所以 $n=k+1$ 时，结论成立

根据（1）（2）知，集合 S_n 的任意含有 $n+2$ 个元素的子集，都是 S_n 的“期待子集”，所以 m 的最小值为 $n+2$． ....14 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！