甘肃省 2024 届新高考备考模拟考试

数 学 试 卷

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x\mid \log_2 x<3\}$，$N=\{x\mid x>-1\}$，则 $M\cap N=$

A. $(-1,8)$　　B. $(-1,6)$　　C. $(0,8)$　　D. $(0,6)$

2. 已知 i 是虚数单位，若 $z_1=2+\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$，则 $z=z_1\cdot\overline{z_2}$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 使"$a<b$"成立的一个充分不必要条件是

A. $\forall x\in(0,1]$，$a\leqslant b+x$　　B. $\forall x\in(0,1]$，$a+x<b$

C. $\exists x\in[0,1]$，$a<b+x$　　D. $\exists x\in[0,1]$，$a+x\leqslant b$

4. 已知图 1 对应的函数为 $y=f(x)$，则图 2 对应的函数是

A. $y=f(-x)$

B. $y=f(|x|)$

C. $y=-f(-x)$

D. $y=f(-|x|)$

图1

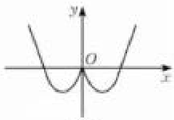


图2

5. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(4,0)$，若 $|AF|=|BF|$，则 AB 的中点到 y 轴的距离是

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

6. 已知函数 $f(x)=e^x-ax+b$，$g(x)=x^2-x$. 若曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在公共点 $A(1,0)$ 处有相同的切线，则 a,b 的值分别为

A. $e-1,-1$　　B. $-1,e-1$

C. $e,-1$　　D. $-1,e$

7. 如图所示的“数字塔”有如下规律：每一层最左与最右的数字均为 3，除此之外每个数字均为两肩的数字之积，则该“数字塔”前 7 层的所有数字之积最接近（参考数据：$\lg 3\approx 0.477$）

$$\begin{array}{c} 3 \\ 3\quad 3 \\ 3\quad 9\quad 3 \\ 3\quad 27\quad 27\quad 3 \end{array}$$

A. 10^{50}　　B. 10^{60}　　C. 10^{70}　　D. 10^{80}

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$PA=PB$，$\angle ACP=90^\circ$，$PC+AC=4$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积的最小值为

A. $\dfrac{32\pi}{7}$　　B. $\dfrac{64\pi}{7}$　　C. $\dfrac{80\pi}{7}$　　D. $\dfrac{124\pi}{7}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 若 $a>0>b>c$，则

A. $\dfrac{a}{c}>\dfrac{a}{b}$

B. $b^{2a}>c^{2a}$

C. $\dfrac{a-b}{a-c}>\dfrac{b}{c}$

D. $a-c\geqslant 2\sqrt{(a-b)(b-c)}$

10. 若一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的平均数为 $\bar{x}(\bar{x}\neq 0)$，标准差为 s，另一组样本数据 $x_{11},x_{12},\cdots,x_{20}$ 的平均数为 $3\bar{x}$，标准差为 s。两组数据合成一组新数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10},x_{11},x_{12},\cdots,x_{20}$，新数据的平均数为 $\bar{y}$，标准差为 s'，则

A. $\bar{y}>2\bar{x}$

B. $\bar{y}=2\bar{x}$

C. $s'>s$

D. $s'=s$

11. 已知函数 $f(x)=2\sin^2 x-3\sin|x|+1$，则

A. $f(x)$ 是偶函数

B. $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 4 个零点

D. $f(x)$ 的值域是 $[0,6]$

12. 设直线 $l:y=kx+3(k\in\mathbf{R})$ 与圆 $C:x^2+y^2=4$，则下列结论正确的为

A. l 可能将 C 的周长平分

B. 若圆 C 上存在两个点到直线 l 的距离为 1，则 k 的取值范围为 $(-2\sqrt{2},0)\cup(0,2\sqrt{2})$

C. 若直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 2

D. 若直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点，则 AB 中点 M 的轨迹方程为 $x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知一个圆柱的轴截面为正方形，且它的侧面积为 16π，则该圆柱的体积为________。

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,\cos\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(1,\sin\alpha)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha+3}=$________。

15. 干支纪年是中国古代的一种纪年法. 分别排出十天干与十二地支如下：

天干：甲 乙 丙 丁 戊 己 庚 辛 壬 癸

地支：子 丑 寅 卯 辰 巳 午 未 申 酉 戌 亥

把天干与地支按以下方法依次配对：把第一个天干“甲”与第一个地支“子”配出“甲子”，把第二个天干“乙”与第二个地支“丑”配出“乙丑”，…，若天干用完，则再从第一个天干开始循环使用，若地支用完，则再从第一个地支开始循环使用. 已知 2023 年是癸卯年，则 13^5+2 年以后是__________年.

16. 已知 O 为坐标原点，F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，$|F_1F_2|=6$，P 是椭圆上异于顶点的一点，点 Q 是以 PF_2 为底的等腰 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆的圆心，过 F_1 作 $F_1M\perp PQ$ 于点 M，$|OM|=1$，则椭圆的离心率为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，现给出下列三个条件：① $3a_2+a_4=64$；② $S_5=100$；③ $S_7=5a_5+16$. 请你从这三个条件中任选两个解答下列问题.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=3$，$b_n-b_{n-1}=a_n(n\geq 2)$，设数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$\frac{1}{3}\leq T_n<\frac{1}{2}$.

注：如果选择多个条件分别进行解答，按第一个解答进行计分.

18.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 所对的边，且满足 $\tan A:\tan B:\tan C=1:2:3$.

（1）求角 A 的大小；

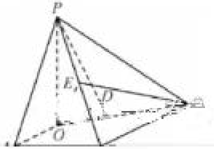
（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 6，求 b 的值.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形，$\triangle PAD$ 是正三角形，且平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=1$，O 为棱 AD 的中点，E 为棱 PB 的中点.

（1）求证：$OE\parallel$ 平面 PCD；

（2）若直线 PD 与平面 OCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{8}$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



18.（本小题满分 12 分）

在$\triangle ABC$中，a,b,c分别是角A,B,C所对的边，且满足$\tan A:\tan B:\tan C=1:2:3$.

(1)求角A的大小；

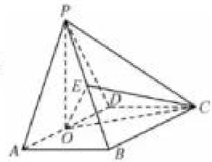
(2)若$\triangle ABC$的面积为 6，求b的值.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，四边形$ABCD$是矩形，$\triangle PAD$是正三角形，且平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$AB=1$，O为棱AD的中点，E为棱PB的中点.

(1)求证：$OE//$平面PCD；

(2)若直线PD与平面OCE所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{8}$，求四棱锥$P-ABCD$的体积.



20.（本小题满分 12 分）

现有甲、乙两名运动员争夺某项比赛的奖金，规定两名运动员谁先赢$k(k\geq 1,k\in\mathbf{N}^*)$局，谁便赢得全部奖金$a$元. 假设每局甲赢的概率为$p(0<p<1)$，乙赢的概率为$1-p$，且每场比赛相互独立. 在甲赢了$m(m<k)$局，乙赢了$n(n<k)$局时，比赛意外终止，奖金如何分配才合理？评委会给出的方案是：甲、乙按照比赛再继续进行下去各自赢得全部奖金的概率之比$P_{甲}:P_{乙}$分配奖金.

(1)若$k=3,m=2,n=1,p=\frac{3}{4}$，求$P_{甲}:P_{乙}$；

(2)记事件A为"比赛继续进行下去乙赢得全部奖金"，试求当$k=4,m=2,n=2$时比赛继续进行下去甲赢得全部奖金的概率$f(p)$，并判断当$\frac{6}{7}\leq p<1$时，事件A是否为小概率事件，并说明理由. 规定：若随机事件发生的概率小于 0.06，则称该随机事件为小概率事件.

21.(本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，C 的离心率为 2，直线 l 过 F_2 与 C 交于 M，N 两点，当 $|OM|=|OF_2|$ 时，$\triangle MF_1F_2$ 的面积为 3.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)已知 M，N 都在 C 的右支上，设 l 的斜率为 m.

①求实数 m 的取值范围；

②是否存在实数 m，使得 $\angle MON$ 为锐角？若存在，请求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^2+ax\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

(2)若 $a=1$，证明：$f(x)\geq x-e^{-x}$.