姓名__________________准考证号__________________

试题类型：A

秘密★启用前

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在试卷和答题卡指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案用0.5mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|(x-1)^2\geqslant 4\}$，$B=\{y\in\mathbf{Z}|-2\leqslant y\leqslant 2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1\}$　　B. $\{-2,-1,0,1,2\}$

C. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2, x\geqslant 3\}$　　D. $\{x|-2\leqslant x\leqslant -1\}$

2. 若复数 z 满足 $z+\bar{z}=2$，$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $z=$

A. 1+i　　B. $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$　　C. 1±i　　D. $1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

3. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为60°，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $3\sqrt{2}$

4. 十九世纪德国数学家狄利克雷提出了“狄利克雷函数” $D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\0, x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q},\end{cases}$ 它在现代数学的发展过程中有着重要意义.若函数 $f(x)=x^2-D(x)$，则下列实数不属于函数 $f(x)$ 值域的是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 22^{22} 除以5的余数是

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

6. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x(\omega>0)$，集合 $\{x\in(0,\pi)|f(x)=1\}$ 中恰有3个元素，则实数 ω 的取值范围是

A. $\left(\frac{3}{2},3\right]$　　B. $\left[\frac{3}{2},3\right]$　　C. $\left[\frac{7}{3},3\right]$　　D. $\left(\frac{7}{3},3\right]$

7. 一圆锥的高为4，该圆锥体积与其内切球体积之比为2∶1，则其内切球的半径是

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=x^a(x>0, a\neq 0)$，若存在直线 l，使 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，则实数 a 的取值范围是

A. $(1,+\infty)$　　B. $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$

C. $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)\cup(1,+\infty)$　　D. $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\cup(1,+\infty)$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 下列结论正确的是

A. $f(x)=\mathrm{e}^{\sin|x|}+\mathrm{e}^{|\sin x|}$ 是偶函数

B. 设 $x, y\in\mathbf{R}$，则“$x\geqslant 1$，且 $y\geqslant 1$”是“$x^2+y^2\geqslant 2$”的必要不充分条件

C. 若命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2ax+1<0$”是假命题，则 $-1\leqslant a\leqslant 1$

D. $\exists ab>0$，$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b-a}$

10. 树人中学2006班某科研小组，持续跟踪调查了他们班全体同学一学期中16周锻炼身体的时长，经过整理得到男生、女生各周锻炼身体的平均时长(单位：h)的数据如下：

男生：6.3，7.4，7.6，8.1，8.2，8.2，8.5，8.6，8.6，8.6，8.6，9.0，9.2，9.3，9.8，10.1

女生：5.1，5.6，6.0，6.3，6.5，6.8，7.2，7.3，7.5，7.7，8.1，8.2，8.4，8.6，9.2，9.4

以下判断中正确的是

A. 男生每周锻炼身体的平均时长的80%分位数是9.2

B. 女生每周锻炼身体的平均时长的平均值等于8

C. 男生每周锻炼身体的平均时长大于9h的概率的估计值为0.3125

D. 与男生相比，女生每周锻炼身体的平均时长波动性比较大

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\frac{1}{\sqrt{S_n}}-\sqrt{S_n}=\sqrt{a_n}$，下列结论正确的是

A. $S_n=\frac{1}{2-S_{n-1}}(n\geqslant 2)$　　B. $\left\{\frac{1}{S_n-1}\right\}$ 为等差数列

C. $a_n=\frac{n}{n+1}$　　D. $S_1^2S_3^2\cdots S_{2n-1}^2\geqslant\frac{1}{4n}$

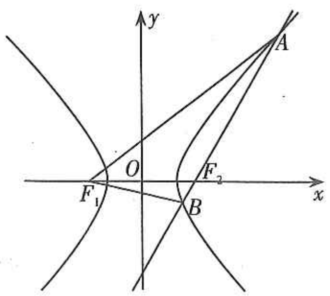
12. 如图，双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1，F_2，过右焦点 F_2 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 交双曲线 C 的右支于 A，B 两点，且 $\overrightarrow{AF_2}=7\overrightarrow{F_2B}$，则

A. 双曲线 C 的离心率为 $\frac{7}{3}$

B. $\triangle AF_1F_2$ 与 $\triangle BF_1F_2$ 面积之比为7∶1

C. $\triangle AF_1F_2$ 与 $\triangle BF_1F_2$ 周长之比为7∶2

D. $\triangle AF_1F_2$ 与 $\triangle BF_1F_2$ 内切圆半径之比为3∶1

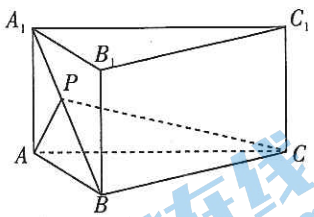


(第12题图)

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 一个袋子里装有4个红球3个白球3个蓝球，每次随机摸出1个球，摸出的球不再放回．则第一次摸到红球的概率是__▲__，第一次没有摸到红球且第二次摸到红球的概率是__▲__.（第一空2分，第二空3分）

14. $P(x,y)$为圆$C:(x-2)^2+(y-1)^2=5$上任意一点，且点P到直线$l_1:2x-y+4=0$和$l_2:2x-y+m=0$的距离之和与点P的位置无关，则m的取值范围是__▲__.



（第15题图）

15. 如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BC=2AA_1=2$，$AB=AC=\sqrt{3}$，P为线段A_1B上的一个动点，则$PA+PC$的最小值是__▲__.

16. 已知函数$f(x)$，$g(x)$定义域均为$\mathbf{R}$，且$f(x+1)=-\frac{1}{2}f(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}g(x)$，$g(x+1)=-\frac{1}{2}g(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}f(x)$，$f(x)=f(5-x)$，$g(365)=-\sqrt{3}$，则$\sum_{k=1}^{2023}f(k)=$__▲__.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

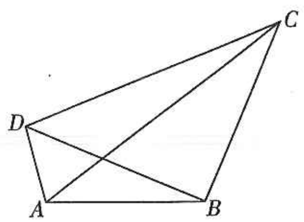
17.（10分）已知数列$\{a_n\}$是正项等比数列，且$a_4-a_1=7$，$a_2a_3=8$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）从下面两个条件中选择一个作为已知条件，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

①$b_n=(2n-1)a_n$；　　②$b_n=\frac{1}{(2n+1)\log_2 a_{2n}}$.

18.（12分）如图，四边形$ABCD$中，$AB=2AD=4$，$BD=BC$，$\angle DBC=\frac{\pi}{2}$，$\angle DAB=\theta$，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$.



（第18题图）

（1）求$\triangle ABD$的面积；

（2）求线段AC的长度．

19.（12分）某农科所对冬季大棚内的昼夜温差与某反季节大豆新品种发芽率之间的关系进行分析研究，记录了2023年1月1日至1月12日大棚内的昼夜温差与每天每100颗种子的发芽数，得到如下资料：

日期	1日	2日	3日	4日	5日	6日	7日	8日	9日	10日	11日	12日
温差x/℃	10	11	13	12	8	10	9	11	13	10	12	9
发芽数y/颗	21	24	28	28	15	22	17	22	30	18	27	18
$\sum_{i=1}^{12}x_i=128$；$\sum_{i=1}^{12}y_i=270$；$\sum_{i=1}^{12}x_iy_i=2965$；$\sum_{i=1}^{12}x_i^2=1394$.												

已知发芽数y与温差x之间线性相关．该农科所确定的研究方案是：先从这12组数据中选取2组，用剩下的10组数据求线性回归方程，再用被选取的2组数据进行检验．

（1）求选取的2组数据恰好是相邻2天的数据的概率；

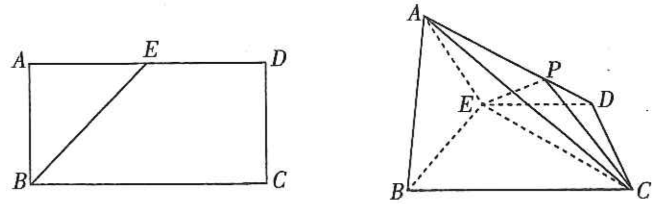
（2）若选取的是1日与6日的两组数据，试根据除这两日之外的其他数据，求出y关于x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$（精确到1）；

（3）若由线性回归方程得到的估计数据与所选取的检验数据的误差均不超过2颗，则认为求得的线性回归方程是可靠的，试问：（2）中所得的线性回归方程是否可靠．

参考公式：回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

20.（12分）如图①，在矩形$ABCD$中，$AD=2AB=2\sqrt{2}$，E为AD的中点．如图②，沿BE将$\triangle ABE$折起，点P在线段AD上．



①　　②

（第20题图）

（1）若$AP=2PD$，求证：$AB\parallel$平面PEC；

（2）若平面$ABE\perp$平面$BCDE$，是否存在点P，使得平面AEC与平面PEC的夹角为90°？若存在，求此时三棱锥$C-APE$的体积；若不存在，说明理由．

21.（12分）已知函数$f(x)=-\frac{(\ln x)^2}{2}+x+\ln x-1$，$g(x)=(x-1)e^x-\frac{ax^2}{2}+a^2$，$a<1$.

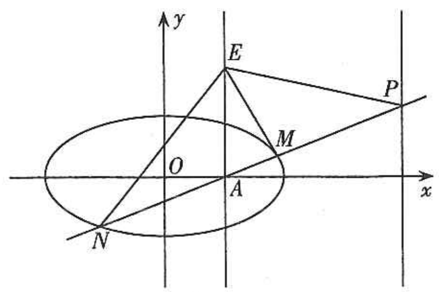
（1）判断$f(x)$的单调性；

（2）若$g(x)$有唯一零点，求a的取值范围．

22.（12分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<2)$，设过点$A(1,0)$的直线$l$交椭圆$C$于$M,N$两点，交直线$x=4$于点$P$，点$E$为直线$x=1$上不同于点$A$的任意一点．

（1）若$|AM|\geq 1$，求b的取值范围；

（2）若$b=1$，记直线EM,EN,EP的斜率分别为k_1，k_2,k_3，问是否存在k_1,k_2,k_3的某种排列k_{i_1},k_{i_2},k_{i_3}（其中$\{i_1,i_2,i_3\}=\{1,2,3\}$），使得$k_{i_1},k_{i_2},k_{i_3}$成等差数列或等比数列？若存在，写出结论，并加以证明；若不存在，说明理由．



（第22题图）