2021 北京朝阳高一（下）期末

数　学

2021.7

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

本试卷分为选择题(共 50 分)和非选择提(共 100 分)两部分

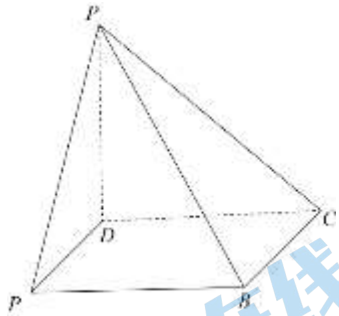
第一部分(选择题 共 50 分)

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

(1)已知复数 $z=\dfrac{1+i}{i}$(其中 i 是虚数单位)，则 z 在复平面内对应的点的坐标是

(A)(1，1)　　(B)(1，-1)　　(C)(-1，1)　　(D)(-1，-1)

(2)如图、在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$底面 $ABCD$，若 $AB=PD=3$，$AD=2$，则该四棱锥的体积为



(A)18

(B)12

(C)9

(D)6

(3)一个袋子中有大小和质地相同的 4 个球，其中有 2 个红色球，2 个绿色球，从袋中不放回地依次随机摸出 2 个球，则两个球颜色相同的概率是

(A)$\dfrac{1}{4}$　　(B)$\dfrac{1}{3}$　　(C)$\dfrac{1}{2}$　　(D)$\dfrac{2}{3}$

(4)设 α，β 是两个不同的平面，n 是平面 α 内的一条直线，则“$n\perp\beta$”是“$\alpha\perp\beta$”的

(A)充分不必要条件　　(B)必要不充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

(5)在△ABC 中，$\sqrt{3}a\sin B=3b\cos A$，则∠A=

(A)$\dfrac{5\pi}{6}$　　(B)$\dfrac{2\pi}{3}$　　(C)$\dfrac{\pi}{3}$　　(D)$\dfrac{\pi}{6}$

(6)水稻是世界最重要的食作物之一，也是我国 60%以上人口的主粮。以袁隆平院士为首的科学家研制成功的杂交水稻制种技术在世界上被誉为中国的“第五大发明"，育种技术的突破，杂交水稻的推广，不仅让中国人端稳饭碗，也为解决世界粮食短缺问题作出了巨大贡献.某农场种植的甲、乙两种水稻在面积相等的两块稻田中连续 6 年的产量(单位：kg)如下：

品种	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年
甲	900	920	900	850	910	920
乙	890	960	950	850	860	890

根据以上数据，下面说法正确的是

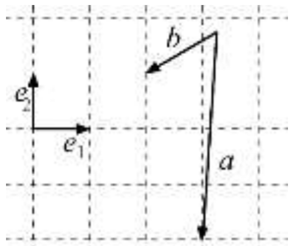
(A)甲种水稻产量的平均数比乙种水稻产量的平均数大

(B)甲种水稻产量的中位数比乙种水稻产量的中位数小

(C)甲种水稻产量的极差与乙种水稻产量的极差相等

(D)甲种水稻的产量比乙种水稻的产量稳定

(7)向量 a，b，e_1，e_2 在正方形网格中的位置如图所示，若 $a-b=\lambda e_1+\mu e_2(\lambda，\mu\in R)$，则=$\dfrac{\lambda}{\mu}=$



(A)3

(B)$\dfrac{1}{3}$

(C)-3

(D)$-\dfrac{1}{3}$

(8)某中学举办知识竞赛，共 50 人参加初试，成绩如下：

成绩(分)	95	90	85	80	75	70	65	60	60 以下
人数	1	4	6	5	4	6	7	8	9

如果有 40%的学生可以参加复试，则进入复试的分数线可以为

(A)65　　(B)70　　(C)75　　(D)80

(9)在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若点 E 是棱 AB 的中点，点 M 是底面 $ABCD$ 内的动点，且满足 $A_1M\perp C_1E$，则线段 AM 的长的最小值为

(A)$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　(B)$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　(C)1　　(D)$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(10)已知不共线的平面向量 a，b，c 两两的夹角相等，且 $|a|=1,|b|=2,|c|=3$，实数 λ_1，λ_2，$\lambda_3\in|-1,1|$，则 $|\lambda_1a+\lambda_2b+\lambda_3c|$ 的最大值为

(A)$\sqrt{3}$　　(B)2$\sqrt{3}$　　(C)$\sqrt{21}$　　(D)5

第二部分(非选择题 共 100 分)

二、填空题(本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

(11)已知平面向量 a=(2，k)，b=(3，2)，且 $a\perp b$，则实数 k=______________.

(12)若复数 $z=a^2+a-2+(a^2-1)i$ 为纯虚数，则实数 a 的值为______________.

(13)某班有 42 名学生，其中选考物理的学生有 21 人，选考地理的学生有 14 人，选考物理或地理的学生有 28 人，从该班任选一名学生，则该生既选考物理又选考地理的概率为______________.

(14)已知一组不全相等的样本数据的平均数为 10，方差为 2，现再加入一个新数 10，则新样本数据的平均数____________，方差____________.(填“变大”，“变小”，“不变”)

(15)已知等边△ABC 的边长为 2，D 为边 BC 的中点，点 M是 AC 边上的动点，则 $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MC}$ 的最大值为______________，最小值为______________.

(16)已知△ABC 的三边长为连续的正整数，给出下列四个结论：

①存在满足条件的三角形，使得三个内角中的最大角等于另外两个角的和；

②存在满足条件的三角形，使得三个内角中的最大角大于另外两个角的和；

③存在满足条件的三角形，使得三个内角中的最大角等于最小角的 2 倍；

④存在满足条件的三角形，使得三个内角中的最大角等于最小角的 3 倍.

其中所有正确结论的序号是____________.

三、解答题(本大题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或明过过程)

(17)(本小题 14 分)

在△ABC 中，$b^2+c^2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}bc=a^2$.

(I)求 $\cos A$ 的值；

(II)若 $B=2A$，$b=\sqrt{6}$，求 a 的值.

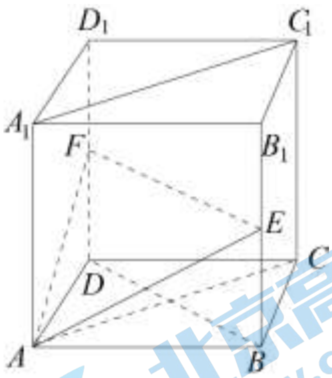
(18)(本小题 14 分)

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别是棱 BB_1，DD_1 的中点.

(I)求证：BD∥平面 AEF；

(II)求证：$EF\perp$平面 ACC_1A_1；

(III)判断点 C_1 是否在平面 AEF 内，并说明理由.

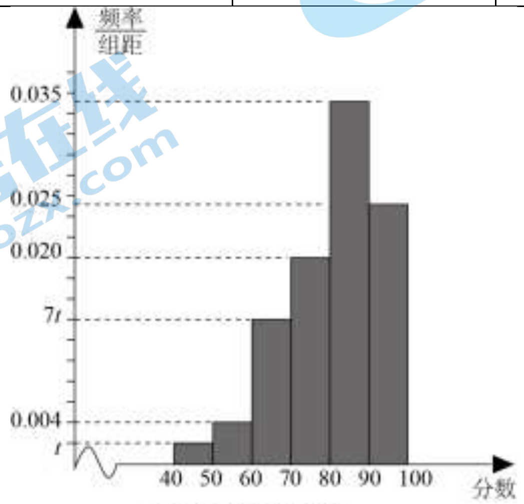


(19)(本小题 14 分)

某心理教育测评研究院为了解某市市民的心理健康状况，随机抽取了 n 位市民进行心理健康问卷调查，将所得评分(百分制)按研究院制定的心理测评评价标准整理，得到频率分布直方图.已知调查评分在[70，80)中的市民有 200 人.

心理测评评价标准

调查评分	[0，40)	[40，50)	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
心理等级	E	D		C		B	A



频率分布直方图

(I)求 n 的值及频率分布直方图中 t 的值；

(II)在抽取的心理等级为 D 的市民中，按照调查评分的分组，分为 2 层，通过分层随机抽样抽取 3 人进行心理疏导.据以往数据统计，经心理疏导后，调查评分在[40，50)的市民的心理等级转为 B 的概率为 $\dfrac{1}{4}$，调查评分在[50，60)的市民的心理等级转为 B 的概率为 $\dfrac{1}{3}$，假设经心理疏导后的等级转化情况相互独立，求在抽取的 3 人中，经心理疏导后至少有一人的心理等级转为 B 的概率；

(III)该心理教育测评研究院建议该市管理部门设定预案：若市民心理健康指数的平均值不低于 0.75，则只需发放心理指导资料，否则需要举办心理健康大讲堂.根据调查数据，判断该市是否需要举办心理健康大讲堂，并说明理由.(每组的每个数据用该组区间的中点值代替，心理健康指数=调查评分÷100)

(20)(本小题 14 分)

如图，在锐角△ABC 中，$A=\dfrac{\pi}{6},BC=\sqrt{7}$，$D$，$E$ 分别是边 AB，AC 上的点.且 DE=2.再从条件①、条件②、条件③中选择两个能解决下面问题的条件作为已知，并求，

(I)sin$C$ 的值；

(II)∠BDE 的大小；

(III)四边形 $BCED$ 的面积.

条件①：$AB=3\sqrt{3}$；

条件②：$\cos B=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$；

条件③：EC=3.

(21)(本小题 14 分)

将平面直角坐标系中的一列点 $A_1(1,\ a_1)$，$A_2(2,\ a_2)$，…，$A_n(n,\ a_n)$，…记为$\left|A_n\right|$，设 $f\left(n\right)=\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot j$，其中 j 为与 y 轴方向相同的单位向量.若对任意的正整数 n，都有 $f(n+1)>f(n)$，则称$\left\{A_n\right\}$ 为 T 点列.

(I)判断 $A_1(1,1)$，$A_2(2,\dfrac{1}{2})$，$A_3(3,\dfrac{1}{3}),\cdots$，$A_n(n,\dfrac{1}{n}),\cdots$是否为 T 点列，并说明理由；

(II)若$\left\{A_n\right\}$为 T 点列，且 $a_1>a_2$.任取其中连续三点 A_k，A_{k+1}，A_{k+2}，证明△$A_kA_{k+1}A_{k+2}$ 为钝角三角形；

(III)若$\left\{A_n\right\}$为 T 点列，对于正整数 k，l，$m(k<l<m)$，比较 $\overrightarrow{A_lA_{m+k}}\cdot j$ 与 $\overrightarrow{A_{l-k}A_m}\cdot j$ 的大小，并说明理由.

2021 北京朝阳高一（下）期末数学

参考答案

一、选择题(共 10 小题，莓小题 5 分，共 50 分)

(1)B	(2)D	(3)B	(4)A	(5)C
(6)D	(7)D	(8)C	(9)B	(10)C

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

(11)-3　(12)-2　(13)$\frac{1}{6}$

(14)不变；变小　(15)3; $-\frac{1}{16}$　(16)①②③

三、解答题(共 5 小题，共 70 分

(17)(共 14 分)

解：(I)因为在△ABC 中，$b^2+c^2=a^2+\frac{\sqrt{6}}{2}bc$,

又因为 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

所以 $\cos A=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ ……………………………6 分

(II)由(I)知，$0<A<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

因为 B=2A，

所以 $\sin B=\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

又因为 $b=\sqrt{6},\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

所以 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{10}}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=2.$ ……………………………14 分

(18)(共 14 分)

解：(I)因为在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别是棱 BB_1，DD_1 的中点.

所以 $BE//DF,BE=DF$

所以四边形 $BEFD$ 为平行四边形，所以 BD//EF

又因为 $BD\not\subset$ 平面 AEF，$EF\subset$ 平面 AEF，

所以 $BD//$平面 AEF……………………………………5 分

(II)因为在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AA_1\perp BD$.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AC\perp BD$

又由(I)知 $BD//EF$，

所以 $EF\perp AA_1$， $EF\perp AC$

又因为 $AC\cap AA_1=A$，

所以 $EF\perp$平面 ACC_1A_1 ……………………………………10 分

(III)点 C_1 在平面 AEF 内，理由如下：

取 CC_1 中点 G，连接 GB， FG， EC_1，

因为在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 G，F 分别是棱 CC_1， DD_1 的中点，

所以 $DF//CG$，$DF=CG$.

所以四边形 $DCGF$ 为平行四边形.所以 $FG//DC$，$FG=DC$.

又因为 $AB//DC$，$AB=DC$，

所以 $AB//FG$，$AB=FG$.

所以四边形 $ABGF$ 为平行四边形.所以 $AF//BG$.

因为在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，G 分别是棱 BB_1， CC_1 的中点，

所以 $BE//GC_1$， $BE=GC_1$.

所以四边形 BGC_1E 为平行四边形.所以 $BG//EC_1$.

所以 $EC_1//AF$.

故点 C_1 在平面 AEF 内. ……………………………………14 分

(19)(共 14 分)

解：(I)由已知条件可得 $n=\dfrac{200}{0.02\times 10}=1000$,，又因为每组的小矩形的面积之和为 1.

所以(0.035+0.025+0.02+0.004+8t)×10=1，解得 t=0.002……………………………4 分

(II)由(I)知：t=0.002，

所以调查评分在[40,50)中的人数是调查评分在[50,60)中人数的$\dfrac{1}{2}$,

若按分层抽样抽取 3 人，则调查评分在[40，50)中有 1 人，在[50,60)中有 2 人,

设事件 M=“在抽取的 3 人中，经心理疏导后至少有一人的心理等级转为 B”.

因为经心理疏导后的等级转化情况相互独立，

所以 $P\left(\overline{M}\right)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$,

所以 $P\left(M\right)=1-P\left(\overline{M}\right)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$,

故经心理疏导后至少有一人的心理等级转为 B 的概率为$\dfrac{2}{3}$ ……………………………10 分

(III)由频率分布直方图可得，

45×0.02+55×0.04+65×0.14+75×0.2+85×0.35+95×0.25=80.7.

估计市民心理健康调查评分的平均值为 80.7，

所以市民心理健康指数平均值为$\dfrac{80.7}{100}=0.807>0.75$.

所以只需发放心理指导材料，不需要举办心理健康大讲堂活动. ……………………………14 分

(20)(共 14 分)

解：选条件__①__，__③__

(I)因为 $A=\dfrac{\pi}{6}, BC=\sqrt{7}, AB=3\sqrt{3}$,

又因为在 ΔABC 中，$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$,

所以 $\sin C=\dfrac{AB\cdot\sin A}{BC}=\dfrac{3\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$. ……………………………4 分

(II)因为△ABC 是锐角三角形，由(I)知 $\sin C=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$,

所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

在△*ABC* 中，因为 $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot cosC$，

所以 $27=7+AC^2-2\sqrt{7}AC\times\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，即 $AC^2-AC-20=0$，解得 *AC*=5.

又因为 *EC*=3，所以 *AE*=2.

又因为 *DE*=2，所以 $\angle ADE=A=\dfrac{\pi}{6}$.故 $\angle BDE=\dfrac{5\pi}{6}$.……………………………10 分

(III)因为 $AB=3\sqrt{3}$，$A=\dfrac{\pi}{6}$，由(II)知 *AC*=5，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot sinA=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

又因为 $\angle AED=\angle BDE-A=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $S_{\Delta ADE}=\dfrac{1}{2}AE\cdot DE\cdot\sin\angle AED=\sqrt{3}$.

所以四边形 *BCED* 的面积为 $S_{\Delta ABC}-S_{\Delta ADE}=\dfrac{11\sqrt{3}}{4}$.……………………………14 分

选条件__②__,__③__.

(I)因为 $A=\dfrac{\pi}{6}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，

所以 $0<B<\dfrac{\pi}{2}$，$sinB=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

所以 $\sin C=\sin(B+A)=\sin B\cos A+\cos B\sin A$

$\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{21}}{14}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.……………………………4 分

(II)由(I)及正弦定理：$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，得 $AC=\dfrac{BC\cdot\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{7}\times\dfrac{5\sqrt{7}}{14}}{\dfrac{1}{2}}=5$，

又因为 *EC*=3，所以 *AE*=2，

又因为 *DE*=2，所以 $\angle ADE=A=\dfrac{\pi}{6}$ 故 $\angle BDE=\dfrac{5\pi}{6}$.……………………………10 分

(III)因为△ABC是锐角三角形，由(I)知$\sin C=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，

所以$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{\sqrt{7}}{14}$.

由余弦定理得：$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C=7+25-2\times\sqrt{7}\times5\times\frac{\sqrt{7}}{14}=27$,

解得：$AB=3\sqrt{3}$.

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

又因为$\angle AED=\angle BDE-A=\frac{2\pi}{3}$,

所以$S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot DE\cdot\sin\angle AED=\sqrt{3}$.

所以四边形$BCED$的面积为$S_{\Delta ABC}-S_{\Delta ADE}=\frac{11\sqrt{3}}{4}$ ……………………………14分

(21)(共14分)

解：(I)$\{A_n\}$为T点列.理由如下：

由题意可知，$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=(1,\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}),\ j=(0,1)$,

所以 $f(n)=\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot j=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$,

$$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}-(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n})=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}>0,$$

即 $f(n+1)>f(n)$，$n=1$，2，….

所以$A_1(1,1)$，$A_2(2,\frac{1}{2})$，$A_3(3,\frac{1}{3})$，$A_n\left(n,\frac{1}{n}\right),\cdots$为$T$点列. ……………………………4分

(II)由题意可知，$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=(1,a_{n+1}-a_n),\ j=(0,1)$,

所以 $f(n)=\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot j=a_{n+1}-a_n$.

因为$\{A_n\}$为T点列，

所以 $f(n+1)-f(n)=a_{n+2}-a_{n+1}-(a_{n+1}-a_n)>0, n=1,2,\cdots$.

又因为$a_2>a_1$，所以$a_2-a_1>0$.

所以对$|A_n|$中连续三点A_k，A_{k+1}，A_{k+2}，都有$a_{k+2}-a_{k+1}>a_{k+1}-a_k>0, a_{k+2}>a_{k+1}>a_k$.

又$|A_kA_{k+1}|^2=1+(a_{k+1}-a_k)^2, |A_kA_{k+2}|^2=4+(a_{k+2}-a_k)^2, |A_{k+1}A_{k+2}|^2=1+(a_{k+2}-a_{k+1})^2$,

所以$|A_kA_{k+2}|^2>|A_{k+1}A_{k+2}|^2>|A_kA_{k+1}|^2$.所以$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}$为$\Delta A_kA_{k+1}A_{k+2}$.的最大内角

由余弦定理得：$\cos\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\dfrac{|A_{k+1}A_{k+2}|^2+|A_kA_{k+1}|^2-|A_kA_{k+2}|^2}{2|A_{k+1}A_{k+2}|\cdot|A_kA_{k+1}|}$

$=\dfrac{2a_{k+1}{}^2-2a_{k+1}a_k-2a_{k+1}a_{k+2}+2a_{k+2}a_k-2}{2|A_{k+1}A_{k+2}|\cdot|A_kA_{k+1}|}$

$=\dfrac{2(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}-a_{k+2})-2}{2|A_{k+1}A_{k+2}|\cdot|A_kA_{k+1}|}<0,$

故$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}$为钝角，所以$\Delta A_kA_{k+1}A_{k+2}$为钝角三角形. ……………………………………10 分

(III)由 $k<l<m$，$m\geq3$.

因为$\{A_n\}$为 T 点列，由(II)知$a_{n+2}-a_{n+1}>a_{n+1}-a_n, n=1,2,\cdots$,

所以$a_{m+k}-a_{m+k-1}>a_{m+k-1}-a_{m+k-2}$,

$a_{m+k-1}-a_{m+k-2}>a_{m+k-2}-a_{m+k-3}$,

……

$a_{m+1}-a_m>a_m-a_{m-1}$,

两边分别相加可得$a_{m+k}-a_m>a_{m+k-1}-a_{m-1}$,

所以$a_{m+k-1}-a_{m-1}>a_{m+k-2}-a_{m-2}>a_l-a_{l-k}$, ,

所以$a_{m+k}-a_m>a_l-a_{l-k}$,

所以$a_{m+k}-a_l>a_m-a_{l-k}$,

又$\overrightarrow{A_lA_{m+k}}=(m+k-l, a_{m+k}-a_l), \overrightarrow{A_{l-k}A_m}=(m-l+k, a_m-a_{l-k})$,

所以，$\overrightarrow{A_lA_{m+k}}\cdot j=a_{m+k}-a_l, \overrightarrow{A_{l-k}A_m}\cdot j=a_m-a_{l-k}$,

所以$\overrightarrow{A_lA_{m+k}}\cdot j>\overrightarrow{A_{l-k}A_m}\cdot j$.……………………………………14 分