2020 北京首师附中高二（5-12 班）（上）期中

数　　学

一.选择题

1．在二项式 $(1+x)^6$ 的展开式中，含 x^2 的项的系数是（　）

A． -15　　B． -20　　C． 15　　D． 20

2．设 m 、n 是两条不同的直线，α 、β 是两个不同的平面，下列命题中正确的是（　）

A． $\alpha\cap\beta=n$，$m\subset\alpha$，$m//\beta\Rightarrow m//n$　B． $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$m\perp n\Rightarrow n\perp\beta$

C． $m\perp n$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$　D． $m//\alpha$，$n\subset\alpha$，$\Rightarrow m//n$

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为 CD,DD_1 的中点，则异面直线 EF 与 A_1C_1 所成角的余弦值为（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

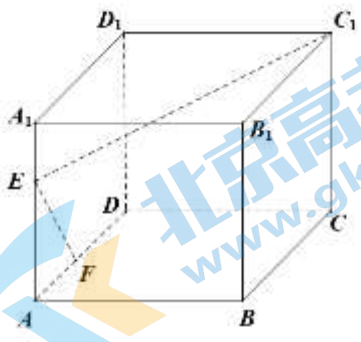
4. 五名学生和五名老师站成一排照相，五名老师不能相邻的排法有（　）

A． $2A_5^5A_5^5$　　B． $A_5^5A_6^5$　　C． $2A_5^5A_6^5$　　D． $A_5^5A_5^5$

5．将 4 位志愿者分配到世博会的 3 个不同场馆服务，每个场馆至少 1 人，不同的分配方案有（　）种.

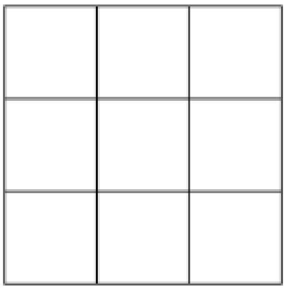
A．72　　B．36　　C．64　　D．81

6.如图，E 为棱长为 3 的正方体的棱 AA_1 上一点，且 $\frac{A_1E}{A_1A}=\frac{1}{3}$，$F$ 为棱 AD 上一点，且 $\angle C_1EF=90°$，则 $AF:FD=$（　）



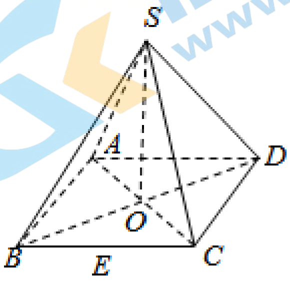
A． $2:7$　　B．2:6　　C． $1:3$　　D． $2:5$

7. 将 6 枚硬币放入如图所示的 9 个方格中，要求每个方格中至多放一枚硬币，并且每行每列都有 2 枚硬币，则放置硬币的方法共有（　）种.



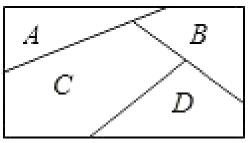
A．6　　B．12　　C．18　　D．36

8. 如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$，AC 与 BD 的交点为 O，$SO\perp$ 平面 $ABCD$ 且 $SO=\sqrt{2}$，E 是边 BC 的中点，动点 P 在四棱锥表面上运动，并且总保持 $PE\perp AC$，则动点 P 的轨迹的周长为(　)



A．$2\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$1+\sqrt{2}$　　D．$1+\sqrt{3}$

9. 将 5 种不同的花卉种植在如图所示的四个区域中，每个区域种植一种花卉，且相邻区域花卉不同，则不同的种植方法种数是（　）.



A．420　　B．180　　C．64　　D．25

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，平面 α 与此正方体相交.对于实数 $d\left(0<d<\sqrt{3}\right)$，如果正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的八个顶点中恰好有 m 个点到平面 α 的距离等于 d，那么下列结论中，一定正确的是

A．$m\neq 6$　　B．$m\neq 5$

C．$m\neq 4$　　D．$m\neq 3$

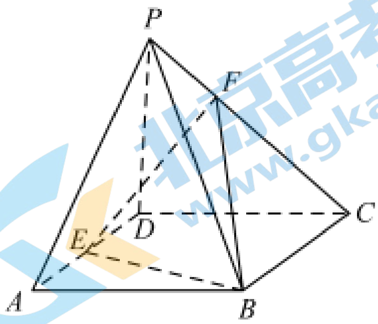
二.填空题

11.若 $6C_n^2=A_n^3$ 则正整数 $n=$__________.

12. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若点 O 是底面正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，且 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$，则 $x+y+z=$__________.

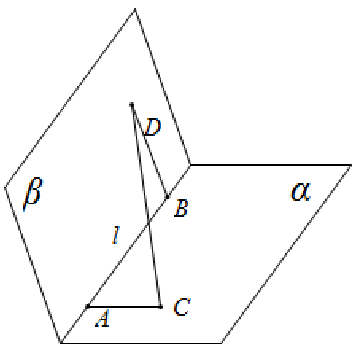
13. 已知二项式 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中，各项二项式系数之和为 64，则 n 等于________.

14. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，E 为 AD 的中点，F 为 PC 上一点，当 $PA//$ 平面 BEF 时，$\dfrac{PF}{FC}=$______



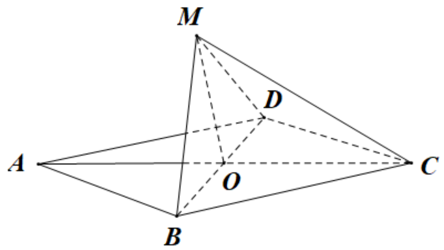
15.用数学 0，1，2，3，4 可组成__________个无重复数字的偶数三位数.

16. 如图，二面角 $\alpha-l-\beta$ 等于 $120°$，A、B 是棱 l 上两点，AC、BD 分别在半平面 α、β 内，$AC\perp l$，$BD\perp l$，且 $AB=AC=BD=1$，则 CD 的长等于______



17. 甲、乙、丙 3 名志愿者为某学生辅导数学、物理、化学、生物、英语 5 门学科，每名志愿者至少辅导 1 门学科，每门学科由 1 名志愿者辅导，则不同的安排方法共有：_________种.

18. 已知菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60°$，AC 与 BD 相交于点 O．将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，使顶点 A 至点 M，在折起的过程中，下列结论正确的有_________

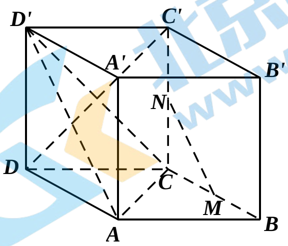


①$BD\perp CM$　②存在一个位置，使$\triangle CDM$ 为等边三角形

③DM 与 BC 不可能垂直　④直线 DM 与平面 BCD 所成的角的最大值为60°

三.解答题

19. 如图所示，平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AA'\perp$平面 $ABCD$，$AB\perp AC$，M,N 分别为 CB,CC' 的中点，$AB=AC=AA'=1$.

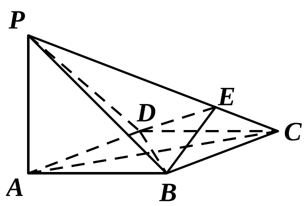


(I）求证：$MN\,//$平面 ACD'；

(II）求证：$C'D\perp$平面 ACD'

(III）求点 B 到平面 ACD' 的距离.

20. 四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle DAB=60^\circ$，$PA=AB=AD=2$，点 E 是棱 PC 上一点.



(I）求证：平面 $PAC\perp$平面 BDE

(II）当 E 为 PC 中点时，求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.

(III）若直线 BE 与平面 PAC 所成的角为 45°时，求 CE.

2020 北京首师附中高二（5-12 班）（上）期中数学

参考答案

一.选择题

1. 【答案】C

【解析】

由 $T_{r+1}=C_6^r(x)^r$ 知 $r=2$,所以 x^3 的系数为 $C_6^2=15$，

故选：C

2. 【答案】A

【解析】

对于 A，由线面平行性质定理：$m//\beta,m\subset\alpha,\alpha\cap\beta=n\Rightarrow m//n$，可知 A 正确；

对于 B，由面面垂直性质定理：$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m,n\subset\alpha,m\perp n\Rightarrow n\perp\beta$，可知 B 错误；

对于 C，根据面面垂直判定定理，需再找一条直线 $l\perp m,l\subset\beta$，才可判断，则 C 错误；

对于 D，一条直线平行于一个平面，不能判定它平行于平面内所有直线，则 D 错误；

故选：A.

3. 答案：A

4. 【答案】B

【解析】

由题意五名老师不能相邻用插空法，排法数为 $A_5^5A_6^5$．故选：B.

5. 【答案】B

【解析】

解：$\because$ 将 4 位志愿者分配到 3 个不同场馆服务，每个场馆至少 1 人，

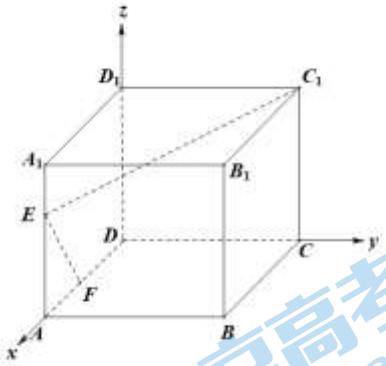
$\therefore$ 先从 4 个人中选出 2 个作为一个元素看成整体，

再把它同另外两个元素在三个位置全排列，共有 $C_4^2A_3^3=36$.

6.【答案】A

【解析】

如下图，以 D 为坐标原点，射线 DA， DC， DD_1 的方向分别为 x 轴， y 轴， z 轴正方向建立空间直角坐标系，



由于正方体棱长为3，则 $E\left(3,0,2\right)$， $C_1(0,3,3)$， $F(x,0,0)$，

$\therefore \overrightarrow{C_1E}=\left(3,-3,-1\right)$， $\overrightarrow{EF}=\left(x-3,0,-2\right)$，

$\because \angle C_1EF=90^\circ$，

$\therefore \overrightarrow{C_1E}\perp\overrightarrow{EF}$，即 $\overrightarrow{C_1E}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，

$\therefore 3(x-3)+2=0$，

解得 $x=\dfrac{7}{3}$，

$\therefore FD=\dfrac{7}{3}$， $AF=3-\dfrac{7}{3}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore AF:FD=2:7$.

故选：A

7. 【答案】A

【解析】

【分析】

完成此事分三步完成，利用乘法分步原理得解.

【详解】

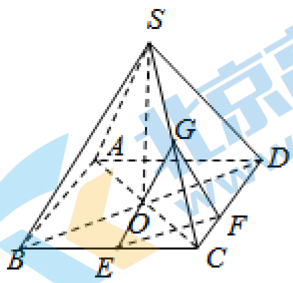
先在第一列里任意选一格不放硬币，有 3 种选法；再在第二列选一格（不能选与第一步同行的的空格）不放硬币，有 2 种选法；最后在第三列选一格（不能选与第一、二步同行的空格）不放硬币，有 1 种方法.所以共有 $3\times2\times1=6$ 种方法.

故选：A

8. 【答案】D

【解析】

解：分别取 CD、SC 的中点 F、G，连接 EF、FG 和 EG，如图所示；



则 $EF /\!/ BD$，$EF\not\subset$平面 BDS，$BD\subset$平面 BDS

$\therefore EF /\!/$ 平面 BDS

同理 $FG /\!/$ 平面 BDS

又 $EF\cap FG=F$，$EF\subset$平面 EFG，$FG\subset$平面 EFG，，

$\therefore$平面 $EFG /\!/$ 平面 BDS，

由 $AC\perp BD$，$AC\perp SO$，且 $AC\cap SO=O$，

则 $AC\perp$平面 BDS，

$\therefore AC\perp$平面 EFG，

$\therefore$点 P 在$\triangle EFG$ 的三条边上；

又 $EF=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$，

$FG=EG=\frac{1}{2}SB=\frac{1}{2}\times\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\triangle EFG$ 的周长为 $EF+2FG=1+\sqrt{3}$.

故选：D.

9.【答案】B

【解析】

由题意，由于规定一个区域只涂一种颜色，相邻的区域颜色不同，可分步进行

区域 A 有 5 种涂法，B 有 4 种涂法，

A，D 不同色，D 有 3 种，C 有 2 种涂法，有 $5\times4\times3\times2=120$ 种，

A，D 同色，D 有 1 种涂法，C 有 3 种涂法，有 $5\times4\times3=60$ 种，

共有 180 种不同的涂色方案.

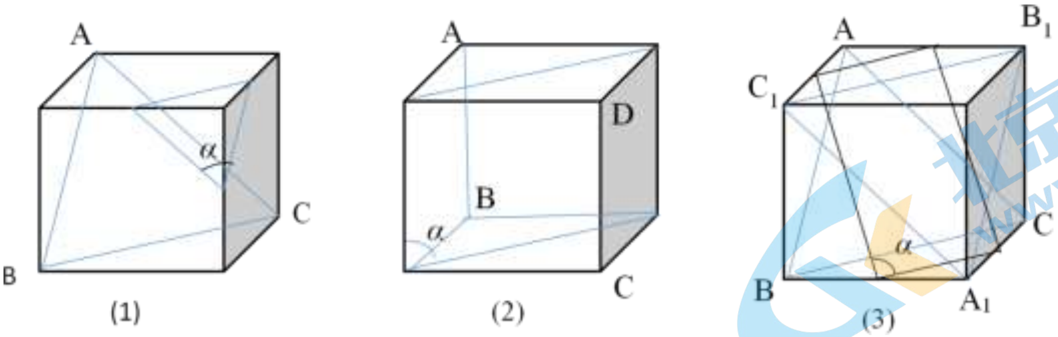
故选：B.

10.【答案】B

【解析】

如图（1）恰好有 3 个点到平面 α 的距离为 d；如图（2）恰好有 4 个点到平面 α 的距离为 d；如图（3）恰好有 6 个点到平面 α 的距离为 d .

所以本题答案为 B.



二.填空题

11.【答案】5

【解析】

由 $6C_n^2=A_n^3$ 得 $6\times\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=n(n-1)(n-2),(n\geq3)$，

解得 $n=5$.故答案为：5

12.【答案】2

【解析】

依题意可知 $x=y=\dfrac{1}{2},z=1$，故 $x+y+z=2$.

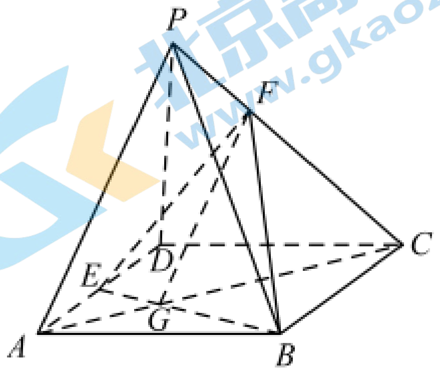
13. 【答案】6

【解析】

$2^n=64$，$\therefore n=6$

14. 【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【解析】



如图，连结 AC 交 BE 于点 G，连结 FG

因为 $PA//$ 平面 BEF， $PA\subset$ 平面 PAC，平面 $PAC\cap$ 平面 $EBF=FG$

所以 $PA//FG$，所以 $\dfrac{PF}{FC}=\dfrac{AG}{GC}$

因为 $AD//BC$， E 为 AD 的中点

所以 $\dfrac{AG}{GC}=\dfrac{AE}{BC}=\dfrac{1}{2}$， 即 $\dfrac{PF}{FC}=\dfrac{1}{2}$

故答案为： $\dfrac{1}{2}$

15. 【答案】30

【解析】

排除法（个位是偶数的情况下，去掉百位是零的情况）： $C_3^1\cdot A_4^2-C_2^1\cdot C_3^1=30$.

故答案为：30．

16．【答案】2

【解析】

∵A、B是棱l上两点，AC、BD分别在半平面α、β内，$AC\perp l$，$BD\perp l$，

又∵二面角α - l - β的平面角θ等于120°，且$AB=AC=BD=1$，

∴$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DB}\rangle=60°$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times1\times cos60°$

∴$\overrightarrow{CD}^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2$

$=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=4$

$|\overrightarrow{CD}|=2$

故答案为2．

17．【答案】150

【解析】

解：根据题意，分2步进行分析：

①将5门学科分为3组，

若分为3、1、1的三组，有$C_5^3=10$种分组分法，

若分为2、2、1的三组，有$\dfrac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}=15$种分组分法，

则有$10+15=25$种分组分法；

②将分好的三组分配给甲、乙、丙3名志愿者，有$A_3^3=6$种情况，

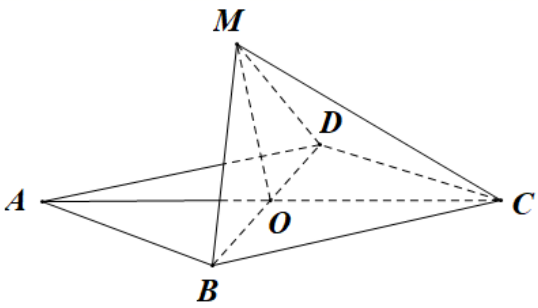
则有$25\times6=150$种安排分法；

故答案为：150

18．【解析】

菱形$ABCD$中，$\angle BAD=60^{\circ}$，AC与BD相交于点O．将$\triangle ABD$沿BD折起，使顶点A至点M，

如图：在菱形$ABCD$中，$AC\perp BD$，



所以 $MO\perp BD$， $OC\perp BD$，所以 $BD\perp$ 平面 MCO，可知 $MC\perp BD$，所以①正确；

由题意可知 $AB=BC=CD=DA=BD$，所以当点 M 在底面 BCD 内的射影是三角形 BCD 的外心时，三棱锥 $M-BCD$ 为正四面体， $\triangle CDM$ 为等边三角形，所以②正确；

当三棱锥 $M-BCD$ 是正四面体时， DM 与 BC 垂直，所以③不正确；

设三棱锥 $M-BCD$ 的高为 h，当平面 $MBD\perp$ 平面 BCD 时，三棱锥 $M-BCD$ 的高达到最大值为 MO，此时 $\angle MDO$ 为直线 DM 与平面 BCD 所成的最大角，$\sin\angle MDO=\dfrac{MO}{MD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle MDO=60^\circ$，所以④正确.

故答案为：①②④

三.解答题

19. 证明：（I）取 AC 中点 Q，令 $D'C,DC'$ 交于点 O，连接 QO,ON,QM

$\because O,N$ 分别为 OC',CC' 中点

$\therefore ON//DC,ON=\dfrac{1}{2}DC$

同理，由于 Q,M 分别为 AC,BC 的中点

$\therefore QM//AB,QM=\dfrac{1}{2}AB$

$\therefore ON//QM,QM=ON$

故四边形 $ONMQ$ 为平行四边形

$\therefore MN//OQ$

又 $MN\subsetneq$ 平面 $ACD',OQ\subseteq$ 平面 ACD'

$\therefore MN // $ 平面 ACD'

（II）$\because AA' \perp$ 平面ABCD，且平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$

$\therefore AA'//CC' \therefore CC' \perp$ 平面$ABCD$

又 $AC \subseteq$ 平面ABCD

$\therefore CC' \perp AC$

又 $AB \perp AC, AB//CD$

$\therefore CD \perp AC$

又 $CC' \cap CD = C, CC', CD \subseteq$ 平面$CDD'C'$

$\therefore AC \perp$ 平面$CDD'C'$

又 $C'D \subseteq$ 平面 $CDD'C'$

$\therefore AC \perp C'D$

又 $AB = AC = AA' \therefore CD = CC'$

$\therefore$ 四边形$DCC'D'$为菱形

$\therefore D'C \perp DC'$

又 $AC \cap D'C = C, AC, D'C \subseteq$ 平面ACD'

$\therefore C'D \perp$ 平面ACD'

（III）设点 B 到平面 ACD' 的距离为 d

由于 $V_{B-AC'D} = V_{D'-ABC}$

故 $\frac{1}{3} d \cdot S_{\Delta ACD'} = \frac{1}{3} DD' \cdot S_{\Delta ABC}$

$\therefore \frac{1}{3} d \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$

$\therefore d = \frac{\sqrt{2}}{2}$

20. 证明（I）$\because$ 平行四边形$ABCD, AB=AD$

$\therefore ABCD$ 为菱形

$\therefore AC\perp BD$

又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$， $BD\subseteq$ 平面ABCD

$\therefore PA\perp BD$

又 $PA\cap AC=A, PA, AC\subseteq$ 平面PAC

$\therefore BD\perp$ 平面PAC

又 $BD\subseteq$ 平面BDE

$\therefore$ 平面$PAC\perp$ 平面BDE

（II）由于 $PA\perp$ 平面 $ABCD$， 以 A 为坐标原点， AP 为 z 轴， AD 为 y 轴，

过点 A 作 x 轴垂直于 AD 于点 A

故

$P(0,0,2), A(0,0,0), B(\sqrt{3},1,0), C(\sqrt{3},1,0), D(0,0,2), E(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},1)$

$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0), \overrightarrow{AE}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},1), \overrightarrow{BE}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1), \overrightarrow{BD}=(-\sqrt{3},1,0)$

设平面 ABE 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$

故 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x+y=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+z=0\end{cases}$

令 $x=1, \therefore y=-\sqrt{3}, z=\sqrt{3}$

$\therefore \overrightarrow{n_1}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$

设平面 BDE 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$

故 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y+z=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BD}=-\sqrt{3}x+y=0\end{cases}$

令 $x=1,\therefore y=\sqrt{3},z=0$

$\therefore\overrightarrow{n_1}=(1,\sqrt{3},0)$

$\therefore|\cos\theta|=|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>|=|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}|=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

有图得二面角为锐角，故

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

（III）设 $E(x,y,z),\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}$

$\therefore(x,y,z-2)=\lambda(\sqrt{3},3,-2)\therefore x=\sqrt{3}\lambda,y=3\lambda,z=2-2\lambda$

$\therefore E(\sqrt{3}\lambda,3\lambda.2-2\lambda),\overrightarrow{BE}=(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},3\lambda-1,2-2\lambda)$

$\overrightarrow{PA}=(0,0,-2),\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},3,-2)$

设平面 PAC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\therefore\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=-2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=\sqrt{3}x+3y-2z=0\end{cases}$

令 $y=1\therefore x=-\sqrt{3}$

$\therefore\vec{n}=(-\sqrt{3},1,0)$

$\therefore\sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{BC}>|=|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\vec{n}||\overrightarrow{BC}|}|=\dfrac{2}{2\cdot\sqrt{(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})^2+(3\lambda-1)^2+(2-2\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore16\lambda^2-20\lambda+6=0$

$\therefore\lambda=\dfrac{1}{2}$或$\lambda=\dfrac{3}{4}$

又 $|PC|=|\overrightarrow{PC}|=4$

故$CE=2$或1

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。