北京二中 2022—2023 学年度第六学段高一年级学段考试试卷

数学必修 II

命题人：<u>陈星春</u>　　审核人：<u>周长春</u>　　得分：______

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

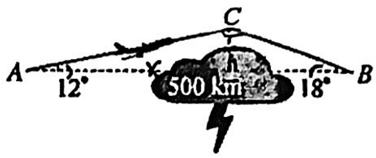
1．若复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=|1+\mathrm{i}|$，则 $\overline{z}$ 的虚部为

A．$-\sqrt{2}\mathrm{i}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2．某校“校园歌手”比赛中，某选手获得的原始评分为 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，去掉一个最高分和一个最低分后得到有效评分，则有效评分与原始评分相比较，一定不变的特征数是

A．中位数　　B．平均数　　C．众数　　D．方差

3．如图，一架飞机从 A 地飞往 B 地，两地相距 500km．飞行员为了避开某一区域的雷雨云层，从 A 点起飞以后，就沿与原来的飞行方向 AB 成 12^0 角的方向飞行，飞行到中途 C 点，再沿与原来的飞行方向 AB 成 18^0 角的方向继续飞行到终点 B．这样飞机的飞行路程比 500km 大约多飞了　　$(\sin 12°\approx 0.21,\sin 18°\approx 0.31)$



A．10km　　B．20km　　C．30km　　D．40km

4．甲、乙、丙三名射箭运动员在某次测试中各射箭 20 次，三人的测试成绩如下表

甲的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	5	5	5	5

乙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	6	4	4	6

丙的成绩				
环数	7	8	9	10
频数	4	6	6	4

s_1，s_2，s_3 分别表示甲、乙、丙三名运动员这次测试成绩的标准差，则有

A．$s_2>s_1>s_3$　　B．$s_3>s_1>s_2$　　C．$s_1>s_2>s_3$　　D．$s_2>s_3>s_1$

5．已知 α，β，γ 是三个不同的平面，m，n 是两条不同的直线，若 $\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，则“$m//n$”是“$\alpha//\beta$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 AD 的中点，N 是 C_1D_1 的中点，则异面直线 D_1M 与 DN 所成角的余弦值为

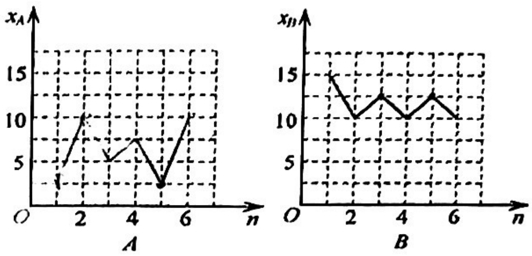
A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{5}$

7．经纬度是经度与纬度的合称，它们组成一个坐标系统，称为地理坐标系统，它是利用三维空间的球面来定义地球上的空间的球面坐标系，能够标示地球上任何一个位置，其中纬度是地球重力方向上的铅垂线与赤道平面所成的线面角．如我国著名冰城哈尔滨就处在北纬30°，若将地球看成近似球体，其半径约为6400km，则北纬30°纬线的长为

A．$6400\sqrt{3}\pi$km　　B．6400πkm

C．$3200\sqrt{3}$km　　D．$3200\sqrt{3}\pi$km

8．如图，样本 A 和 B 分别取自两个不同的总体，它们的样本平均数分别为$\overline{x}_A$和$\overline{x}_B$，样本标准差分别为s_A和s_B，样本极差分别为y_A和y_B，则



A．$\overline{x}_A>\overline{x}_B$，$s_A>s_B$，$y_A<y_B$

B．$\overline{x}_A<\overline{x}_B$，$s_A>s_B$，$y_A>y_B$

C．$\overline{x}_A>\overline{x}_B$，$s_A<s_B$，$y_A>y_B$

D．$\overline{x}_A<\overline{x}_B$，$s_A<s_B$，$y_A<y_B$

9．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，$AB\perp AC$，且 $PA=AB=2$，$AC=2\sqrt{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积等于

A．$\frac{20}{3}\sqrt{3}\pi$　　B．$\frac{20}{3}\pi$　　C．$\frac{20}{3}\sqrt{5}\pi$　　D．20π

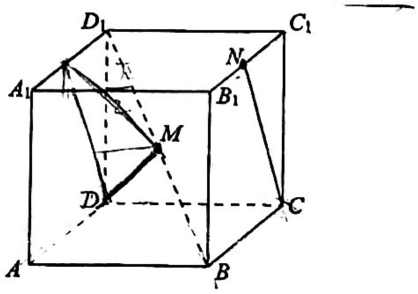
10．设函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{12}\right)(\omega>0)$，将函数 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），得到函数 $y=g(x)$ 的图象．若对于任意的实数 x，$g(x)\le g\left(\frac{\pi}{3}\right)$恒成立．则$\omega$的最小值等于

A．$\frac{11}{8}$　　B．$\frac{7}{8}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{1}{8}$

11．设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，定义$\vec{a}\oplus\vec{b}=\left|\vec{a}\sin\theta+\vec{b}\cos\theta\right|$．已知向量$\vec{a}$为单位向量，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=1$，则$\vec{a}\oplus\vec{b}=$

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D．$2\sqrt{3}$

12．在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为 BD_1,B_1C_1 的中点，点 P 在正方体的表面上运动，且满足 $MP\perp CN$，则下列说法正确的是



A．点 P 可以是棱 BB_1 的中点　　B．线段 MP 的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．点 P 的轨迹是正方形　　D．点 P 轨迹的长度为$2+\sqrt{5}$

二．填空题（本大题共 6 小题，共 30 分）

13. 某数学老师记录了班上 8 名同学的数学考试成绩，得到如下数据：90，98，100，108，111，115，115，125. 则这组数据的 70% 分位数是__________.

14. 已知向量 $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(x,2)$，若 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 $\vec{a}$，则 x 的值为________.

15. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=4$，点 E 为 CD 的中点（如图 1），沿 AE 将△ADE 折起到△APE 处，使得平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$（如图 2），则直线 PC 与平面 $ABCE$ 所成角的正切值为__________.

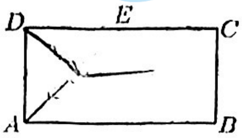


图1

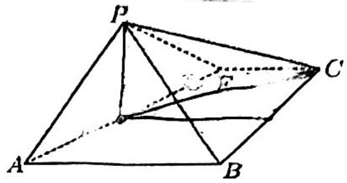


图2

16. 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$（$\omega>0$）的图象在[0，1]上恰有两个最大值点，则 ω 的取值范围为__________.

17. 若正三棱台(上、下底面是正三角形，上底面的中心在下底面的投影是下底面的中心)的上、下底面的面积分别是$\sqrt{3}$和$4\sqrt{3}$，体积为$\frac{7\sqrt{5}}{3}$，则其侧棱长为__________.

18. 已知一组样本数据x_1，x_2，…，x_n($x_1<x_2<\cdots<x_n$)，现有一组新的数据$\frac{x_1+x_2}{2}$，$\frac{x_2+x_3}{2}$，…，$\frac{x_{n-1}+x_n}{2}$，$\frac{x_n+x_1}{2}$，则与原样本数据相比，对于新的数据有以下四个判断：

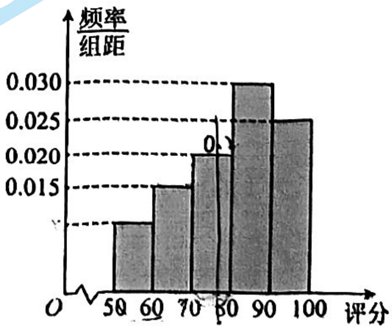
①平均数不变；　②中位数不变；　③极差变小；　④方差变小，

其中所有正确判断的序号是__________

三．解答题（本大题共 5 小题，共 60 分）

19.（本小题 12 分）

某中学为了学生的身心健康，加强学生食堂用餐质量工作.在这个过程中，学校后勤部门需了解学生对食堂用餐质量的认可程度，若学生认可系数（认可系数 $=\frac{\text{认可程度平均分}}{100}$）不低于 0.85，食堂用餐质量工作按原方案继续实施，否则需进一步整改.为此该部门随机调查了 600 名学生，根据这 600 名学生对食堂用餐质量工作认可程度给出的评分，分成[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)，[90,100]五组，得到如图所示的频率分布直方图.



（Ⅰ）求直方图中 x 的值，并估计样本评分的第 60 百分位数；

（Ⅱ）为了解部分学生给食堂用餐质量工作评分较低的原因，该部门从评分低于 80 分的学生中用比例分配的分层抽样的方法随机选取 30 人进行座谈，求应选取评分在[60,70)内的学生人数；

（Ⅲ）根据你所学的统计知识，结合认可系数，判断食堂用餐质量工作是否需要进一步整改，并说明理由.

20.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos 2x-\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

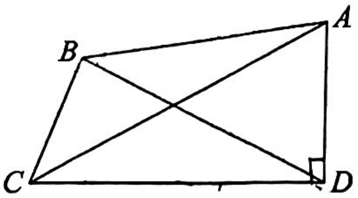
（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $(0,t]$ 上存在最小值，求实数 t 的取值范围.

21.（本小题 12 分）

如图所示，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=135^\circ$，$AD\perp CD$，$AB=\sqrt{2},BC=1,CD=2$.

（Ⅰ）求 $\sin\angle ACD$ 的值；

（Ⅱ）求 BD 的长.



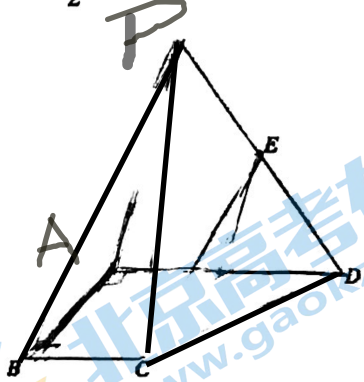
22.（本小题 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\parallel$ 平面 PAD，$BC=\frac{1}{2}AD$，$\angle ABC=90^\circ$，E 是 PD 的中点.

（Ⅰ）求证：$BC\parallel AD$；

（Ⅱ）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

（Ⅲ）若 M 是线段 CE 上任意一点，试判断线段 AD 上是否存在点 N，使得 $MN\parallel$ 平面 PAB？请说明理由.



23.（本小题 12 分）

已知集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$（$n\geqslant 3$ 且 $n\in N^*$），$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，且 $A\subseteq S$. 若对任意 $a_i\in A,a_j\in A$（$1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$），当 $a_i+a_j\leqslant n$ 时，存在 $a_k\in A$（$1\leqslant k\leqslant m$），使得 $a_i+a_j=a_k$，则称 A 是 S 的 m 元完美子集.

（Ⅰ）判断下列集合是否是 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 的 3 元完美子集，并说明理由；

① $A_1=\{1,2,4\}$　　② $A_2=\{2,4,5\}$.

（Ⅱ）若 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 是 $S=\{1,2,\cdots,7\}$ 的 3 元完美子集，求 $a_1+a_2+a_3$ 的最小值；

（Ⅲ）若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是 $S=\{1,2,\cdots,n\}$（$n\geqslant 3$ 且 $n\in N^*$）的 m 元完美子集，

求证：$a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant\frac{m(n+1)}{2}$，并指出等号成立的条件.

北京二中 2022—2023 学年度第六学段高一年级学段考试试卷答案

数学必修 II

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

1．D． 2．**A**． 3．B．4．**A**．5．B．6．D．7．A．8．B．9．C．10．C．11．C．**12**．D．

二、填空题（本大题共 6 小题，共 30 分）

13． 115.

14． $\frac{3}{2}$.

15． $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

16． $[\frac{13\pi}{6},\frac{25\pi}{6})$.

17． $\sqrt{3}$.

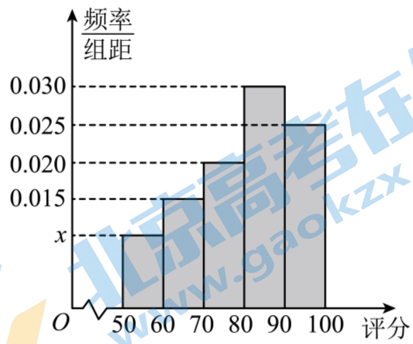
18． ①③④.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 60 分）

19. 某中学为了学生的身心健康，加强学生食堂用餐质量工作.在这个过程中，学校后勤部门需了解学生对食堂用餐质量的认可程度，若学生认可系数

$\left(认可系数=\frac{认可程度平均分}{100}\right)$不低于 0.85，

食堂用餐质量工作按原方案继续实施，否则需进一步整改.为此该部门随机调查了 600 名学生，根据这 600 名学生对食堂用餐质量工作认可程度给出的评分，分成$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$五组，得到如图所示的频率分布直方图.



（Ⅰ）求直方图中x的值，并估计样本评分的第 60 百分位数；

（Ⅱ）为了解部分学生给食堂用餐质量工作评分较低的原因，该部门从评分低于 80 分的学生中用比例分配的分层抽样的方法随机选取 30 人进行座谈，求应选取评分在$[60,70)$内的学生人数；

（Ⅲ）根据你所学的统计知识，结合认可系数，判断食堂用餐质量工作是否需要进一步整改，并说明理由.

【解】（Ⅰ）由图可知：$10\times(x+0.015+0.02+0.03+0.025)=1$，解得$x=0.01$.

因为$[50,80)$内的频率为$0.1+0.15+0.2=0.45<0.6$，

$[50,90)$内的频率为$0.1+0.15+0.2+0.3=0.75>0.6$，

所以，第 60 百分位数位于区间$[80,90)$内，设为m，

则$m=80+\frac{0.6-0.45}{0.3}\times(90-80)=85$，

所以估计第 60 百分位数为 85.

（Ⅱ）低于 80 分的学生中三组学生的人数比例为$0.1:0.15:0.2=2:3:4$，

则应选取评分在$[60,70)$内的学生人数为：$30\times\frac{3}{2+3+4}=10$（人）.

（Ⅲ）由图可知，认可程度平均分为：
$\bar{x}=55\times0.1+65\times0.15+75\times0.2+85\times0.3+95\times0.25=79.5$

认可系数为$0.795<0.85$

所以，食堂用餐质量工作需要进一步整改.

20.已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos 2x-\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $(0,t]$ 上存在最小值，求实数 t 的取值范围.

【解】（Ⅰ）$f(x)=2\sqrt{3}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos 2x-\sqrt{3}$

$$=-\sqrt{3}\left[1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]-\cos 2x=-\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos 2x$$

$$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right),$$

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$

得$-\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right](k\in Z)$.

（Ⅱ）当$x\in(0,t]$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},2t-\frac{\pi}{6}\right]$，

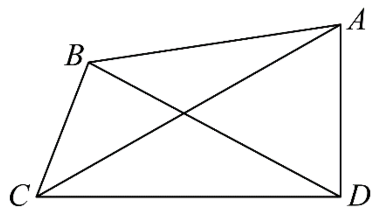
因为 $f(x)$ 在$(0,t]$上存在最小值，所以$2t-\frac{\pi}{6}\ge\frac{7\pi}{6}$，所以$t\ge\frac{2\pi}{3}$.

实数 t 的取值范围为$\left[\frac{2\pi}{3},+\infty\right)$.

21．如图所示，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=135^\circ, AD\perp CD$，$AB=\sqrt{2}, BC=1, CD=2$.

（Ⅰ）求 $\sin\angle ACD$ 的值；

（Ⅱ）求 BD 的长.



【解】（Ⅰ）由题意，

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=135^\circ$，$AB=\sqrt{2}$，$BC=1$，

由余弦定理得，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$，

$\therefore AC^2=2+1-2\times\sqrt{2}\times1\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\therefore AC=\sqrt{5}$.

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ADC$ 中，$AD\perp CD$，$CD=2$，

$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{5-4}=1$，

$\therefore \sin\angle ACD=\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅱ）在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得，$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$.

$\therefore \sin\angle BCA=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，且 $0^0<\angle BCA<45^0$.

由（Ⅰ）知 $\sin\angle ACD=\frac{\sqrt{5}}{5}$，且 $0^0<\angle ACD<90^0$，$\therefore \angle BCA=\angle ACD$，

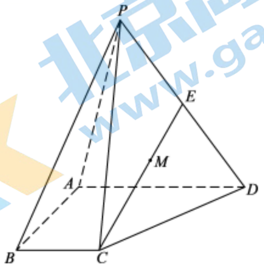
$\therefore \cos\angle BCD=\cos2\angle BCA=1-2\sin^2\angle BCA=1-2\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.

在 $\triangle BCD$ 中，$BC=1$，$CD=2$，

由余弦定理得，$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\angle BCD$，

$\therefore BD^2=1+4-2\times1\times2\times\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$，$\therefore BD=\frac{\sqrt{65}}{5}$.

22．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, BC // 平面 PAD, $BC=\frac{1}{2}AD$，$\angle ABC=90°$，E 是 PD 的中点.



（Ⅰ）求证：$BC//AD$；

（Ⅱ）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

（Ⅲ）若 M 是线段 CE 上任意一点，试判断线段 AD 上是否存在点 N，使得 MN // 平面 PAB？请说明理由.

【解】（Ⅰ）$\because BC$ // 平面 PAD,

$BC\subset$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $BC//AD$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $BC//AD$

又因为 $AB\perp BC$，所以 $AB\perp AD$

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$AB\subset$ 平面 $ABCD$

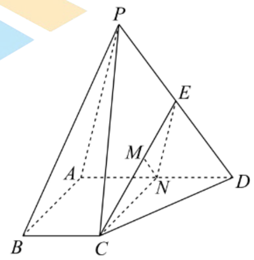
所以 $AB\perp$ 平面 PAD，

又因为 $AB\subset$ 平面 PAB，

所以平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.

（III）存在线段 AD 的中点 N，使得 MN // 平面 PAB

证明如下：



取 AD 的中点 N，连接 CN,EN，

因为 E,N 分别为 PD,AD 的中点，

所以 EN // PA，

又因为 $EN\not\subset$ 平面 PAB， $PA\subset$ 平面 PAB，

所以 EN// 平面 PAB，

又因为 $BC=\frac{1}{2}AD$， $BC//AD$， N 为 AD 的中点，

所以 $BC//AN, BC=AN$

所以四边形 $ABCN$ 为平行四边形，

所以 CN // AB，

因为 $CN\not\subset$ 平面 PAB， $AB\subset$ 平面 PAB，

所以 CN // 平面 PAB，

又因为 $CN\cap NE=N$，

所以平面 CNE // 平面 PAB，

又因为 $MN\subset$ 平面 CNE，

所以 MN // 平面 PAB.

23.已知集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$（$n\geqslant 3$ 且 $n\in N^*$）， $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，且 $A\subseteq S$.

若对任意 $a_i\in A, a_j\in A$ （$1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$），当 $a_i+a_j\leqslant n$ 时，存在 $a_k\in A$（$1\leqslant k\leqslant m$），

使得 $a_i+a_j=a_k$，则称 A 是 S 的 m 元完美子集.

（Ⅰ）判断下列集合是否是 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 的 3 元完美子集，并说明理由；

① $A_1=\{1,2,4\}$；　　　　② $A_2=\{2,4,5\}$.

（Ⅱ）若 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 是 $S=\{1,2,\cdots,7\}$ 的 3 元完美子集，求 $a_1+a_2+a_3$ 的最小值；

（III）若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是 $S=\{1,2,\cdots,n\}$（$n\geqslant 3$ 且 $n\in N^*$）的 m 元完美子集，

求证：$a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant\frac{m(n+1)}{2}$，并指出等号成立的条件.

【解】（Ⅰ）①因为 $1+2=3\leqslant 5$，又 $3\notin A_1$，所以 A_1 不是 S 的 3 元完美子集.

②因为 $2+2=4\leqslant 5$，且 $4\in A_2$，而 $5+5>4+5>4+4>2+5>2+4>5$，

所以 A_2 是 S 的 3 元完美子集.

（Ⅱ）不妨设 $a_1<a_2<a_3$.

若 $a_1=1$，则 $a_1+a_1=2\in A$, $1+2=3\in A$, $1+3=4\in A$，与 3 元完美子集矛盾；

若 $a_1=2$，则 $a_1+a_1=4\in A$， $2+4=6\in A$，而 $2+6>7$，符合题意，所以 $a_2=4, a_3=6$，

此时有 $a_1+a_2+a_3=12$.

若 $a_1\geqslant 3$，则 $a_2\geqslant 4$， $a_3\geqslant 5$，所以 $a_1+a_2+a_3\geqslant 12$.

综上， $a_1+a_2+a_3$ 的最小值是 12.

（III）证明：不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_m$.

对任意 $1\leqslant i\leqslant m$，都有 $a_i+a_{m+1-i}\geqslant n+1$，

否则，存在某个 $i(1\leqslant i\leqslant m)$，使得 $a_i+a_{m+1-i}\leqslant n$.

由 $a_1<a_2<\cdots<a_m$，得 $a_i<a_i+a_1<a_i+a_2<\cdots<a_i+a_{m+1-i}\leqslant n$.

所以 $a_i+a_1, a_i+a_2, \cdots, a_i+a_{m+1-i}$ 是 A 中 $m+1-i$ 个不同的元素，

且均属于集合 $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_m\}$，

该集合恰有 $m-i$ 个不同的元素，显然矛盾.

所以对任意 $1\leqslant i\leqslant m$，都有 $a_i+a_{m+1-i}\geqslant n+1$.

于是 $2(a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+a_m)=(a_1+a_m)+(a_2+a_{m-1})+\cdots+(a_{m-1}+a_2)+(a_m+a_1)\geqslant m(n+1)$.

即 $a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant \dfrac{m(n+1)}{2}$.

等号成立的条件是 $a_1=\dfrac{n+1}{m+1}\in N^*$ 且 $a_i=\dfrac{(n+1)i}{m+1}(2\leqslant i\leqslant m)$.

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年7月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新 最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者底部栏目<**高一高二→期末试题**>， 进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！