座位号______ 考场号______ 考生号______ 姓名______ 班级______ 县(市、区)______

装 订 线

绝密★启用前

海南省 2023—2024 学年高三学业水平诊断(一)

数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|x^2<1\}$，$B=\{x|\log_2 x\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$

A. $(0,1)$　B. $(-1,2]$　C. $(-1,0)$　D. $(0,2]$

2. 若 $\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2-3\leqslant a$，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,-3]$　B. $[-3,+\infty)$　C. $(-\infty,0]$　D. $[0,+\infty)$

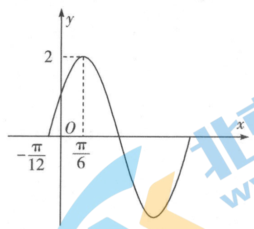
3. 函数 $f(x)=2^{x-1}+x-3$ 的零点所在的区间是

A. $(-1,0)$　B. $(0,1)$　C. $(1,2)$　D. $(2,3)$

4. 比尔－朗伯定律是一条有关光吸收的物理定律，常用来描述光在透明介质中传播时的衰减规律，其数学表达式可写为 $-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)=x$，其中 I_0 和 I 表示光在穿过介质前、后的强度(单位：lx)，x 是光在介质中传播的距离(单位：m)，其中 k 是取决于介质特性的常数. 若某处湖面的阳光强度为 $I_0=6\ 600$ lx，对于此湖中的水取 $k=0.025$，则此湖中 20 m 深处的阳光强度约为(参考数据：$\sqrt{e}\approx 1.65$)

A. 1 500 lx　B. 2 000 lx　C. 3 000 lx　D. 4 000 lx

5. 已知函数 $f(x)=2\cos(2\omega x-\varphi)$ 的部分图象如图所示，则 $\sin(\omega\varphi)$ 的所有可能取值的集合为



A. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$　B. $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$　C. $\left\{-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$　D. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

6. 若 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\tan\alpha=$

A. $\frac{4+\sqrt{7}}{5}$　B. $\frac{4-\sqrt{7}}{5}$　C. $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$　D. $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

7. 已知 $a=\lg 3$，$b=\sin 1$，$c=0.5^{0.8}$，则

A. $a<b<c$　B. $c<a<b$　C. $a<c<b$　D. $b<a<c$

8. 已知函数 $f(x)=(x+1)e^x$，过点 $P(m,0)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的两条切线，切点分别为 $A(a,f(a))$ 和 $B(b,f(b))$，若 $a+b=0$，则实数 $m=$

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $a>0$，$b>0$，若 $a+2b=1$，则

A. $a+b>\frac{1}{2}$　B. $a+b<1$

C. $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为 8　D. ab 的最大值为$\frac{1}{4}$

10. 已知函数 $f(x)=\sin 2x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，则

A. $f(x)$的最小正周期为 π

B. $f(x)$的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$对称

C. $f(x)$的零点是$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})\right\}$

D. $f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

11. 古希腊的数学家海伦在他的著作《测地术》中最早记录了“海伦公式”：$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\frac{a+b+c}{2}$，a,b,c 分别为△ABC 的三个内角 A,B,C 所对的边，该公式具有轮换对称的特点. 已知在△ABC 中，$\sin A:\sin B:\sin C=8:7:3$，且△$ABC$ 的面积为 $12\sqrt{3}$，则

A. 角 A,B,C 构成等差数列　B. △ABC 的周长为 36

C. △ABC 的内切圆面积为$\frac{8\pi}{3}$　D. BC 边上的中线长度为 $\sqrt{26}$

12. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+2)$为奇函数，$f(2x+1)$为偶函数，则

A. 函数 $f(x)$的图象关于点$(2,1)$对称　B. 函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称

C. $f(1)+f(7)=0$　D. $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 024)=0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{Z})$，写出一个同时满足下列性质①②的 α 的值：________.
①当 $x\in(-\infty,0)$时，$f(x)<0$；②$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

14. 已知 $\cos x=\frac{3}{5}$，则$\frac{\sin x\sin 2x}{1-\cos 2x}=$__________.

15. 设 $0<a<1$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$，若函数 $f(x)=\log_a x+\log_{2a}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是__________.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_2(x-1)|, x>1,\\ (x+1)^2, x\leqslant 1,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有 4 个不相等的实数根 x_1,x_2,x_3,x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围是__________.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-1$，S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=n\cdot 3^{a_n+2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

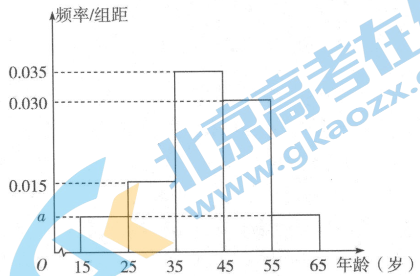
18.（12 分）

国务院于 2023 年开展第五次全国经济普查，为更好地推动第五次全国经济普查工作，某地充分利用信息网络开展普查宣传，向基层普查人员、广大普查对象及社会公众宣传经济普查知识. 为了解宣传进展情况，现从参与调查的人群中随机选出 200 人，并将这 200 人按年龄（单位：岁）分组：第 1 组 $[15,25)$，第 2 组 $[25,35)$，第 3 组 $[35,45)$，第 4 组 $[45,55)$，第 5 组 $[55,65]$，得到的频率分布直方图如图所示.

（Ⅰ）求图中 a 的值；

（Ⅱ）求这 200 人年龄的平均数（同一组数据用该组所在区间的中点值作代表）和中位数（精确到 0.1）；

（Ⅲ）现要从年龄在 $[25,35)$ 与 $[55,65]$ 的两组中按照人数比例用分层随机抽样的方法抽取 5 人，再从这 5 人中任选 3 人进行问卷调查，求从 $[25,35)$ 中至少抽到 2 人进行问卷调查的概率.



19.（12 分）

设△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $(\sin B+\sin C)(b-c)=(a-\sqrt{2}c)\cdot\sin A$.

（Ⅰ）求 B 的值；

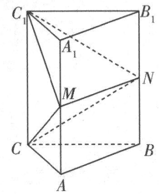
（Ⅱ）若 $b=\sqrt{2}$，且△ABC 的面积为 1，求△ABC 的周长.

20.（12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M,N 分别为棱 AA_1，BB_1 的中点，$AC\perp AB$，$AB=4$，$AC=3$，$AA_1=6$.

（Ⅰ）求证：$CM\perp$ 平面 C_1MN；

（Ⅱ）求二面角 $C-C_1N-M$ 的正弦值.



21.（12 分）

已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的渐近线的距离是 $\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求 p 的值；

（Ⅱ）已知过点 F 的直线与 E 交于 A,B 两点，线段 AB 的中垂线与 E 的准线 l 交于点 P，且线段 AB 的中点为 M，设 $|PM|=\lambda|AB|$，求实数 λ 的取值范围.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x^2-2ax+a^2)e^{1-x}$，$g(x)=2\ln(x-1)-x+1$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若 $a=1$，函数 $h(x)=mf(x)-g(x)$，且对任意 $x>1$，$h(x)>0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.