北京市朝阳区 2018 ~2019 学年度第一学期高三年级期中统一检测

数学试卷(文史类)

2018. 11

(考试时间 120 分钟　　满分 150 分)

本试卷分为选择题(共 40 分)和非选择题(共 110 分)两部分

考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分(选择题　共 40 分)

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x\mid x(x-2)\leqslant 0\}$, $B=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B=$

A. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$　　B. $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$　　C. $\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$　　D. $\varnothing$

2. 下列函数中,既是偶函数又存在零点的是

A. $y=2^x$　　B. $y=|x|+1$　　C. $y=x^3$　　D. $y=\cos x$

3. 设平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 则实数 k 的值等于

A. $\frac{3}{2}$　　B. 0　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{3}{2}$

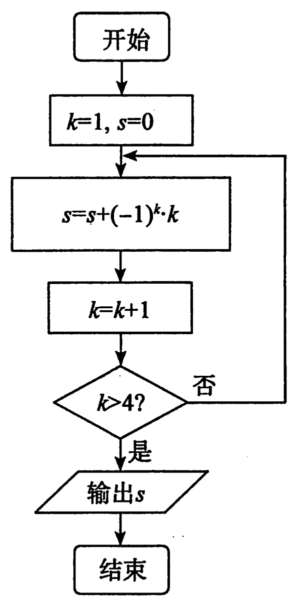
4. 执行如图所示的程序框图,输出的 s 值为

A. -10

B. -2

C. 2

D. 10



(第 4 题图)

5. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则“$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$”是“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 设 m,n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，有以下四个命题：

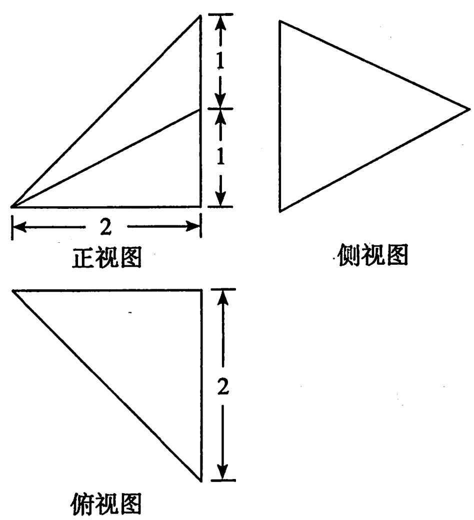
①若 $\alpha\perp\beta, m/\!/\alpha$，则 $m\perp\beta$　　②若 $m\perp\alpha, m/\!/n$，则 $n\perp\alpha$

③若 $m\perp\alpha, m\perp n$，则 $n/\!/\alpha$　　④若 $m\perp\alpha, m\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

其中真命题的序号为

A. ①③　　B. ②③　　C. ①④　　D. ②④

7. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积等于



（第 7 题图）

A. $\frac{4}{3}$　　B. 2　　C. $\frac{8}{3}$　　D. 6

8. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 的周期为 2，且 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$. 若函数 $F(x)=f(x)-\sin\frac{\pi}{2}x$ 在区间 $[-3,m]$ $(m\in\mathbf{Z}$ 且 $m>-3)$ 上至少有 5 个零点，则 m 的最小值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

第二部分（非选择题　共 110 分）

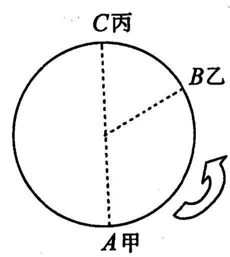
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 已知 $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$，$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$，则 $\cos\alpha =$ ________.

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = 2$，且满足 $a_7 = a_3 + a_4$，则 $a_1 =$ ________.

11. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ x + y - 2 \leqslant 0, \\ y + 2 \geqslant 0, \end{cases}$ 则 $z = x + 2y$ 的最大值为________.

12. 如图，甲、乙、丙三人在同一个圆形跑道上运动．计时开始时，甲、乙、丙分别从 A, B, C 三点出发，三个人的前进方向相同，甲在乙后面 $\frac{1}{3}$ 圈，乙在丙后面 $\frac{1}{6}$ 圈．甲以 $\frac{1}{3}$ 圈/分钟的速度慢跑，乙以 $\frac{1}{4}$ 圈/分钟的速度快走，丙以 $\frac{1}{6}$ 圈/分钟的速度慢走．那么，经过________分钟，甲和乙两人第一次相遇；30 分钟之内，甲、乙、丙三人________（填"能"或"不能"）同时相遇.



（第 12 题图）

13. 海水受日月的引力，在一定的时候发生的涨落现象叫潮．港口的水深会随潮的变化而变化．某港口水的深度 y（单位：米）是时刻 t（$0 \leqslant t \leqslant 24$，单位：小时）的函数，记作 $y = f(t)$．下面是该港口某日水深的数据：

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	8.0	11.0	7.9	5.0	8.0	11.0	8.0	5.0	8.0

经长期观察，曲线 $y = f(t)$ 可以近似地看成函数 $y = A\sin\omega t + b$（$A > 0, \omega > 0$）的图象．根据以上数据，函数 $y = f(t)$ 的近似表达式为________.

14. 已知函数 $f(x)=|2^x-2|$.

(1)若 $m\geqslant 2$,则关于 x 的方程 $f(x)=m$ 的根的个数为________;

(2)若 $a\neq b$,且 $f(a)=f(b)$,则 $a+b$ 的取值范围是________.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 80 分.解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程.

15.(本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x-\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的单调递增区间.

16.(本小题满分 13 分)

设 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 是各项均为正数的等比数列,且 $a_2=3$,$a_4-a_3=18$.

(Ⅰ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ)若 $b_n=a_n+\log_3 a_n$,求 $b_1+b_2+\cdots+b_n$.

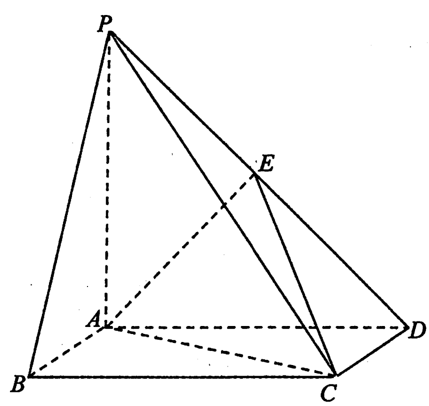
17.(本小题满分 14 分)

我国古代数学中,将底面为矩形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称为阳马. 如图,在阳马 $P-ABCD$ 中,侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,E 是 PD 的中点,连接 AE,EC,AC.

(Ⅰ)求证:$\triangle PBC$ 为直角三角形;

(Ⅱ)求证:$PB/\!/$ 平面 ACE;

(Ⅲ)若 $PA=AD=2AB=2$,求多面体 $PABCE$ 的体积.



18.（本小题满分 13 分）

在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$A=\frac{\pi}{3}$，$\tan B=-4\sqrt{3}$，$b=8$.

（Ⅰ）求a；

（Ⅱ）求点A到边BC的距离.

19.（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+x+1(a\geqslant 1)$.

（Ⅰ）若$a=3$，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（Ⅱ）若$f(x)$在$\mathbf{R}$上无极值点，求a的值；

（Ⅲ）当$x\in(0,2)$时，讨论函数$f(x)$的零点个数，并说明理由.

20.（本小题满分 14 分）

已知函数$f(x)=x-\sin x\cos x$.

（Ⅰ）求证：当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，$f(x)\geqslant 0$；

（Ⅱ）设$g(x)=\frac{x}{\tan x}$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

（ⅰ）试判断函数$g(x)$的单调性并证明；

（ⅱ）若$g(x)<a$恒成立，求实数a的最小值.

北京市朝阳区 2018-2019 学年度第一学期高三年级期中统一检测

数学试卷（文史类）答案　　2018．11

一、选择题（本题满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	C	A	D	A	A

二、填空题（本题满分 30 分）

题号	9		10	11	
答案	$\frac{4}{5}$		2	3	
题号	12		13	14	
答案	4	不能	$y=3\sin\frac{\pi}{6}t+8$	1	$(-\infty,2)$

三、解答题（本题满分 80 分）

15. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\sin 2x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$.

所以，$f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

令 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，可得 $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以，当 $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)$ 取最大值 1.　　…………8 分

（Ⅱ）由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 可得：

$k\pi-\frac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}],k\in\mathbf{Z}$.　　…………13 分

16. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 $q(q>0)$，则依题意，

$\begin{cases}a_1q=3,\\ a_1q^3-a_1q^2=18,\end{cases}$ 解得 $a_1=1,q=3$,

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^{n-1},n\in\mathbf{N}^*$. …………7 分

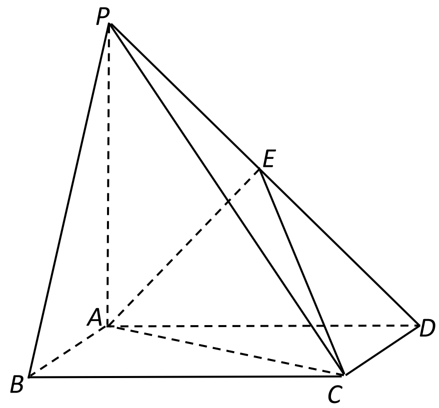
（Ⅱ）因为 $b_n=a_n+\log_3 a_n=3^{n-1}+(n-1)$，

所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})+[0+1+2+\cdots+(n-1)]$

$$=\frac{1-3^n}{1-3}+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=\frac{3^n-1}{2}+\frac{n(n-1)}{2}.$$ …………13 分

17. （本小题满分 14 分）



解：（Ⅰ）证明：因为四边形 $ABCD$ 为矩形，

所以 $AB\perp BC$.

又因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BC$.

所以 $BC\perp$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PB$.

所以 ΔPBC 为直角三角形. …………4 分

（Ⅱ）证明：连接 BD，设 $AC\bigcap BD=O$，

连接 EO. （如图）

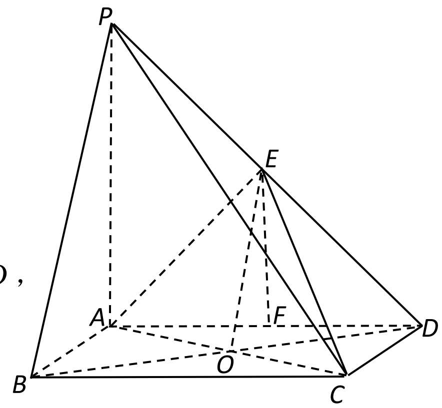
因为四边形 $ABCD$ 为矩形，

所以 O 为 BD 中点.

又因为 E 为 PD 中点，所以 $EO//PB$.

因为 $PB\not\subset$ 平面 ACE， $EO\subset$ 平面 ACE，

所以 $PB//$ 平面 ACE. …………9 分



（Ⅲ）解：过点 E 作 $EF\perp AD$ 于 F.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.

因为平面 $PAD\bigcap$ 平面 $ABCD=AD$，且 $EF\subset$ 平面 PAD，

所以 $EF\perp$ 平面 $ABCD$.

即 EF 为三棱锥 $E-ACD$ 的高，

且 $EF//PA$.

因为 E 为 PD 中点，所以 $EF=\frac{1}{2}PA$.

又因为 $PA=AD=2AB=2$，所以 $EF=1$.

于是 $V_{多面体PABCE}=V_{四棱锥P\text{-}ABCD}-V_{三棱锥E-ACD}$

$=\frac{1}{3}\cdot S_{四边形ABCD}\cdot PA-\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ACD}\cdot EF$

$=\frac{1}{3}AB\times AD\times AP-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AD\times CD\times EF$

$=\frac{1}{3}\times1\times2\times2-\frac{1}{6}\times2\times1\times1=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$. ……………14 分

18. （本小题满分 13 分）

证明：（Ⅰ）因为 $\tan B=-4\sqrt{3}$，即 $\frac{\sin B}{\cos B}=-4\sqrt{3}$，

又 $\sin^2 B+\cos^2 B=1$， B 为钝角，所以 $\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$， 即 $\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$， 解得 $a=7$. …………7 分

（Ⅱ）在△ ABC 中，由 $\tan B<0$ 知 B 为钝角，所以 $\cos B=-\frac{1}{7}$.

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{1}{7})+\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$,

点 A 到 BC 的距离为 $b\sin C=8\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{12\sqrt{3}}{7}$. …………13 分

19. （本小题满分 13 分）

解:（I）当 $a=3$ 时， $f(x)=x^3-2x^2+x+1$,

$f'(x)=3x^2-4x+1$， $f'(1)=0$， $f(1)=1$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=1$. …………4 分

（Ⅱ） $f'(x)=ax^2-(a+1)x+1$， $a\geq1$，依题意有 $f'(x)\geq0$， 即 $\Delta\leq0$，

$(a+1)^2-4a\leq0$， 解得 $a=1$ …………7 分

（Ⅲ） $f'(x)=ax^2-(a+1)x+1=(ax-1)(x-1)$， $a\geq1$.

(1) $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒为增函数且 $f(0)=1$，函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上无零点.

(2) $a>1$ 时：

当 $x\in(0,\frac{1}{a})$， $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数；

当 $x\in(\frac{1}{a},1)$， $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 为减函数；

当 $x\in(1,2)$， $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数.

由于 $f(2)=\frac{2}{3}a+1>0$，此时只需判定 $f(1)=-\frac{a}{6}+\frac{3}{2}$ 的符号：

当$1<a<9$时，函数$f(x)$在$\left(0,2\right)$上无零点；

当$a=9$时，函数$f(x)$在$\left(0,2\right)$上有一个零点；

当$a>9$时，函数$f(x)$在$\left(0,2\right)$上有两个零点.

综上，$1\le a<9$时函数$f(x)$在$\left(0,2\right)$上无零点；

当$a=9$时，函数$f(x)$在$\left(0,2\right)$上有一个零点；

当$a>9$时，函数$f(x)$在$\left(0,2\right)$上有两个零点. …………13 分

20. （本小题满分 14 分）

解：

（Ⅰ）因为在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上， 所以$f'(x)=1-\cos^2 x+\sin^2 x=2\sin^2 x>0$.

即$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上递增，所以$f(x)\ge f(0)=0$. …………4 分

（Ⅱ）（i）因为$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$g(x)=\frac{x}{\tan x}=\frac{x\cos x}{\sin x}$，

所以$g'(x)=\frac{\sin x\cos x-x}{\sin^2 x}=-\frac{f(x)}{\sin^2 x}$.

由（Ⅰ）知，当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时$f(x)>0$，所以$g'(x)<0$.

所以$g(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上递减. …………8 分

（ii）依题意，$a>0$.

令$h(x)=a\tan x-x, x\in[0,\frac{\pi}{2})$，

则$h'(x)=\frac{a}{\cos^2 x}-1=\frac{a-\cos^2 x}{\cos^2 x}$.

（1）若$a\ge 1$，则当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$h'(x)>0$，则$h(x)$在$[0,\frac{\pi}{2})$上递增.

即$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$h(x)>h(0)=0$.

则$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$x<a\tan x$.

即当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$\frac{x}{\tan x}<a$恒成立.

（2）若$0<a<1$，令$h'(x)=0$得$a=\cos^2 x$.

因为$y=\cos^2 x$在$(0,\frac{\pi}{2})$上减，且$\cos^2 x\in(0,1)$，

所以方程 $a=\cos^2 x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恰有一个根，记为 x_0，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$；

当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上递减，在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上递增.

所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)<h(0)=0$.

此时 $g(x)<a$ 不恒成立.

综上，a 的最小值为 1. …………14 分