

2020北京高三模拟试卷（二）

数学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 题，每题 4 分，共 40 分。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 = 1\}$ ， $B = \{0, 1, 2\}$ ，则 $A \cup B = ()$.

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 复数 $z = \frac{1+2i}{1-i}$ 在复平面内对应的点位于 () .

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

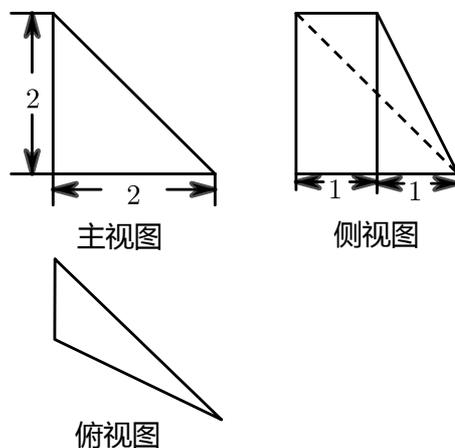
3. 若 $a = e^{0.5}$ ， $b = \log_{\pi} e$ ， $c = \ln\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)$ ，则 () .

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $b > c > a$

4. 将函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ ，然后将所得图象上所有的点的横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变），则所得到的图象对应的函数解析式为 () .

- A. $y = -\cos x$ B. $y = \sin 4x$ C. $y = \sin x$ D. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

5. 四棱锥的三视图如图所示，则其体积为 () .



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. $\frac{8}{3}$

6. $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, $h(x) = f(x) + g(x)$, 则 “ $f(x)$, $g(x)$ 均为奇函数” 是 “ $h(x)$ 为奇函数” 的 ().

- A. 充要条件
B. 充分而不必要的条件
C. 必要而不充分的条件
D. 既不充分也不必要的条件

7. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$, 则 C 的焦距等于 ().

- A. 4
B. 3
C. 2
D. $4\sqrt{2}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\sin C}{\sin A} = 3$, $b^2 - a^2 = \frac{5}{2}ac$, 则 $\cos B$ 的值为 ().

- A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{5}$
D. $\frac{1}{4}$

9. 过直线 $y = x$ 上的一点作圆 $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 2$ 的两条切线 l_1, l_2 , 当直线 l_1, l_2 关于 $y = x$ 对称时, 它们之间的夹角为 ().

- A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 90°

10. 甲乙两人做如下一种游戏: 首先由甲想好一个没有重复数字的三位数, 然后由乙来猜测. 乙每次都猜一个三位数, 然后甲会给乙一个提示 $x + y$, 其中 x 表示位置正确的数的个数, y 表示数字正确而位置错误的数的个数, 例如: 甲想的数是 135, 乙猜 123, 则甲会告诉乙 1 + 1 (其中乙猜的数字 1 是 “位置正确”, 数字 3 是 “数字正确而位置错误”). 现已知乙猜的前 4 次的结果如下: 由此可以推断 ().

乙的猜想	结果
123	1 + 0
456	1 + 0
789	0 + 1
147	1 + 1

- A. 可以唯一确定甲想的三位数是什么
B. 不能唯一确定甲想的三位数是什么, 但是其中一定包含数字 7
C. 不能唯一确定甲想的三位数是什么, 但是其中一定包含数字 4
D. 不能唯一确定甲想的三位数是什么, 但是其中一定包含数字 1

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 题, 每题 5 分, 共 25 分.

11. 已知点 $A(1,1)$, 点 $B(-2,5)$, 则与 \overrightarrow{AB} 同方向的单位向量为 _____ .

12. 记者要为 3 位老人和为他们服务的 5 名志愿者拍照, 要求排成一排, 3 位老人任意两位不相邻且均不排在两端, 不同的排法共有 _____ (用数字作答) .

13. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - 1$, 其中 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则函数 $f(x)$ 的零点个数是 _____ .

14. 抛物线 $y^2 = 2px$ 与直线 $ax + y - 4 = 0$ 交于两点 A, B , 其中点 A 的坐标是 $(1,2)$, 设抛物线的焦点 F , 则 $|FA| + |FB| =$ _____ .

15. 若函数 $y = f(x)$ 满足: 对于 $y = f(x)$ 图象上任意一点 P , 在其图象上总存在点 P' , 使得 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = 0$ 成立, 称函数 $y = f(x)$ 是“特殊对点函数”. 给出下列五个函数:

① $y = x^{-1}$; ② $y = e^x - 2$ (其中 e 为自然对数的底数); ③ $y = \ln x$; ④ $y = \sin x + 1$;

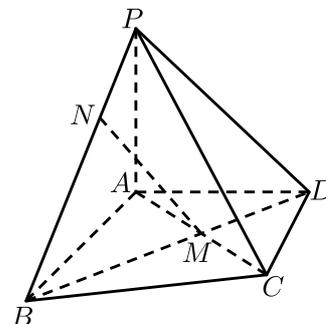
⑤ $y = \sqrt{1-x^2}$.

其中是“特殊对点函数”的序号是 _____ .

注: 本题给出的结论中, 有多个符合题目要求. 全部选对得 5 分, 不选或有错选得 0 分, 其他得 3 分.

三、解答题共 6 题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (14分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle ABC$ 是正三角形, AC 与 BD 的交点 M 恰好是 AC 中点, 又 $PA = AB = 4$, $\angle CDA = 120^\circ$, 点 N 在线段 PB 上, 且 $PN = \sqrt{2}$.



(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 PDC .

(2) 求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.

17. (14分) 在① $a_3 = 5$, $a_2 + a_5 = 6b_2$; ② $b_2 = 2$, $a_3 + a_4 = 3b_3$; ③ $S_3 = 9$, $a_4 + a_5 = 8b_2$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并解答.

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d > 1)$, 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 且 $a_1 = b_1$, $d = q$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (14分) 某学校高一、高二、高三三个年级共有 300 名教师, 为调查他们的备课时间情况, 通过分层抽样获得了 20 名教师一周的备课时间, 数据如下表 (单位: 小时):

高一年级	7	7.5	8	8.5	9			
高二年级	7	8	9	10	11	12	13	
高三年级	6	6.5	7	8.5	11	13.5	17	18.5

- (1) 试估计该校高三年级的教师人数.
- (2) 从高一年级和高二年级抽出的教师中, 各随机选取一人, 高一年级选出的人记为甲, 高二年级选出的人记为乙, 假设所有教师的备课时间相对独立, 求该周甲的备课时间不比乙的备课时间长的概率.
- (3) 再从高一、高二、高三三个年级中各随机抽取一名教师, 他们该周的备课时间分别是 8、9、10 (单位: 小时), 这三个数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为 \bar{x}_1 , 表格中的数据平均数记为 \bar{x}_0 , 试判断 \bar{x}_0 与 \bar{x}_1 的大小. (结论不要求证明)

19. (14分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过直线 $x = -1$ 上一点 M 作直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点, 且 M 为线段 AB 中点.

- (1) 若直线 l 垂直于 x 轴, 求线段 $|AB|$ 长度;
- (2) 求证: 若 l 不经过 F_1 点, 则直线 F_1A 、 l 、 F_1B 的斜率依次成等差数列.

20. (15分) 已知函数 $f(x) = e^x + \frac{1}{2}ax^2$.

- (1) 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程.
- (2) 设 $a > \frac{1}{\sqrt{e}}$, 求证: 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x)$ 存在唯一的极值点, 且 $f(x) > \frac{3}{2e}$ 恒成立.

21. (14分) 若一个 n 维向量的每一个分量都是自然数, 则称这个向量为一个 n 维“自然向量”.

设有一个 n 维“自然向量” $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 其中 $a_i \in \mathbf{N}, 1 \leq i \leq n$. 定义下面三种操作方式:

① $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) (a_1 \neq 0)$, 则 $T_1(A) = (a_1 - 1, a_2 + 1, a_3, \dots, a_n)$;

② $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) (a_n \neq 0)$, 则 $T_2(A) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1, a_n - 1)$;

③ $A = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) (a_k \geq 2)$, 则 $T_{3,k}(A) = (a_1, \dots, a_{k-1} + 1, a_k - 2, a_{k+1} + 1, \dots, a_n)$

(1) 对于一个 3 维“自然向量” $A = (3, 0, 0)$, 求 $T_1(T_{3,2}(T_1(T_1(A))))$.

(2) 试证明: 一个 n 维“自然向量” $A = (2, 1, \dots, 1, 0, a_{k+1}, \dots, a_n)$, 可以经过有限次操作, 变成 n 维“自然向量” $A' = (1, 1, \dots, 1, 1, a_{k+1}, \dots, a_n)$, 而且, 向量中的其他数值均不变.

(3) 试证明: 任意一个 n 维“自然向量” A , 只要满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$, 就能够经过有限次 $T_1, T_2, T_{3,k}$ 操作之后, 得到 n 维“自然向量” $\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_n$.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯