2021年全国高中数学联赛

贵州省预赛试题（A卷）（参考答案）

本试卷共15题，满分150分，考试时间150分钟

一、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $y=\sin x$ 与 $y=\log_{2021}|x|$ 的图像的交点个数是

A. 1284　　B. 1285　　C. 1286　　D. 1287

解：答案 C.

因为 $643\pi<2021<644\pi$，画出两个函数的图像可知，y 轴两侧的交点个数都是643，故共有1286个交点.

2. 已知集合 $M=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\leqslant 1\}$，集合 $N=\{(x,y)\,\big|\,x^2+y^2\leqslant|x|+|y|\}$，则

A. $M=N$　　B. $M\subseteq N$　　C. $N\subseteq M$　　D. 前三个都不正确

解：答案 B.

M 表示边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形的边界及其内部，N 表示直径为 $\sqrt{2}$ 的4个半圆的边界及其内部，画图可知 $M\subseteq N$.

3. 设 a，$b\in\mathbf{N}^*$，且满足 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{2021}$，则所有正整数对 (a,b) 的个数为

A. 2020　　B. 2021　　C. 3　　D. 4

解：答案 D.

由题意，得 $\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{2021}\Rightarrow 2021b-2021a-ab=0$，从而 $(2021-a)(2021+b)=2021^2$，

又 $2021^2=43^2\times47^2$，所以 $\begin{cases}2021-a=1,43,47,43^2,\\ 2021+b=2021^2,43\times47^2,43^2\times47,47^2.\end{cases}$ 共4对.

二、选择题：共2小题，每小题6分，共12分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，有选错的得0分，部分选对的得3分。

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则

A. 只存在有限个正整数 m，使得 a_m 与 a_{m+1} 互素

B. 至少存在一个正整数 m，使得 $a_{m+2}\cdot a_m=a_{m+1}^2$

C. 存在无穷多的正整数 p 和 q，使得 a_pa_q-1 为完全平方数

D. 存在无穷多的正整数对 (m,n)，使得 $a_m\left|(a_n^2+1)\right.$，且 $a_n\left|(a_m^2+1)\right.$

解：答案 CD.

由题意，$\{a_n\}$ 为斐波那契数列，其通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，

易证 $a_{m+2}\cdot a_m-a_{m+1}^2=(-1)^{m+1}$，故不可能存在正整数 m，使得 $a_{m+2}\cdot a_m=a_{m+1}^2$，B 错误.

设 $(a_m,a_{m+1})=d$，则 $d\left|a_m\right.$，且 $d\left|a_{m+1}\right.$，由 $a_{m+1}\cdot a_{m-1}-a_m^2=(-1)^m$ 可知，$d\left|(-1)^m\right.$，从而 $d=1$，所以 a_m 与 a_{m+1} 互素，即存在无穷多的正整数 m，使得 a_m 与 a_{m+1} 互素，故 A 错误.

易证 $a_{2n+3}a_{2n-1}-1=a_{2n+1}^2$，即 $a_{k+4}a_k-1=a_{k+2}^2$，故存在无穷多的正整数 $p=k$ 和 $q=k+4$，使得 a_pa_q-1 为完全平方数，C 正确.

因为 $a_{k+4}a_k-1=a_{k+2}^2$，即 $a_{k+2}^2+1=a_{k+4}a_k$，所以 $a_k\left|(a_{k+2}^2+1)\right.$；又因为 $a_k^2+1=a_{k+2}a_{k-2}$，所以 $a_{k+2}\left|(a_k^2+1)\right.$，故存在无穷多的正整数对 $(m,n)=(k,k+2)$，使得 $a_m\left|(a_n^2+1)\right.$，且 $a_n\left|(a_m^2+1)\right.$，D 正确.

5. 已知直线系 $L:\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1(a>b>0)$，则

A. 若 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}<1$，则 L 中存在直线与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 有两个不同的交点

B. 若 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}>1$，则 L 中直线围成的三角形的面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$

C. 若 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，则 L 中直线围成的三角形的面积的最大值为 $3\sqrt{3}ab$

D. 若 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，则 L 中直线可以围成正方形

解：答案 BD.

设点 $P(x_0,y_0)$，若 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}<1$，则 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内，其对应的极线 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 在椭圆外，故 L 中不存在直线与椭圆相交，A 错误.

若 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}>1$，则 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 外，其对应的极线 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 与椭圆相交，所以 L 中直线围成的三角形即是椭圆的内接三角形．下面用压缩变换求来椭圆内接三角形面积的最大值.

如图 1，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过压缩变换 $\begin{cases}x'=x,\\ y'=\dfrac{a}{b}y\end{cases}$ 得到的圆的方程为 $x'^2+y'^2=a^2$，则椭圆的内接△ ABC（面积为 S）对应圆的内接△ $A'B'C'$（面积为 S'）. 我们知道圆的内接三角形中，正

三角形的面积最大，易知 $x'^2+y'^2=a^2$ 的内接正三角形的面积为 $S'=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$，由压缩变换的性质知，

$\dfrac{S'}{S}=\dfrac{a}{b}$，故 $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$，B 正确.

若 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，则 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，其对应的极线 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 与椭圆相切，所以 L 中直线（称为椭圆的包络）围成的三角形即是椭圆的外切三角形. 下面用同样的压缩变换求来椭圆外切三角形面积的最大值.

如图 2，椭圆的外切△ABC（面积为 S）对应圆的外切△$A'B'C'$（面积为 S'）. 则由琴生不等式，得

$$S'=a^2(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta)=3a^2\left(\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta}{3}\right)$$

$$\geq 3a^2\tan\left(\frac{\alpha+\beta+\theta}{3}\right)=3\sqrt{3}a^2.$$

由压缩变换的性质知，$\dfrac{S'}{S}=\dfrac{a}{b}$，故 $S=3\sqrt{3}ab$，C 错误.

如图 3，当切线的斜率为 1 或 -1，且切线的交点在坐标轴上时，椭圆的外切四边形为正方形，D 正确.

顺便指出：椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的外切正方形即是圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$（称为“蒙日圆”）的内接正方形，故该正方形只有一个，其面积为 $2(a^2+b^2)$.

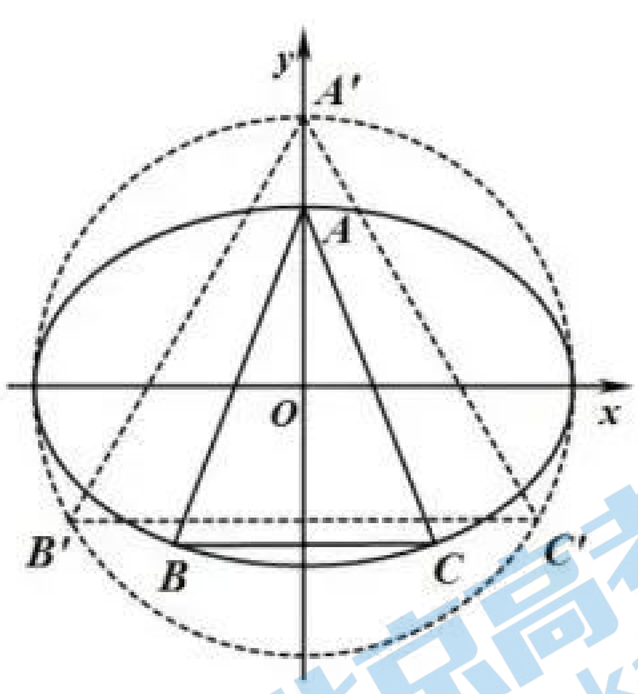

图 1

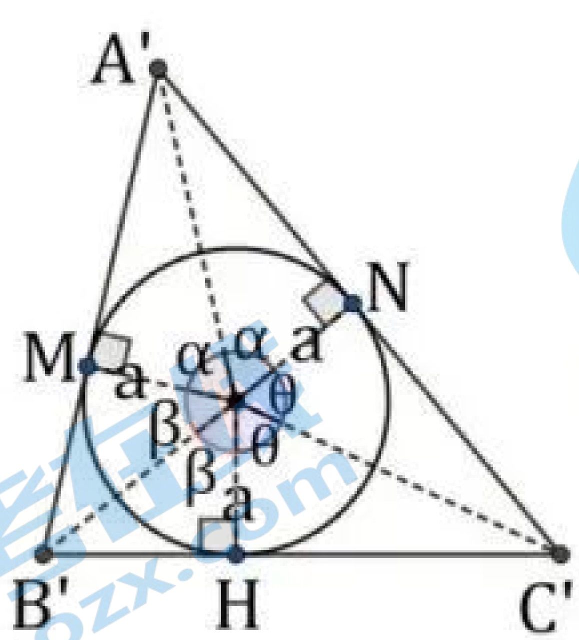

图 2

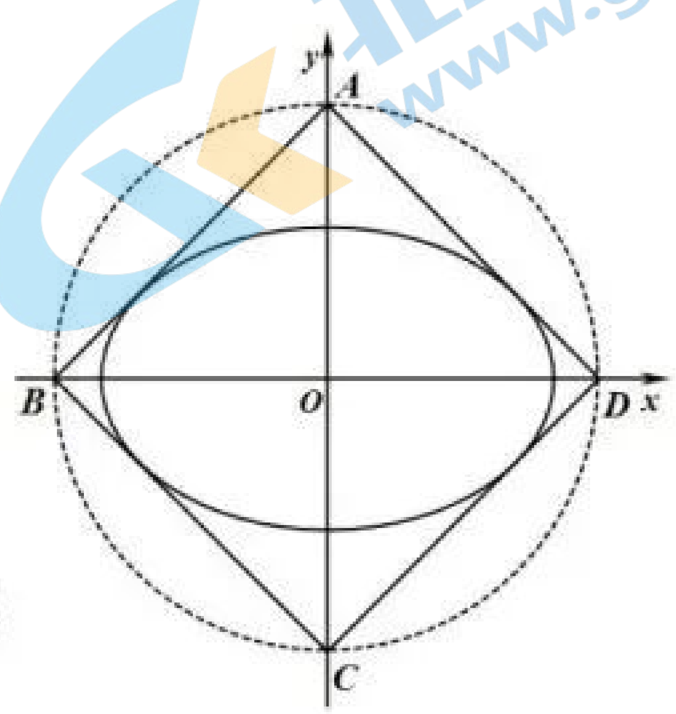

图 3

三、填空题：本题共 7 小题，每小题 10 分，共 70 分。

6. 方程 $x^3-9x^2+8x+2=0$ 有 3 个实根 p，q，r，则 $\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{r^2}=$______.

解：答案 25

由根与系数的关系，得 $p+q+r=9$，$pq+qr+rp=8$，$pqr=-2$，

所以 $\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{(pq+qr+rp)^2-2(p+q+r)pqr}{(pqr)^2}=\dfrac{8^2-2\times9\times(-2)}{(-2)^2}=25$.

7. 设 G 和 O 分别是△ ABC 的重心和外心，且 $AB=\sqrt{3}$， $AC=3$，则 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AO}=$____.

解：答案 2

因为 O 是△ ABC 的外心，故 O 在 AB 边上的投影为 AB 的中点，故

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AO}\right|\cos\angle BAO=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$，同理可得，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$，所以

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{6}(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2)=\dfrac{1}{6}(3+9)=2.$, , ,

8. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1=1$， E， F 分别为棱 CC_1， DD_1 的中点，则平面 AEF 截该正方体的外接球所得的截面的面积为______.

解：答案 $\dfrac{7\pi}{10}$

以 A 为原点， AB,AD,AA_1 分别 x,y,z 为轴，建立空间直角坐标系，则

$A(0,0,0),E(1,1,\dfrac{1}{2}),F(0,1,\dfrac{1}{2})$，则 $\overrightarrow{AE}=(1,1,\dfrac{1}{2})$， $\overrightarrow{AF}=(0,1,\dfrac{1}{2})$，

设平面 AEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{2}z=0,\\ y+\dfrac{1}{2}z=0.\end{cases}$

取 $\vec{n}=(0,1,-2)$，则球心 $O(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 到平面 AEF 的距离为 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{AO}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

设截面圆的半径为 r，因为正方体外接球的半径为 $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故

$r^2=R^2-d^2=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{20}=\dfrac{7}{10}$，所以截面的面积为 $\dfrac{7\pi}{10}$.

9.方程 $\sqrt{2x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+3x+7}$ 的解集为__________.

解：答案 $\{-1,-\dfrac{1}{2}\}$

设 $a=\sqrt{2x^2+x+3},b=\sqrt{x^2+x+1},c=\sqrt{5x^2+3x+7}$，则 $a+b=c$. 又

$2a^2+b^2=c^2=(a+b)^2\Rightarrow a^2=2ab\Rightarrow a=2b$，即

$2x^2+x+3=4(x^2+x+1)\Rightarrow 2x^2+3x+1=0\Rightarrow x=-1$或 $-\dfrac{1}{2}$.

故方程的解集为 $\{-1,-\dfrac{1}{2}\}$.

10.在斜△ ABC 中， $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\sin^2 B$，则 $\tan A\tan C=$__________.

解：答案 1 或 3

在△ABC中，$\cos B=-\cos(A+C)$.对条件式变形得

$$
\begin{aligned}
0&=\frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2C)+2\cos^2 B-1\\
&=\cos(A+C)\cos(A-C)+2\cos^2(A+C)\\
&=\cos(A+C)[\cos(A-C)+2\cos(A+C)]\\
&=(\cos A\cos C-\sin A\sin C)(3\cos A\cos C-\sin A\sin C)\\
&=(\cos A\cos C)^2(1-\tan A\tan C)(3-\tan A\tan C).
\end{aligned}
$$

而$\cos A\cos C\neq 0$，因此$\tan A\tan C=1$或3.

11.已知复数z满足$|z|=1$，则$|z^2-2z+3|$的最小值为__________.

解：答案$\frac{2}{3}\sqrt{6}$

因为$|z|=1$，所以$z\bar{z}=|z|^2=1$，所以

$$
\begin{aligned}
|z^2-2z+3|^2&=|z^2-2z+3||\bar{z}^2-2\bar{z}+3|\\
&=(z\bar{z})^2-2z^2\bar{z}+3z^2-2z\bar{z}^2+4z\bar{z}-6z+3\bar{z}^2-6\bar{z}+9\\
&=1-2z+3z^2-2\bar{z}+4-6z+3\bar{z}^2-6\bar{z}+9\\
&=14-8(z+\bar{z})+3(z^2+\bar{z}^2).
\end{aligned}
$$

由于$|z|=1$，设$z=\cos\theta+i\sin\theta$，则$\bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta$，所以

$z+\bar{z}=2\cos\theta$，$z^2+\bar{z}^2=4\cos^2\theta-2$，因此

$$|z^2-2z+3|^2=12\cos^2\theta-16\cos\theta+8=12(\cos\theta-\frac{2}{3})^2+\frac{8}{3}\leq\frac{8}{3},$$

当$\cos\theta=\frac{2}{3}$时，$|z^2-2z+3|$取得最小值$\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

12. 老师为学生购买纪念品，商店中有三种不同类型的纪念品（每种类型的纪念品完全相同），价格分别为1元、2元、4元. 李老师计划用101元，且每种纪念品至少购买一件， 则共有____________种不同的购买方案.

解：答案 600

令$y_1=x_1,y_2=2x_2,y_3=4x_3$，则

$y_1\in M_1=\{1,3,5,\cdots\},y_2\in M_2=\{2,4,6,\cdots\}$，$y_3\in M_3=\{4,8,12,\cdots\}$.

则问题转化为求方程$y_1+y_2+y_3=21$的正整数解的个数.

设所求为N，故N是

$$A(x)=(x+x^3+x^5+\cdots)(x^2+x^4+x^6+\cdots)(x^4+x^8+x^{12}+\cdots)$$

展开式中 x^{101} 的系数，而

$$A(x)=x(1-x^2)^{-1}\cdot x^2(1-x^2)^{-1}\cdot x^4(1-x^4)^{-1}$$

$$=x^7(1-x^2)^{-2}\cdot(1-x^4)^{-1}$$

$$=x^7(1+x^2)^2(1-x^4)^{-3}$$

$$=(x^7+2x^9+x^{11})\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+2}^{2}x^{4k}.$$

且 $7+4k=101$ 无整数解，$9+4k=101$ 的解为 $k=23$，$11+4k=101$ 无整数解，

所以 $N=2C_{23+2}^{2}=600$.

四、解答题：本大题共 3 小题，共 50 分.

13.（10 分）

已知数列 $\{x_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足 $x_n>1$，e 为自然对数的底数，记

$$A=x_1x_2\cdots x_n,\quad B=x_1+x_2+\cdots+x_n,\quad C=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}.$$

证明：$A^2<\mathrm{e}^{B-C}$.

证明： 因为

$$A^2<\mathrm{e}^{B-C}\Leftrightarrow 2\ln A<B-C$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x_1x_2\cdots x_n)<(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}).$$

令 $f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x(x>1)$，则 $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}>0$，

故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $f(x)>f(1)=0$，即 $2\ln x<x-\frac{1}{x}(x>1)$.

因为 $x_n>1$，所以 $2\ln x_n<x_n-\frac{1}{x_n}$.（*）

取 $n=1,2,3,\cdots,n$，不等式（*）两边相加，得

$$2\ln(x_1x_2\cdots x_n)<(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}),$$

因此 $A^2<\mathrm{e}^{B-C}$.

14.（20 分）

求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过顶点 $B(0,b)$ 的最长弦.

解： 设椭圆上任一点为 $P(x_0,y_0)$，由 $B(0,b)$，$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$a^2=b^2+c^2$，得

$$|PB|^2=x_0^2+(y_0-b)^2=a^2(1-\frac{y_0^2}{b^2})+(y_0-b)^2$$

$$=-\frac{c^2}{b^2}y_0^2-2by_0+a^2+b^2$$

$$=-\frac{c^2}{b^2}(y_0+\frac{b^3}{c^2})^2+\frac{b^4}{c^2}+a^2+b^2$$

$$=-\frac{c^2}{b^2}(y_0+\frac{b^3}{c^2})^2+\frac{a^4}{c^2}.$$

因为$-b\le y_0\le b$，

当$-\frac{b^3}{c^2}\le -b$，即$b^2\ge c^2$，即$a\le\sqrt{2}b$时，$|PB|_{\max}^2=0^2+(-b-b)^2=4b^2$，即$|PB|_{\max}=2b$.

当$-\frac{b^3}{c^2}>-b$，即$b^2<c^2$，即$a>\sqrt{2}b$时，$|PB|_{\max}^2=\frac{b^4}{c^2}+a^2+b^2=\frac{a^4}{c^2}$，即$|PB|_{\max}=\frac{a^2}{c}$.

综上，当$a\le\sqrt{2}b$时，最长弦为$2b$；当$a>\sqrt{2}b$时，最长弦为$\frac{a^2}{c}$.

15.（20 分）

设$a_1,a_2,\cdots,a_n$均为非负实数，证明：

$$\frac{a_1}{a_2^2+\cdots+a_n^2}+\frac{a_2}{a_1^2+a_3^2\cdots+a_n^2}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2}\ge\frac{4}{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

证明： 根据柯西不等式，得

$$\left(\frac{a_1}{a_2^2+\cdots+a_n^2}+\frac{a_2}{a_1^2+a_3^2\cdots+a_n^2}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2}\right)(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

$$\geqslant\left(\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2+\cdots+a_n^2}}+\sqrt{\frac{a_2^2}{a_1^2+a_3^2\cdots+a_n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{a_n^2}{a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2}}\right)^2.$$

于是，只需证明

$$\left(\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2+\cdots+a_n^2}}+\sqrt{\frac{a_2^2}{a_1^2+a_3^2\cdots+a_n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{a_n^2}{a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2}}\right)\ge 2.$$

根据均值不等式，有

$$\sqrt{\frac{a_2^2+\cdots+a_n^2}{a_1^2}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a_2^2+\cdots+a_n^2}{a_1^2}+1\right)=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{2a_1^2},$$

同理可得

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_3^2\cdots+a_n^2}{a_2^2}}\le\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{2a_2^2},$$

………………,

$$\sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2}{a_n^2}}\leqslant\frac{a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2}{2a_n^2}.$$

所以

$$\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2+\cdots+a_n^2}}+\sqrt{\frac{a_2^2}{a_1^2+a_3^2\cdots+a_n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{a_n^2}{a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2}}$$

$$\geqslant\frac{2a_1^2}{a_1^2+a_2^2\cdots+a_n^2}+\frac{2a_2^2}{a_1^2+a_2^2\cdots+a_n^2}+\cdots+\frac{2a_n^2}{a_1^2+a_2^2\cdots+a_n^2}$$

$$=2.$$

等号成立的条件：n 个数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 中，有两个相等，其余为 0.

故原不等式得证.