

理科数学

本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束前，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x > 0\}$, $B = \{x | x^2 - 4 \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $[-2, 0]$ B. $(-\infty, 0)$
 C. $[-2, 0)$ D. $[-4, 4]$

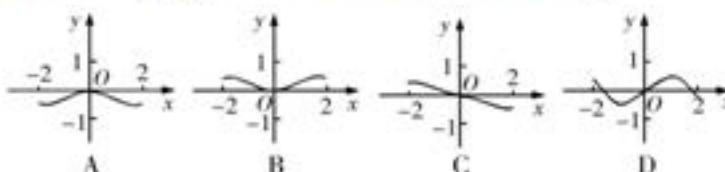
2. 已知角 α 终边上一点 M 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$, 则 $\sin 2\alpha =$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$
 C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知 $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\sin(\pi - 2\alpha) = -\frac{1}{2}$, 则 $\sin \alpha - \cos \alpha =$

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$
 C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

4. 函数 $f(x) = (\frac{2}{2^x + 1} - 1) \sin x$ 在 $[-2, 2]$ 上的图象大致是



5. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 1 \\ x+y+4 \geq 0 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x+2y$ 的最小值是.

- A. -8 B. -6
C. -3 D. 3

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, x \geq 1 \\ -x^2 + ax - a^2 + 1, x < 1 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上为增函数, 则 a 的取值范围是.
A. $(-\infty, 1]$ B. $[1, +\infty)$
C. $(-\infty, 2]$ D. $[2, +\infty)$

7. 已知非零向量 a 与 b 的夹角为 θ , $\tan \theta = \sqrt{2}$, $(a - 2b) \perp (a + b)$, 则 $\frac{|b|}{|a|} =$.
A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 设 $\omega > 0$, 将函数 $y = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后与函数 $y = \cos(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 的图象重合, 则 ω 的最小值为.
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 已知奇函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上是增函数, $g(x) = xf(x)$. 若 $a = g(\log_2 4.1)$, $b = g(-2^{0.2})$, $c = g(\pi)$, 则 a , b , c 的大小关系为.

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

10. 公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 a_1, a_3, a_5 成等差数列, mS_2, S_5, S_8 成等比数列, 则 $m =$.

- A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{8}{5}$ C. 1 D. $\frac{9}{5}$

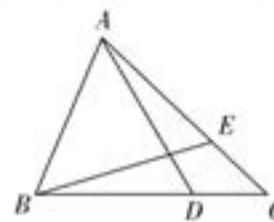
11. 若 $x > 0, y > -1$ 且满足 $2x + y = 1$, 则 $\frac{2x^2 + 1}{x} + \frac{y^2}{y+1}$ 的最小值是.

- A. 3 B. $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + x^2, x \leq m \\ x - m, x > m \end{cases}$, 若存在实数 a , 使得函数 $g(x) = f(x) - a$ 恰好有 4 个零点, 则实数 m 的取值范围是.

A. $(0,2)$ B. $(2,+\infty)$ C. $(0,3)$ D. $(3,+\infty)$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 4 \\ f(x-1), & x > 4 \end{cases}$ ，则 $f(5 + \log_2 6)$ 的值为 _____.14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和为 S_n ，若 $a_2 + a_5 = 24, S_5 = S_6$ ，则 S_n 的最大值为 _____.15. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2, BC = 3, \angle ABC = 60^\circ, BD = 2DC, AE = 2EC$ ，则 $\frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BE}|} =$ _____.16. 函数 $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ 的最大值为 _____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x) = 2a \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cos(x - \frac{2\pi}{3})$ ，且 $f(\frac{\pi}{3}) = 1$ 。(1) 求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期。(2) 若 $f(\alpha) = -\frac{1}{3}$ ， $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，求 $\sin 2\alpha$.

18.（本小题满分 12 分）

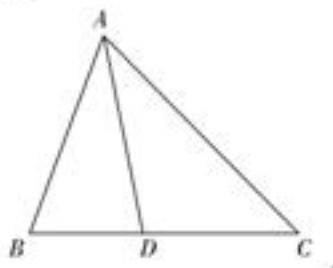
已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = n^2 + n$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n = \frac{b_1}{2+1} + \frac{b_2}{2^2+1} + \dots + \frac{b_n}{2^n+1}$ 。(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式。(2) 若 $c_n = \frac{a_n b_n}{4} - n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

19.（本小题满分 12 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC, \angle B, \angle C$ 的对边分别是 a, b, c ， $\angle BAC = 60^\circ$ ， AD 为 $\angle BAC$ 的平分线， $AD = \sqrt{3}$ 。

(1) 若 $DC = 2BD$, 求 c ; ..

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值; ..



20. (本小题满分 12 分) ..

已知函数 $f(x) = a^x + b$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 满足 $f(1) = 3$, 且 $f(n+1) = 4f(n)+3$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$..

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式; ..

(2) 求证: $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \dots + \frac{1}{f(n)} < \frac{4}{9}$..

21. (本小题满分 12 分) ..

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x} + x$ ($a \in \mathbb{R}$) ..

(1) 当 $a=0$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程; ..

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上有极值, 求实数 a 的取值范围. ..

22. (本小题满分 12 分) ..

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x - 2mx$ ($m > 0$). ..

(1) 判断函数 $f(x)$ 的单调性; ..

(2) 若函数 $f(x)$ 有极大值点 $x=t$, 求证: $t \ln t > mt^2 - 1$..