高二第一学期期末参考样题

数学 参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C　（2）A　（3）B　（4）D　（5）A

（6）B　（7）A　（8）C　（9）D　（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

（11）$(1,-3)$, 1　（12）1

（13）①②，$\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 或 ①③，$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 或 ②③，$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$

（14）4　（15）②③

说明:（1）第 13 题共有三种正确的填写方法，只需填写其中一种. 只有在第一空填写的条件下填对第二空才得满分，有一空不填或两空所填内容不匹配的均得 0 分；

（2）第 15 题不填或填写含有①的得 0 分，仅填写②或③的得 2 分，填写②③的得满分.

三、解答题（共 4 小题，共 40 分）

（16）（共 8 分）

解:（Ⅰ）设圆 O 的方程为 $x^2+y^2=r^2$， ……………………1 分

将点 M 的坐标代入圆 O 的方程得 $1+3=r^2$，即 $r=2$. ……………………2 分

所以圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$. ……………………3 分

（Ⅱ）圆心 O 到直线 $\sqrt{3}x+y-2=0$ 的距离为 $d=\frac{2}{\sqrt{3+1}}=1$， ……………………5 分

所以 $d^2+(\frac{|AB|}{2})^2=4$. ……………………7 分

所以 $|AB|^2=12$，$|AB|=2\sqrt{3}$. ……………………8 分

（17）（共 11 分）

解法一:

（Ⅰ）在直三棱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ACC_1A_1 为平行四边形.

所以 $AC \,//\, A_1C_1$.　　　　…………………………………………………………1 分

因为 $AC \not\subset$ 平面 A_1C_1M , $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1M ，

所以 $AC \,//$ 平面A_1C_1M .　　　　……………………………………………………3 分

（Ⅱ）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

所以 $CC_1 \perp A_1C_1$.

因为 $AC \perp BC$，且 $AC \,//\, A_1C_1$， $BC \,//\, B_1C_1$，所以 $A_1C_1 \perp B_1C_1$.

因为 $CC_1 \cap B_1C_1 = C_1$，所以 $A_1C_1 \perp$ 平面BB_1C_1C .　　　　…………………………4 分

又因为 $CM \subset$ 平面BB_1C_1C ，所以 $A_1C_1 \perp CM$.　　　　…………………………5 分

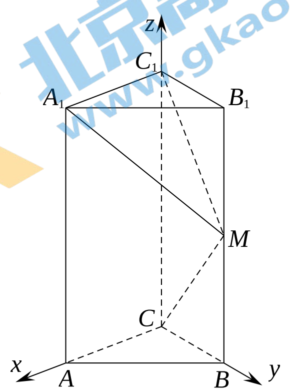
因为 $BB_1 \perp BC$, $BC = BM$ ，所以 $\angle CMB = 45°$.

同理 $\angle C_1MB_1 = 45°$ ，所以 $\angle CMC_1 = 90°$.

即 $CM \perp C_1M$.　　　　……………………………………………………………………6 分

因为 $A_1C_1 \cap C_1M = C_1$，所以 $CM \perp$ 平面A_1C_1M .　　　　…………………………7 分

（Ⅲ）由题意可知 CA, CB, CC_1 两两垂直，故以 C 为原点，以 CA, CB, CC_1 所在的直线分别为 x 轴， y 轴， z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$. 由题得



$C(0,0,0)$, $A_1(1,0,2)$, $B_1(0,1,2)$, $M(0,1,1)$.

所以 $\overrightarrow{CM} = (0,1,1)$, $\overrightarrow{MB_1} = (0,0,1)$, $\overrightarrow{A_1B_1} = (-1,1,0)$.

由（Ⅱ）知 $CM \perp$ 平面A_1C_1M，所以平面 A_1C_1M 的一个法向量为 $\boldsymbol{m} = \overrightarrow{CM} = (0,1,1)$.　　　　…………………………8 分

设平面 A_1MB_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$.

得 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{MB_1},\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{A_1B_1}$,即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0\end{cases}$. ……………………………………………9 分

得 $\begin{cases}z=0,\\ -x+y=0\end{cases}$.

令 $x=1$，得 $y=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,0)$. ……………………………………………10 分

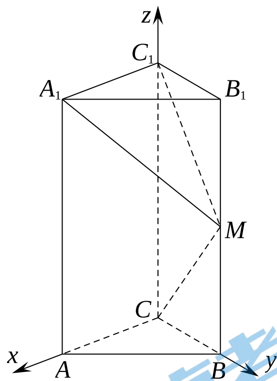
可得 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{2}$.

又因为二面角 $C_1-A_1M-B_1$ 的平面角为锐角,

所以二面角 $C_1-A_1M-B_1$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………11 分

解法二:

（Ⅰ）同解法一.



（Ⅱ）由题意可知 CA, CB, CC_1 两两垂直，故以 C 为原点，

以 CA, CB, CC_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建

立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$.

由题得 $A_1(1,0,2)$, $C_1(0,0,2)$, $M(0,1,1)$.

所以 $\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{A_1M}=(-1,1,-1)$，$\overrightarrow{CM}=(0,1,1)$

……………………………………………………………………4 分

设平面 A_1C_1M 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$.

得 $\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{A_1C_1},\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{A_1M}$,即 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0\end{cases}$. ………………………………5 分

得 $\begin{cases}x=0,\\ -x+y-z=0\end{cases}$.

则 $x=0$，令 $y=1$，得 $y=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$， ………………………………6 分

因为 $\boldsymbol{m}\,//\,\overrightarrow{CM}$，所以 $CM\perp$ 平面 A_1C_1M . ……………………………………7 分

（Ⅲ）设平面 A_1MB_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

得 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{MB_1}, \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{A_1B_1}$,即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0\end{cases}$. ……………………………………………8 分

得 $\begin{cases}z=0,\\ -x+y=0\end{cases}$.

令 $x=1$，得 $y=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,0)$. ……………………………………………………9 分

由（Ⅱ）可知，平面 A_1C_1M 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$. ………………………………10 分

可得 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{2}$.

又因为二面角 $C_1-A_1M-B_1$ 的平面角为锐角，

所以二面角 $C_1-A_1M-B_1$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………11 分

（18）（共 10 分）

解:（Ⅰ）将点 $(1,2)$ 的坐标代入抛物线 C 的方程，

得 $2^2=2p$，即 $p=2$. ………………………………………………………………1 分

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ……………………………………………………2 分

准线方程为 $x=-1$. ……………………………………………………………………………4 分

（Ⅱ）解法一:

依题意,直线 l 的斜率存在且不为 0，所以设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)\ (k\neq 0)$.

………………………………………………………………………………………………5 分

联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x\end{cases}$，化简得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$. ………………………………6 分

易知 $\Delta=(2k^2+4)^2-4k^4=16k^2+16>0$.

设 $M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$. ……………………………………7 分

则 $|MN|=x_1+x_2+2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}+2=\dfrac{4k^2+4}{k^2}$. ……………………………………8 分

易知 $Q(-1,-2k), F(1,0)$，所以 $|QF|=\sqrt{4+4k^2}$.

因为$|MN|=2\sqrt{2}|QF|$，所以$\dfrac{4k^2+4}{k^2}=2\sqrt{2}\sqrt{4+4k^2}$． ……………………………9 分

得$k^2=1$，即$k=\pm 1$．
所以直线l的方程为$x-y-1=0$或$x+y-1=0$． ……………………………10 分

解法二:

依题意,直线l的斜率存在且不为 0，所以设直线l的方程为$y=k(x-1)\ (k\neq 0)$．
……………………………………………………………………5 分

联立$\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x \end{cases}$，化简得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$． ……………………………6 分

易知$\Delta=(2k^2+4)^2-4k^4=16k^2+16>0$．

设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$，$x_1x_2=1$． ……………………………7 分

易知$Q(-1,-2k),F(1,0)$，因为$|MN|=2\sqrt{2}|QF|$，所以$\dfrac{|MN|}{|QF|}=2\sqrt{2}$．

所以$\dfrac{|x_1-x_2|}{2}=2\sqrt{2}$，即$|x_1-x_2|=4\sqrt{2}$． ……………………………8 分

即$\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{2}$，故$\sqrt{(\dfrac{2k^2+4}{k^2})^2-4}=4\sqrt{2}$． ……………………………9 分

得$k^2=1$，即$k=\pm 1$．
所以直线l的方程为$x-y-1=0$或$x+y-1=0$． ……………………………10 分

（19）（共 11 分）

解:（Ⅰ）依题意，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}, c=2$， ……………………………1 分

得$a=\sqrt{6}$，$b^2=a^2-c^2=2$． ……………………………3 分

得$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$． ……………………………4 分

（Ⅱ）设点$C(-m,0)$，则点$P(-\dfrac{m}{2},0)$． ……………………………5 分

联立方程$\begin{cases} y=x+m, \\ x^2+3y^2=6 \end{cases}$，

可得，$4x^2+6mx+3m^2-6=0$． ……………………………6 分

依题意，$\Delta = 36m^2 - 16(3m^2 - 6) > 0$，得 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

又因为 $m \neq 0$，所以 $-2\sqrt{2} < m < 0$ 或 $0 < m < 2\sqrt{2}$.

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$B_1(x_2, -y_2)$，

得 $x_1 + x_2 = -\dfrac{3m}{2}$. ……………………………………………………………7 分

设向量 $\overrightarrow{PA} = (x_1 + \dfrac{m}{2}, y_1)$，$\overrightarrow{PB_1} = (x_2 + \dfrac{m}{2}, -y_2)$，

则有 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB_1} = (x_1 + \dfrac{m}{2})(x_2 + \dfrac{m}{2}) - y_1 y_2$

$= (x_1 + \dfrac{m}{2})(x_2 + \dfrac{m}{2}) - (x_1 + m)(x_2 + m)$

$= -\dfrac{m}{2}(x_1 + x_2) - \dfrac{3}{4}m^2$

$= \dfrac{3m^2}{4} - \dfrac{3m^2}{4} = 0$.

所以 $PA \perp PB_1$.

所以 $\angle APB_1 = 90^\circ$. ……………………………………………………………9 分

设 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$，则 $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{3m}{4}$，$y_0 = x_0 + m = \dfrac{m}{4}$.

$k_{PM} = \dfrac{-\dfrac{3}{4}m + \dfrac{m}{2}}{\dfrac{m}{4} - 0} = -1$，由题意可知 $k_{AB} = 1$，故 $PM \perp AB$，所以 $|PA| = |PB|$.

因为点 B 关于 x 轴的对称点为 B_1，所以 $|PB| = |PB_1|$.

所以 $|PA| = |PB_1|$.

所以 $\triangle APB_1$ 为等腰直角三角形. ……………………………………11 分

注：本试卷各题中若有其他合理的解法请酌情给分.