

# 2020北京高三模拟试卷（二）

## 数学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 题，每题 4 分，共 40 分。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 = 1\}$ ， $B = \{0, 1, 2\}$ ，则  $A \cup B = ( )$  .

- A.  $\{0, 1, 2\}$       B.  $\{1\}$       C.  $\{-1, 1\}$       D.  $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 复数  $z = \frac{1+2i}{1-i}$  在复平面内对应的点位于 ( ) .

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

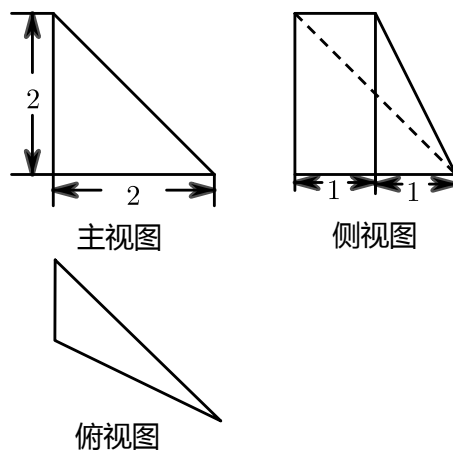
3. 若  $a = e^{0.5}$ ， $b = \log_{\pi} e$ ， $c = \ln\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)$ ，则 ( ) .

- A.  $a > b > c$       B.  $b > a > c$       C.  $c > a > b$       D.  $b > c > a$

4. 将函数  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图象先向左平移  $\frac{\pi}{6}$ ，然后将所得图象上所有的点的横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变），则所得到的图象对应的函数解析式为 ( ) .

- A.  $y = -\cos x$       B.  $y = \sin 4x$       C.  $y = \sin x$       D.  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

5. 四棱锥的三视图如图所示，则其体积为 ( ) .



- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{4}{3}$       C. 2      D.  $\frac{8}{3}$

6.  $f(x)$ ,  $g(x)$ 是定义在  $\mathbf{R}$ 上的函数,  $h(x) = f(x) + g(x)$ , 则 “ $f(x)$ ,  $g(x)$ 均为奇函数” 是 “ $h(x)$ 为奇函数” 的 ( ).

- A. 充要条件  
B. 充分而不必要的条件  
C. 必要而不充分的条件  
D. 既不充分也不必要的条件

7. 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 焦点到渐近线的距离为  $\sqrt{3}$ , 则  $C$ 的焦距等于 ( ).

- A. 4  
B. 3  
C. 2  
D.  $4\sqrt{2}$

8. 在  $\triangle ABC$ 中, 若  $\frac{\sin C}{\sin A} = 3$ ,  $b^2 - a^2 = \frac{5}{2}ac$ , 则  $\cos B$ 的值为 ( ).

- A.  $\frac{1}{3}$   
B.  $\frac{1}{2}$   
C.  $\frac{1}{5}$   
D.  $\frac{1}{4}$

9. 过直线  $y = x$ 上的一点作圆  $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 2$ 的两条切线  $l_1, l_2$ , 当直线  $l_1, l_2$ 关于  $y = x$ 对称时, 它们之间的夹角为 ( ).

- A.  $30^\circ$   
B.  $45^\circ$   
C.  $60^\circ$   
D.  $90^\circ$

10. 甲乙两人做如下一种游戏: 首先由甲想好一个没有重复数字的三位数, 然后由乙来猜测. 乙每次都猜一个三位数, 然后甲会给乙一个提示  $x + y$ , 其中  $x$ 表示位置正确的数的个数,  $y$ 表示数字正确而位置错误的数的个数, 例如: 甲想的数是 135, 乙猜 123, 则甲会告诉乙 1 + 1 (其中乙猜的数字 1是 “位置正确”, 数字 3是 “数字正确而位置错误”). 现已知乙猜的前 4次的结果如下: 由此可以推断 ( ).

乙的猜想	结果
123	1 + 0
456	1 + 0
789	0 + 1
147	1 + 1

- A. 可以唯一确定甲想的三位数是什么  
B. 不能唯一确定甲想的三位数是什么, 但是其中一定包含数字 7  
C. 不能唯一确定甲想的三位数是什么, 但是其中一定包含数字 4  
D. 不能唯一确定甲想的三位数是什么, 但是其中一定包含数字 1

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 题, 每题 5 分, 共 25 分.

11. 已知点  $A(1,1)$ , 点  $B(-2,5)$ , 则与  $\overrightarrow{AB}$  同方向的单位向量为 \_\_\_\_\_ .

12. 记者要为 3 位老人和为他们服务的 5 名志愿者拍照, 要求排成一排, 3 位老人任意两位不相邻且均不排在两端, 不同的排法共有 \_\_\_\_\_ (用数字作答) .

13. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - 1$ , 其中  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 则函数  $f(x)$  的零点个数是 \_\_\_\_\_ .

14. 抛物线  $y^2 = 2px$  与直线  $ax + y - 4 = 0$  交于两点  $A$ 、 $B$ , 其中点  $A$  的坐标是  $(1,2)$ , 设抛物线的焦点  $F$ , 则  $|FA| + |FB| =$  \_\_\_\_\_ .

15. 若函数  $y = f(x)$  满足: 对于  $y = f(x)$  图象上任意一点  $P$ , 在其图象上总存在点  $P'$ , 使得  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = 0$  成立, 称函数  $y = f(x)$  是“特殊对点函数”. 给出下列五个函数:

①  $y = x^{-1}$ ; ②  $y = e^x - 2$  (其中  $e$  为自然对数的底数); ③  $y = \ln x$ ; ④  $y = \sin x + 1$ ;

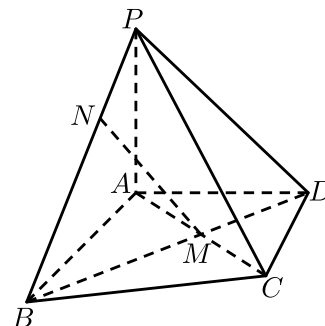
⑤  $y = \sqrt{1-x^2}$  .

其中是“特殊对点函数”的序号是 \_\_\_\_\_ .

注: 本题给出的结论中, 有多个符合题目要求. 全部选对得 5 分, 不选或有错选得 0 分, 其他得 3 分.

三、解答题共 6 题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (14分) 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\triangle ABC$  是正三角形,  $AC$  与  $BD$  的交点  $M$  恰好是  $AC$  中点, 又  $PA = AB = 4$ ,  $\angle CDA = 120^\circ$ , 点  $N$  在线段  $PB$  上, 且  $PN = \sqrt{2}$  .



(1) 求证:  $MN \parallel$  平面  $PDC$  .

(2) 求二面角  $A-PC-B$  的余弦值 .

17. (14分) 在①  $a_3 = 5$ ,  $a_2 + a_5 = 6b_2$ ; ②  $b_2 = 2$ ,  $a_3 + a_4 = 3b_3$ ; ③  $S_3 = 9$ ,  $a_4 + a_5 = 8b_2$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并解答.

已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d (d > 1)$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 等比数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ , 且  $a_1 = b_1$ ,  $d = q$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式.
- (2) 记  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (14分) 某学校高一、高二、高三三个年级共有 300 名教师, 为调查他们的备课时间情况, 通过分层抽样获得了 20 名教师一周的备课时间, 数据如下表 (单位: 小时):

高一年级	7	7.5	8	8.5	9			
高二年级	7	8	9	10	11	12	13	
高三年级	6	6.5	7	8.5	11	13.5	17	18.5

- (1) 试估计该校高三年级的教师人数.
- (2) 从高一年级和高二年级抽出的教师中, 各随机选取一人, 高一年级选出的人记为甲, 高二年级选出的人记为乙, 假设所有教师的备课时间相对独立, 求该周甲的备课时间不比乙的备课时间长的概率.
- (3) 再从高一、高二、高三三个年级中各随机抽取一名教师, 他们该周的备课时间分别是 8、9、10 (单位: 小时), 这三个数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为  $\bar{x}_1$ , 表格中的数据平均数记为  $\bar{x}_0$ , 试判断  $\bar{x}_0$  与  $\bar{x}_1$  的大小. (结论不要求证明)

19. (14分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过直线  $x = -1$  上一点  $M$  作直线  $l$  与椭圆相交于  $A, B$  两点, 且  $M$  为线段  $AB$  中点.

- (1) 若直线  $l$  垂直于  $x$  轴, 求线段  $|AB|$  长度;
- (2) 求证: 若  $l$  不经过  $F_1$  点, 则直线  $F_1A$ 、 $l$ 、 $F_1B$  的斜率依次成等差数列.

20. (15分) 已知函数  $f(x) = e^x + \frac{1}{2}ax^2$ .

- (1) 求  $f(x)$  在  $x = 0$  处的切线方程.
- (2) 设  $a > \frac{1}{\sqrt{e}}$ , 求证: 当  $x \in (-1, 0)$  时,  $f(x)$  存在唯一的极值点, 且  $f(x) > \frac{3}{2e}$  恒成立.

21. (14分) 若一个  $n$  维向量的每一个分量都是自然数, 则称这个向量为一个  $n$  维“自然向量”.

设有一个  $n$  维“自然向量”  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 其中  $a_i \in \mathbf{N}, 1 \leq i \leq n$ . 定义下面三种操作方式:

①  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) (a_1 \neq 0)$ , 则  $T_1(A) = (a_1 - 1, a_2 + 1, a_3, \dots, a_n)$ ;

②  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) (a_n \neq 0)$ , 则  $T_2(A) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1, a_n - 1)$ ;

③  $A = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) (a_k \geq 2)$ , 则  $T_{3,k}(A) = (a_1, \dots, a_{k-1} + 1, a_k - 2, a_{k+1} + 1, \dots, a_n)$

(1) 对于一个 3 维“自然向量”  $A = (3, 0, 0)$ , 求  $T_1(T_{3,2}(T_1(T_1(A))))$ .

(2) 试证明: 一个  $n$  维“自然向量”  $A = (2, 1, \dots, 1, 0, a_{k+1}, \dots, a_n)$ , 可以经过有限次操作, 变成  $n$  维“自然向量”  $A' = (1, 1, \dots, 1, 1, a_{k+1}, \dots, a_n)$ , 而且, 向量中的其他数值均不变.

(3) 试证明: 任意一个  $n$  维“自然向量”  $A$ , 只要满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ , 就能够经过有限次  $T_1, T_2, T_{3,k}$  操作之后, 得到  $n$  维“自然向量”  $\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_n$ .

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯