# 北京市朝阳区高三年级第二学期质量检测一

# 数　学

2023.3

（考试时间120分钟　满分150分）

本试卷分为选择题40分和非选择题110分

## 第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A=\{x\mid x^2\leq 4\}$，集合 $B=\{x\mid x>0\}$，则 $A\cup B=$

(A) $(-\infty,-2]$　(B) $[-2,0)$　(C) $[-2,+\infty)$　(D) $(0,2]$

(2) 若 $a>0>b$，则

(A) $a^3>b^3$　(B) $|a|>|b|$

(C) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　(D) $\ln(a-b)>0$

(3) 设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，若 $a_2=a_3$，则 $n=$

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8

(4) 已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$．若直线 $y=kx-2$ 上存在点 $P$，使得 $\angle APB=90°$，则实数 $k$ 的取值范围是

(A) $(-\infty,-\sqrt{3}]$　(B) $[\sqrt{3},+\infty)$

(C) $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　(D) $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$

(5) 已知函数 $f(x)=x^3+x$，则“$x_1+x_2=0$”是“$f(x_1)+f(x_2)=0$”的

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

(6) 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的右焦点 $F$ 作一条渐近线的垂线，垂足为 $A$．若 $\angle AFO=2\angle AOF$（$O$ 为坐标原点），则该双曲线的离心率为

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$　(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) 2　(D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 2

(7)在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AC_1$ 与平面 $A_1BD$ 相交于点 $M$,则下列结论一定成立的是

(A)$AM\perp BD$

(B)$A_1M\perp BD$

(C)$AM=\frac{1}{2}MC_1$

(D)$MB=MD$

(8)声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波,我们听到的声音多为复合音.若一个复合音的数学模型是函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x(x\in\mathbf{R})$,则下列结论正确的是

(A)$f(x)$的一个周期为$\pi$

(B)$f(x)$的最大值为$\frac{3}{2}$

(C)$f(x)$的图象关于直线 $x=\pi$ 对称

(D)$f(x)$在区间$[0,2\pi]$上有 3 个零点

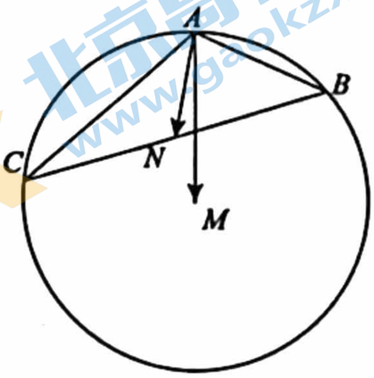
(9)如图,圆 $M$ 为$\triangle ABC$ 的外接圆,$AB=4$,$AC=6$,$N$ 为边 $BC$ 的中点,则$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}=$

(A)5

(B)10

(C)13

(D)26




第(9)题

(10)已知项数为 $k(k\in\mathbf{N}^*)$ 的等差数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$\frac{1}{4}a_{n-1}\leqslant a_n(n=2,3,\cdots,k)$.

若 $a_1+a_2+\cdots+a_k=8$,则 $k$ 的最大值是

(A)14 (B)15 (C)16 (D)17

## 第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 若 $z=\dfrac{2}{1+i}$，则 $|\bar{z}|=$________.

(12) 函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x, & x\geq 1,\\ 3^x, & x<1\end{cases}$ 的值域为________.

(13) 经过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点的直线与抛物线相交于 $A,B$ 两点，若 $|AB|=4$，则 $\triangle OAB$（$O$ 为坐标原点）的面积为________.

(14) 在 $\triangle ABC$ 中，$a=4\sqrt{2}$，$b=m$，$\sin A-\cos A=0$.

①若 $m=8$，则 $c=$________；

②当 $m=$________（写出一个可能的值）时，满足条件的 $\triangle ABC$ 有两个.

(15) 某军区红、蓝两方进行战斗演习，假设双方兵力（战斗单位数）随时间的变化遵循兰彻斯特模型：

$$\begin{cases}x(t)=X_0\cosh(\sqrt{ab}\,t)-\sqrt{\dfrac{b}{a}}Y_0\sinh(\sqrt{ab}\,t),\\ y(t)=Y_0\cosh(\sqrt{ab}\,t)-\sqrt{\dfrac{a}{b}}X_0\sinh(\sqrt{ab}\,t),\end{cases}$$

其中正实数 $X_0,Y_0$ 分别为红、蓝两方初始兵力，$t$ 为战斗时间；$x(t),y(t)$ 分别为红、蓝两方 $t$ 时刻的兵力；正实数 $a,b$ 分别为红方对蓝方、蓝方对红方的战斗效果系数；$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 和 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 分别为双曲余弦函数和双曲正弦函数.规定当红、蓝两方任何一方兵力为 0 时战斗演习结束，另一方获得战斗演习胜利，并记战斗持续时长为 $T$.

给出下列四个结论：

①若 $X_0>Y_0$ 且 $a=b$，则 $x(t)>y(t)\ (0\leq t\leq T)$；

②若 $X_0>Y_0$ 且 $a=b$，则 $T=\dfrac{1}{a}\ln\sqrt{\dfrac{X_0+Y_0}{X_0-Y_0}}$；

③若 $\dfrac{X_0}{Y_0}>\dfrac{b}{a}$，则红方获得战斗演习胜利；

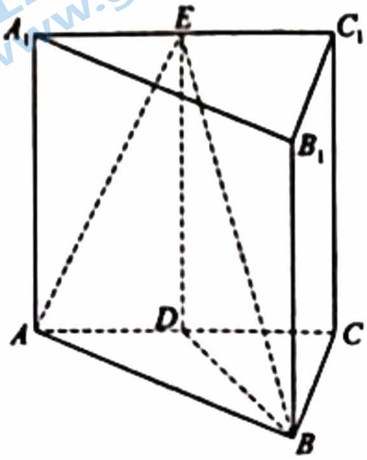
④若 $\dfrac{X_0}{Y_0}>\sqrt{\dfrac{b}{a}}$，则红方获得战斗演习胜利.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 14 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 $ABC$，$D$，$E$ 分别为 $AC$，$A_1C_1$ 的中点，$AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=AA_1=2$.




(Ⅰ)求证：$AC\perp$ 平面 $BDE$；

(Ⅱ)求直线 $DE$ 与平面 $ABE$ 所成角的正弦值；

(Ⅲ)求点 $D$ 到平面 $ABE$ 的距离.

(17)(本小题 13 分)

设函数 $f(x)=A\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x\,(A>0,\omega>0)$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得 $f(x)$ 存在.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(Ⅱ)求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

条件①：$f(x)=f(-x)$；

条件②：$f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$；

条件③：$f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多组条件分别解答，按第一组解答计分.

(18)(本小题13分)

某地区组织所有高一学生参加了"科技的力量"主题知识竞答活动，根据答题得分情况评选出一二三等奖若干.为了解不同性别学生的获奖情况，从该地区随机抽取了500名参加活动的高一学生，获奖情况统计结果如下：

| 性别 | 人数 | 获奖人数 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 一等奖 | 二等奖 | 三等奖 |
| 男生 | 200 | 10 | 15 | 15 |
| 女生 | 300 | 25 | 25 | 40 |

假设所有学生的获奖情况相互独立.

(Ⅰ)分别从上述200名男生和300名女生中各随机抽取1名，求抽到的2名学生都获一等奖的概率；

(Ⅱ)用频率估计概率，从该地区高一男生中随机抽取1名，从该地区高一女生中随机抽取1名，以$X$表示这2名学生中获奖的人数，求$X$的分布列和数学期望$EX$；

(Ⅲ)用频率估计概率，从该地区高一学生中随机抽取1名，设抽到的学生获奖的概率为$p_0$；从该地区高一男生中随机抽取1名，设抽到的学生获奖的概率为$p_1$；从该地区高一女生中随机抽取1名，设抽到的学生获奖的概率为$p_2$，试比较$p_0$与$\frac{p_1+p_2}{2}$的大小.(结论不要求证明)

(19)(本小题15分)

已知函数$f(x)=e^{2x}-ax-1(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)求$f(x)$的单调区间；

(Ⅱ)若$f(x)>0$对$x\in(0,+\infty)$恒成立，求$a$的取值范围；

(Ⅲ)证明：若$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在唯一零点$x_0$，则$x_0<a-2$.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{n}=1(0<n<4)$ 经过点 $(\sqrt{2},-1)$.

(Ⅰ)求椭圆 $E$ 的方程及离心率;

(Ⅱ)设椭圆 $E$ 的左顶点为 $A$,直线 $l:x=my+1$ 与 $E$ 相交于 $M,N$ 两点,直线 $AM$ 与直线 $x=4$ 相交于点 $Q$.问:直线 $NQ$ 是否经过 $x$ 轴上的定点?若过定点,求出该点坐标;若不过定点,说明理由.

(21)(本小题 15 分)

已知有穷数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_N(N\in\mathbf{N}^*,N\geqslant3)$ 满足 $a_i\in\{-1,0,1\}(i=1,2,\cdots,N)$.给定正整数 $m$,若存在正整数 $s,t(s\neq t)$,使得对任意的 $k\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$,都有 $a_{s+k}=a_{t+k}$,则称数列 $A$ 是 $m$-连续等项数列.

(Ⅰ)判断数列 $A:-1,1,0,1,0,1,-1$ 是否为 3-连续等项数列?是否为 4-连续等项数列?说明理由;

(Ⅱ)若项数为 $N$ 的任意数列 $A$ 都是 2-连续等项数列,求 $N$ 的最小值;

(Ⅲ)若数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_N$ 不是 4-连续等项数列,而数列 $A_1:a_1,a_2,\cdots,a_N,-1$,数列 $A_2:a_1,a_2,\cdots,a_N,0$ 与数列 $A_3:a_1,a_2,\cdots,a_N,1$ 都是 4-连续等项数列,且 $a_3=0$,求 $a_N$ 的值.

# 北京市朝阳区高三年级第二学期质量检测一

## 数学参考答案

2023.3

一、选择题(共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

(1)C　(2)A　(3)A　(4)D　(5)C

(6)B　(7)C　(8)D　(9)C　(10)B

二、填空题(共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

(11)$\sqrt{2}$　(12)$(-\infty,3)$　(13)2

(14) $4\sqrt{2}$　6(答案不唯一)　(15)①②④

三、解答题(共 6 小题,共 85 分)

(16)(本小题 14 分)

解:(Ⅰ)在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,

因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABC$,

所以 $AA_1\perp AC$.

又 $D,E$ 分别为 $AC,A_1C_1$ 的中点,则 $DE/\!/AA_1$,

所以 $AC\perp DE$.

因为 $AB=BC$,所以 $AC\perp BD$.

又 $BD\cap DE=D$,

所以 $AC\perp$ 平面 $BDE$. ………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $AC\perp DE,AC\perp BD,DE/\!/AA_1$.

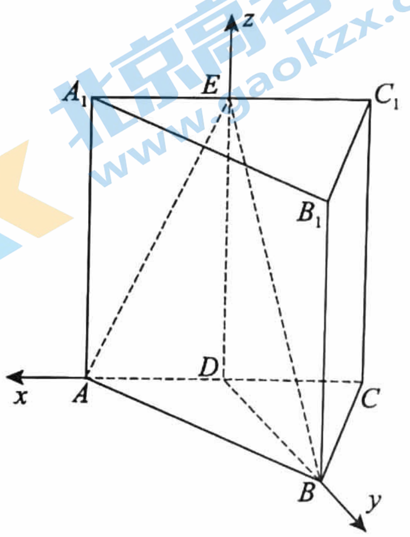
又 $AA_1\perp$ 平面 $ABC$,

所以 $DE\perp$ 平面 $ABC$.

因为 $BD\subset$ 平面 $ABC$,

所以 $DE\perp BD$.

所以 $DA,DB,DE$ 两两垂直.




如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $D(0,0,0),A(1,0,0),B(0,2,0),E(0,0,2)$.

所以$\overrightarrow{DE}=(0,0,2),\overrightarrow{AB}=(-1,2,0),\overrightarrow{AE}=(-1,0,2)$.

设平面 $ABE$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-x+2y=0,\\ -x+2z=0.\end{cases}$

令 $y=1$,则 $x=2,z=1$.于是 $\boldsymbol{m}=(2,1,1)$.

设直线 $DE$ 与平面 $ABE$ 所成角为 $\alpha$,则

$\sin\alpha=|\cos\langle \boldsymbol{m},\overrightarrow{DE}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{DE}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

所以直线 $DE$ 与平面 $ABE$ 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. …………………………………………………… 11 分

(Ⅲ)因为直线 $DE$ 与平面 $ABE$ 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$,

所以点 $D$ 到平面 $ABE$ 的距离为 $d=DE\cdot\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………… 14 分

(17)(本小题 13 分)

解:选条件②③.

(Ⅰ)$f(x)=A\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x$

$=\dfrac{A}{2}\sin2\omega x+\dfrac{\cos2\omega x+1}{2}$

$=\sqrt{\dfrac{A^2+1}{4}}\sin(2\omega x+\varphi)+\dfrac{1}{2}$(其中 $\cos\varphi=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+1}}$,$\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+1}}$).

根据条件②可知,函数 $f(x)$ 的最大值为$\sqrt{\dfrac{A^2+1}{4}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

又 $A>0$,所以 $A=\sqrt{3}$.

根据条件③可知,函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$,所以 $\omega=1$.

所以$f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………………… 7 分

(Ⅱ)由 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,得$\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{7\pi}{6}$,

则$-\dfrac{1}{2}\leqslant\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})\leqslant1$,所以 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{3}{2}$.

当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}$,即 $x=\dfrac{\pi}{2}$时,$f(x)$取得最小值,最小值为 0;

当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $x=\dfrac{\pi}{6}$时,$f(x)$取得最大值,最大值为$\dfrac{3}{2}$. ……………………………… 13 分

(18)(本小题 13 分)

解:(Ⅰ)设事件 $A$ 为"分别从上述 200 名男生和 300 名女生中各随机抽取 1 名,抽到的 2 名学生都获一等奖",

则 $P(A)=\dfrac{C_{10}^1C_{25}^1}{C_{200}^1C_{300}^1}=\dfrac{1}{240}$. ……………………………………………………………… 4 分

（Ⅱ）随机变量 $X$ 的所有可能取值为 0,1,2.

记事件 $B$ 为“从该地区高一男生中随机抽取 1 名，该学生获奖”，

事件 $C$ 为“从该地区高一女生中随机抽取 1 名，该学生获奖”.

由题设知，事件 $B,C$ 相互独立，

且 $P(B)$ 估计为 $\frac{10+15+15}{200}=\frac{1}{5}$，$P(C)$ 估计为 $\frac{25+25+40}{300}=\frac{3}{10}$.

所以 $P(X=0)=P(\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{B})P(\overline{C})=(1-\frac{1}{5})\times(1-\frac{3}{10})=\frac{28}{50}$，

$$P(X=1)=P(B\overline{C}\cup\overline{B}C)$$

$$=P(B)P(\overline{C})+P(\overline{B})P(C)$$

$$=\frac{1}{5}\times(1-\frac{3}{10})+(1-\frac{1}{5})\times\frac{3}{10}=\frac{19}{50},$$

$$P(X=2)=P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{50}.$$

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{28}{50}$ | $\frac{19}{50}$ | $\frac{3}{50}$ |

故 $X$ 的数学期望 $EX=0\times\frac{28}{50}+1\times\frac{19}{50}+2\times\frac{3}{50}=\frac{1}{2}$. ……………………………… 10 分

（Ⅲ）$p_0>\frac{p_1+p_2}{2}$. ……………………………………………………………… 13 分

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=e^{2x}-ax-1(x\in\mathbf{R})$，所以 $f'(x)=2e^{2x}-a$.

①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

②若 $a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$.

当 $x\in(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上单调递减；

当 $x\in(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$，单调递增区间为 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$.

………………………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)①若 $a\leqslant 2$，当 $x>0$ 时，$2e^{2x}>2$，$f'(x)=2e^{2x}-a>0$，

则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)>f(0)=0$.

所以 $a\leqslant 2$ 符合题意.

②若 $a>2$，则 $\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}>0$.

由(Ⅰ)可知 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上单调递减，

所以当 $x\in(0,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 时，$f(x)<f(0)=0$，不符合题意.

综上，$a$ 的取值范围为 $(-\infty,2]$. ………………………………………………………… 11 分

(Ⅲ)若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 $x_0$，

则 $a>2$，$x_0>0$ 且 $e^{2x_0}-ax_0-1=0$，即 $a=\frac{e^{2x_0}-1}{x_0}$.

欲证：$x_0<a-2$，

只需证：$x_0<\frac{e^{2x_0}-1}{x_0}-2$，

只需证：$e^{2x_0}>(x_0+1)^2$，

即证：$e^{x_0}>x_0+1$.

由(Ⅱ)知，$e^{2x}-2x-1>0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $e^{x}-x-1>0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

所以 $e^{x_0}>x_0+1$.

所以 $x_0<a-2$. ………………………………………………………………………… 15 分

(20)(本小题 15 分)

解：(Ⅰ)因为椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{n}=1(0<n<4)$ 过点 $(\sqrt{2},-1)$，

所以 $\frac{2}{4}+\frac{1}{n}=1$，得 $n=2$.

所以椭圆 $E$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

因为 $a^2=4$，$b^2=2$，

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$.

所以椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)直线 $NQ$ 过定点 $(2,0)$. 理由如下:

由 $\begin{cases}x=my+1,\\x^2+2y^2=4\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+2my-3=0$.

显然, $\Delta>0$.

设 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$, 则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+2}$, $y_1y_2=-\frac{3}{m^2+2}$.

直线 $AM$ 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$.

令 $x=4$, 得 $y=\frac{6y_1}{x_1+2}$, 则 $Q(4,\frac{6y_1}{x_1+2})$.

所以直线 $NQ$ 的斜率为 $k_{NQ}=\dfrac{\frac{6y_1}{x_1+2}-y_2}{4-x_2}=\frac{6y_1-y_2(x_1+2)}{(4-x_2)(x_1+2)}$, 且 $k_{NQ}\neq0$.

所以直线 $NQ$ 的方程为 $y-y_2=\frac{6y_1-y_2(x_1+2)}{(4-x_2)(x_1+2)}(x-x_2)$.

令 $y=0$, 则
$$\begin{aligned}x&=x_2-\frac{y_2(4-x_2)(x_1+2)}{6y_1-y_2(x_1+2)}\\&=\frac{x_2[6y_1-y_2(x_1+2)]-y_2(4-x_2)(x_1+2)}{6y_1-y_2(x_1+2)}\\&=\frac{6x_2y_1-4y_2(x_1+2)}{6y_1-y_2(x_1+2)}\\&=\frac{6(my_2+1)y_1-4y_2(my_1+3)}{6y_1-y_2(my_1+3)}\\&=\frac{2my_1y_2+6y_1-12y_2}{-my_1y_2+6y_1-3y_2}\\&=\frac{2m(-\frac{3}{m^2+2})+6(-\frac{2m}{m^2+2})-18y_2}{-m(-\frac{3}{m^2+2})+6(-\frac{2m}{m^2+2})-9y_2}\\&=\frac{-18m-18(m^2+2)y_2}{-9m-9(m^2+2)y_2}=2.\end{aligned}$$

所以直线 $NQ$ 过定点 $(2,0)$. …………………………………………………………… 15 分

(21)(本小题 15 分)

解:(Ⅰ)数列 $A$ 是 3-连续等项数列,不是 4-连续等项数列.理由如下:

因为 $a_{2+k}=a_{4+k}(k=0,1,2)$，所以 $A$ 是 3-连续等项数列.

因为 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 为 $-1,1,0,1$；

$a_2,a_3,a_4,a_5$ 为 $1,0,1,0$；

$a_3,a_4,a_5,a_6$ 为 $0,1,0,1$；

$a_4,a_5,a_6,a_7$ 为 $1,0,1,-1$，

所以不存在正整数 $s,t(s\neq t)$，使得 $a_{s+k}=a_{t+k}(k=0,1,2,3)$.

所以 $A$ 不是 4-连续等项数列. ………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)设集合 $S=\{(x,y)\mid x\in\{-1,0,1\},y\in\{-1,0,1\}\}$，则 $S$ 中的元素个数为 $3^2=9$.

因为在数列 $A$ 中，$a_i\in\{-1,0,1\}(i=1,2,\cdots,N)$，所以 $(a_i,a_{i+1})\in S(i=1,2,\cdots,N-1)$.

若 $N\geqslant 11$，则 $N-1\geqslant 10>9$.

所以在 $(a_1,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_4),\cdots,(a_{N-1},a_N)$ 这 $N-1$ 个有序数对中，

至少有两个有序数对相同，

即存在正整数 $s,t(s\neq t)$，使得 $a_s=a_t,a_{s+1}=a_{t+1}$.

所以当项数 $N\geqslant 11$ 时，数列 $A$ 一定是 2-连续等项数列.

若 $N=3$，数列 0,0,1 不是 2-连续等项数列.

若 $N=4$，数列 0,0,1,1 不是 2-连续等项数列.

若 $N=5$，数列 0,0,1,1,0 不是 2-连续等项数列.

若 $N=6$，数列 0,0,1,1,0,-1 不是 2-连续等项数列.

若 $N=7$，数列 0,0,1,1,0,-1,1 不是 2-连续等项数列.

若 $N=8$，数列 0,0,1,1,0,-1,1,-1 不是 2-连续等项数列.

若 $N=9$，数列 0,0,1,1,0,-1,1,-1,-1 不是 2-连续等项数列.

若 $N=10$，数列 0,0,1,1,0,-1,1,-1,-1,0 不是 2-连续等项数列.

所以 $N$ 的最小值为 11. ………………………………………………………………………… 9 分

(Ⅲ)因为 $A_1,A_2$ 与 $A_3$ 都是 4-连续等项数列，

所以存在两两不等的正整数 $i,j,k(i,j,k<N-2)$，使得

$a_i=a_{N-2},a_{i+1}=a_{N-1},a_{i+2}=a_N,a_{i+3}=-1$，

$a_j=a_{N-2},a_{j+1}=a_{N-1},a_{j+2}=a_N,a_{j+3}=0$，

$a_k=a_{N-2},a_{k+1}=a_{N-1},a_{k+2}=a_N,a_{k+3}=1$.

下面用反证法证明 $\min\{i,j,k\}=1$.

假设 $\min\{i,j,k\}>1$，

因为 $a_{i-1},a_{j-1},a_{k-1},a_{N-3}\in\{-1,0,1\}$，

所以 $a_{i-1},a_{j-1},a_{k-1},a_{N-3}$ 中至少有两个数相等.

不妨设 $a_{i-1}=a_{j-1}$，则 $a_{i-1}=a_{j-1},a_i=a_j,a_{i+1}=a_{j+1},a_{i+2}=a_{j+2}$，

所以 $A$ 是 4-连续等项数列，与题设矛盾.

所以 $\min\{i,j,k\}=1$.

所以 $a_N=a_{i+2}=a_{j+2}=a_{k+2}=a_3=0$. ……………………………………………………… 15 分

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ″ 精益求精、专业严谨 ″ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。