北京市第八十中学 2022～2023 学年度第二学期期中考试

高 一 数 学

2023 年 04 月

班级______________姓名______________考号____________

（考试时间 120 分钟 满分 150 分）

提示：试卷答案请一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。

在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色签字笔作答。

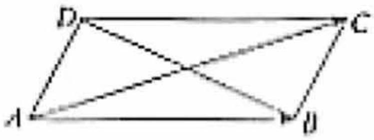
第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）在复平面内，复数 $2-i$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

（2）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=$



（A）$\overrightarrow{CB}$　　（B）$\overrightarrow{AD}$

（C）$\overrightarrow{BD}$　　（D）$\overrightarrow{CD}$

（3）已知长方体的长、宽、高分别为 5，4，3，那么该长方体的表面积为

（A）20　　（B）47　　（C）60　　（D）94

（4）若向量 $\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(2,m)$，且 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $m=$

（A）-4　　（B）-1　　（C）1　　（D）4

（5）已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示，则 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=$

（A）12　　（B）4

（C）6　　（D）3

（6）已知一个圆锥和圆柱的底面半径和高分别相等，若圆锥的轴截面是等边三角形，则这个圆锥和圆柱的侧面积之比为

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

(7) "直线 l 与平面 α 平行"是"直线 l 与平面 α 内无数条直线平行"的

(A) 充分不必要条件　　　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　　　(D) 既不充分也不必要条件

(8) 如图，A,B 两点在河的两岸，在 B 同侧的河岸边选取点 C，测得 BC 的距离 10m，$\angle ABC=75^\circ,\angle ACB=60^\circ$，则 A,B 两点间的距离为

(A) $5\sqrt{2}$m　　　　(B) $5\sqrt{3}$m

(C) $5\sqrt{5}$m　　　　(D) $5\sqrt{6}$m

(9) P 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$（包括边界）内的一动点.（不与 A_1 重合），Q 是底面 $ABCD$ 内一动点，线段 A_1C 与线段 PQ 相交且互相平分，则使得四边形 A_1QCP 面积最大的点 P 的个数为

(A) 1　　　　(B) 2　　　　(C) 3　　　　(D) 无数个

(10) 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，P 为正方形 $ABCD$ 四条边上的一个动点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 ______.

(A) $[-1,2]$　　　　(B) $[-1,4]$

(C) $[0,2]$　　　　(D) $[0,4]$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 若 $z=\dfrac{2}{1+i}$，则 $|\bar{z}|=$______.

(12) 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=4,(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{a}=0$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为______.

(13) 在 $\triangle ABC$ 中，$A=60^\circ,b=1,S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，则 $a=$______.

(14) 已知直线 m 和平面 α,β，给出下列三个论断：① $m\parallel\alpha$；② $\alpha\parallel\beta$；③ $m\subset\beta$，以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：______.

(15) 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AD=2AB=2$，M 为 BC 的中点，将 ΔABM 沿直线 AM 翻折，构成四棱锥 B_1-AMCD，N 为 B_1D 的中点，则在翻折过程中，

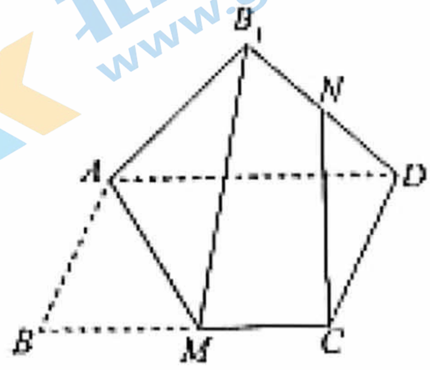
①对于任意一个位置总有 $CN\parallel$ 平面 AB_1M；

②存在某个位置，使得 $CN\perp AB_1$；

③存在某个位置，使得 $AD\perp MB_1$；

④四棱锥 B_1-AMCD 的体积最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

其中所有正确结论的序号是________.



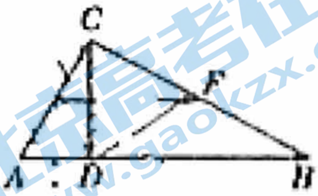
三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

(16)（本小题 14 分）

如图，在 ΔABC 中，$AD=\frac{1}{4}AB$，点 E，F 分别是 AC，BC 的中点．设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$．

（Ⅰ）用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$；

（Ⅱ）如果 $\angle A=60^\circ$，$AB=2AC$，CD，EF 有什么关系？用向量方法证明你的结论．

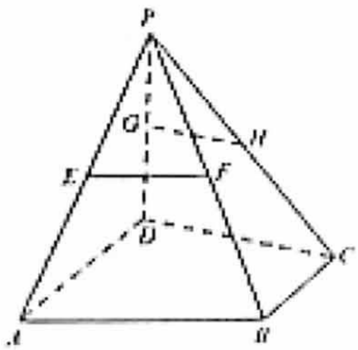


(17)（本小题 13 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$BC\parallel$ 平面 PAD，$AD\neq BC$；E，F，H，G 分别是棱 PA，PB，PC，PD 的中点．

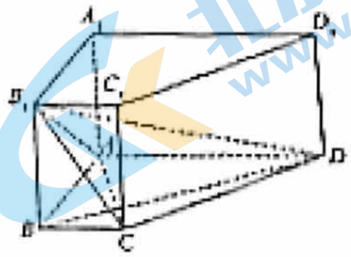
（Ⅰ）求证：$BC\parallel AD$；

（Ⅱ）判断直线 EF 与直线 GH 的位置关系，并说明理由．



(18)(本小题13分)

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\parallel BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AC\perp BD$，且 $AB=AD=2$，$AA_1=1$.



(Ⅰ)求三棱锥 B_1-ABD 的体积；

(Ⅱ)求证：$BC\parallel$ 平面 ADD_1A_1；

(Ⅲ)求证：$AC\perp B_1D$.

(19)(本小题15分)

在 ΔABC 中，$\left(2b-\sqrt{3}c\right)\cos A=\sqrt{3}a\cos C$.

(Ⅰ)求角 A 的大小；

(Ⅱ)现给出三个条件：①$c=\sqrt{3}b$；②$B=\dfrac{2\pi}{3}$；③$a=2$. 试从中选出两个作为已知，使 ΔABC 存在且唯一确定，求 ΔABC 的面积；

(Ⅲ)当 $a=2$ 时，直接写出 b 的取值范围，使得这样的 ΔABC 有且只有两个.

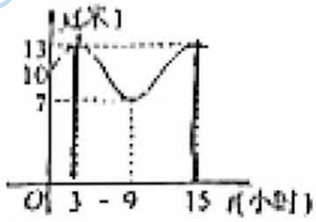
（20）（本小题 15 分）

某港口水深 y（米）是时间 t（$0\le t\le 24$，单位：小时）的函数，下表是水深数据：

t（小时）	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y（米）	10.0	13.0	9.9	7.0	10.0	13.0	10.1	7.0	10.1

根据上述数据描成的曲线如图所示，经拟合，该曲线可近似地看成正弦函数

$y=A\sin\omega t+b\left(A>0,\omega>0\right)$的图象．



（Ⅰ）试根据数据表和曲线，求函数 $y=A\sin\omega t+b\left(A>0,\omega>0\right)$的解析式；

（Ⅱ）一般情况下，船舶航行时船底与海底的距离不小于 4.5 米是安全的，如果某船的吃水深度（船底与水面的距离）为 7 米，那么该船在什么时间段能够安全进港？若该船欲当天安全离港，它在港内停留的时间最多不能超过多长时间？（忽略离港所用的时间）

（21）（本小题15分）

在平面直角坐标系中，对于任意相邻三点都不共线的有序整点列（整点即横纵坐标都是整数的点）$A(n)$：$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 与 $B(n)$：$B_1,B_2,B_3,\cdots,B_n$，其中 $n\ge 3$，若同时满足：

①两点列的起点和终点分别相同；②线段 $A_iA_{i+1}\perp B_iB_{i+1}$，其中 $i=1,2,3,\cdots,n-1$，

则称 $A(n)$ 与 $B(n)$ 互为正交点列.

（Ⅰ）求 $A(3)$：$A_1(0,2),A_2(3,0),A_3(5,2)$ 的正交点列 $B(3)$；

（Ⅱ）判断 $A(4)$：$A_1(0,0),A_2(3,1),A_3(6,0),A_4(9,1)$ 是否存在正交点列 $B(4)$？并说明理由；

（Ⅲ）$\forall n\ge 5$，$n\in \mathbf{N}$，是否都存在无正交点列的有序整点列 $A(n)$？并证明你的结论.

高一第二学期期中测试

数学　参考答案　　　2023．4

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

（1）D　（2）B　（3）D　（4）A　（5）C

（6）C　（7）A　（8）D　（9）C　（10）B

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）$\sqrt{2}$　（12）$\frac{\pi}{3}$　（13）$\sqrt{13}$　（14）若 $\alpha // \beta, m \subset \beta$，则 $m // \alpha$.

（15）①④

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

（16）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$；

$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}$.　　------6 分

（Ⅱ）$CD \perp EF$，证明如下：

设 $AC=m$，则 $AB=2m$，$EF=m$.

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{8}\vec{a}^2-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{8}\times(2m)^2-\frac{1}{2}\times 2m\times m\times\cos 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}m^2=0.$$

$\therefore \overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{EF}$，

$\therefore CD \perp EF$.　　------14 分

（17）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $BC // $ 平面 PAD，$BC \subset$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$，

所以 $BC // AD$.　　-------6 分

（Ⅱ）直线 EF 与直线 GH 相交，理由如下：

连接 EG, FH，

因为 E,G 分别是棱 PA,PD 的中点,

所以 $EG//AD, EG=\frac{1}{2}AD$，同理可证：$FH//BC, FH=\frac{1}{2}BC$，

因为 $BC//AD$，所以 $EG//FH$，

所以 E,F,H,G 四点共面，

因为 $AD\neq BC$，所以 $EG\neq FH$，

所以 EF 与 GH 不平行，即 EF 与 GH 相交.　　------13 分

（18）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）三棱锥 B_1-ABD 的体积为：$\frac{1}{3}\cdot BB_1\cdot S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{2}{3}$；　　------4 分

（Ⅱ）因为 $AD//BC$，$AD\subset$ 平面 ADD_1A_1，$BC\not\subset$ 平面 ADD_1A_1，

所以 $BC//$ 平面 ADD_1A_1；　　------8 分

（Ⅲ）因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BB_1\perp AC$，

又因为 $AC\perp BD$，$BD\cap BB_1=B, BD, BB_1\subset$ 平面 BDB_1，

所以 $AC\perp$ 平面 BDB_1，因为 $DB_1\subset$ 平面 BDB_1，所以 $AC\perp B_1D$.　　------13 分

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中，$\left(2b-\sqrt{3}c\right)\cos A=\sqrt{3}a\cos C$，

由正弦定理得：$\left(2\sin B-\sqrt{3}\sin C\right)\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos C$，

所以 $2\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin C\cos A$，

即 $2\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A+C\right)$.

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin B=\sin\left(A+C\right)\neq0$，

所以 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $A\in\left(0,\pi\right)$，

所以 $A=\frac{\pi}{6}$.　------6 分

（Ⅱ）选条件①③：在 $\triangle ABC$ 中，有 $A=\frac{\pi}{6}$，$c=\sqrt{3}b$，$a=2$．

由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即 $4=b^2+3b^2-2b\times\sqrt{3}b\cos\frac{\pi}{6}$，

解得：$b=2$．

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

所以 $B=A=\frac{\pi}{6},C=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$．

选条件②③：在 $\triangle ABC$ 中，有 $A=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{2\pi}{3}$，$a=2$．

由 $A+B+C=\pi$ 可得：$C=\frac{\pi}{6}$．

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

所以 $c=a=2$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$． ------12 分

（Ⅲ）b 的取值范围为 $(2,4)$． ------15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）根据图表数据可得：$b=\frac{7+13}{2},A=\frac{13-7}{2}$，

$\therefore A=3$，$b=10$，

函数周期 $T=15-3=12$，$\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore$ 函数的解析式为 $y=3\sin\frac{\pi t}{6}+10(0\le t\le24)$； ------7 分

（Ⅱ）由题意知：若船舶航行时船是安全的，则 $y\ge4.5+7$，即 $3\sin\frac{\pi t}{6}+10\ge11.5$，

$\therefore \sin\frac{\pi}{6}t\ge\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{\pi}{6}t\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$，

解得$t\in[12k+1,12k+5],k\in\mathbf{Z}$，

又$0\le t\le 24$，

$\therefore t\in[1,5]$或$t\in[13,17]$.

故该船在 1:00 至 5:00 或 13:00 至 17:00 能安全进港，

若欲于当天安全离港，它在港内停留的时间最多不能超过 16 小时．------15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）设点列$A_1(0,2),A_2(3,0),A_3(5,2)$的正交点列是$B_1,B_2,B_3$，

由正交点列的定义可知$B_1(0,2),B_3(5,2)$，设$B_2(x,y)$，

$\overrightarrow{A_1A_2}=(3,-2),\overrightarrow{A_2A_3}=(2,2)$，$\overrightarrow{B_1B_2}=(x,y-2),\overrightarrow{B_2B_3}=(5-x,2-y)$，

由正交点列的定义可知 $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{B_1B_2}=0$，$\overrightarrow{A_2A_3}\cdot\overrightarrow{B_2B_3}=0$，

即$\begin{cases}3x-2(y-2)=0,\\2(5-x)+2(2-y)=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$

所以点列$A_1(0,2),A_2(3,0),A_3(5,2)$的正交点列是$B_1(0,2),B_2(2,5),B_3(5,2)$．------4 分

（Ⅱ）由题可得 $\overrightarrow{A_1A_2}=(3,1),\overrightarrow{A_2A_3}=(3,-1),\overrightarrow{A_3A_4}=(3,1)$，

设点列B_1,B_2,B_3,B_4是点列A_1,A_2,A_3,A_4的正交点列，

则可设$\overrightarrow{B_1B_2}=\lambda_1(-1,3),\overrightarrow{B_2B_3}=\lambda_2(1,3),\overrightarrow{B_3B_4}=\lambda_3(-1,3)$，$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3\in\mathbf{Z}$

因为A_1与B_1，A_4与B_4相同，所以有

$$\begin{cases}-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=9, & (1)\\3\lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3=1. & (2)\end{cases}$$

因为λ_1，λ_2，$\lambda_3\in\mathbf{Z}$，方程（2）显然不成立，

所以有序整点列$A_1(0,0),A_2(3,1),A_3(6,0),A_4(9,1)$不存在正交点列；---------------9 分

（Ⅲ）$\forall n\ge 5$，$n\in\mathbf{N}$，都存在整点列$A(n)$无正交点列．　　　-------------------------10 分

$\forall n\geq 5$，$n\in\mathbf{N}$，设 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=(a_i,b_i)$，其中 a_i,b_i 是一对互质整数，$i=1,2,3\cdots,n-1$

若有序整点列 $B_1,B_2,B_3,\cdots B_n$ 是点列 $A_1,A_2,A_3,\cdots A_n$ 正交点列，

则 $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}=\lambda_i(-b_i,a_i),i=1,2,3,\cdots,n-1$，

则有 $\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n-1}-\lambda_ib_i=\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i, & (1)\\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_ia_i=\sum\limits_{i=1}^{n-1}b_i. & (2)\end{cases}$

①当 n 为偶数时，取 $A_1(0,0)$，$a_i=3$，$b_i=\begin{cases}1, i\text{为奇数}\\ -1, \ i\text{为偶数}\end{cases}$，$i=1,2,3,\cdots,n-1$.

由于 $B_1,B_2,B_3,\cdots B_n$ 是整点列，所以有 $\lambda_i\in\mathbf{Z}$，$i=1,2,3,\cdots,n-1$.

等式（2）中左边是 3 的倍数，右边等于 1，等式不成立，

所以该点列 $A_1,A_2,A_3,\cdots A_n$ 无正交点列；

②当 n 为奇数时，

取 $A_1(0,0)$，$a_1=3,b_1=2$，$a_i=3$，$b_i=\begin{cases}1, i\text{为奇数}\\ -1, \ i\text{为偶数}\end{cases}$，$i=2,3,\cdots,n-1$，

由于 $B_1,B_2,B_3,\cdots B_n$ 是整点列，所以有 $\lambda_i\in\mathbf{Z}$，$i=1,2,3,\cdots,n-1$.

等式（2）中左边是 3 的倍数，右边等于 1，等式不成立，

所以该点列 $A_1,A_2,A_3,\cdots A_n$ 无正交点列.

综上所述，$\forall n\geq 5$，$n\in\mathbf{N}$，都存在无正交点列的有序整数点列 $A(n)$ ----------15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。