

2015 年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理）（北京卷）

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

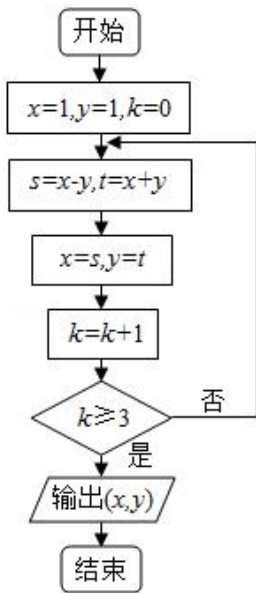
1. (5 分) 复数  $i(2-i) = ( \quad )$

- A.  $1+2i$                   B.  $1-2i$                   C.  $-1+2i$                   D.  $-1-2i$

2. (5 分) 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z=x+2y$  的最大值为 (  $\quad$  )

- A. 0                          B. 1                          C.  $\frac{3}{2}$                           D. 2

3. (5 分) 执行如图所示的程序框图输出的结果为 (  $\quad$  )

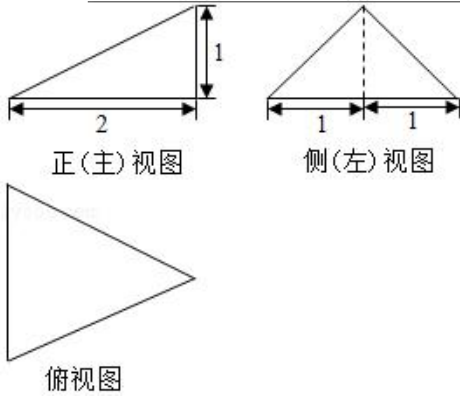


- A.  $(-2, 2)$                   B.  $(-4, 0)$                   C.  $(-4, -4)$                   D.  $(0, -8)$

4. (5 分) 设  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面,  $m$  是直线且  $m \subset \alpha$ , “ $m // \beta$ ” 是 “ $\alpha // \beta$ ” 的 (  $\quad$  )

- A. 充分而不必要条件                  B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件                          D. 既不充分也不必要条件

5. (5 分) 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的表面积是 (  $\quad$  )

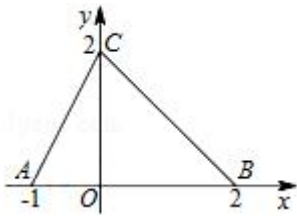


- A.  $2+\sqrt{5}$       B.  $4+\sqrt{5}$       C.  $2+2\sqrt{5}$       D. 5

6. (5分) 设  $\{a_n\}$  是等差数列, 下列结论中正确的是 ( )

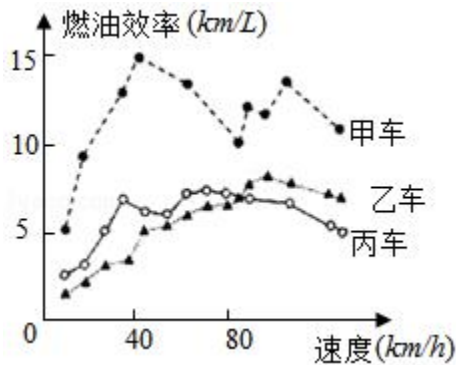
- A. 若  $a_1+a_2>0$ , 则  $a_2+a_3>0$   
 B. 若  $a_1+a_3<0$ , 则  $a_1+a_2<0$   
 C. 若  $0<a_1<a_2$ , 则  $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$   
 D. 若  $a_1<0$ , 则  $(a_2 - a_1) (a_2 - a_3) > 0$

7. (5分) 如图, 函数  $f(x)$  的图象为折线  $ACB$ , 则不等式  $f(x) \geq \log_2(x+1)$  的解集是 ( )



- A.  $\{x | -1 < x \leq 0\}$     B.  $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$     C.  $\{x | -1 < x \leq 1\}$     D.  $\{x | -1 < x \leq 2\}$

8. (5分) 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程, 如图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下燃油效率情况, 下列叙述中正确的是 ( )



- A. 消耗 1 升汽油, 乙车最多可行驶 5 千米

- B. 以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最多
- C. 某城市机动车最高限速 80 千米/小时，相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油
- D. 甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时，消耗 10 升汽油

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

9. (5 分) 在  $(2+x)^5$  的展开式中， $x^3$  的系数为\_\_\_\_\_（用数字作答）
10. (5 分) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  ( $a > 0$ ) 的一条渐近线为  $\sqrt{3}x + y = 0$ ，则  $a =$ \_\_\_\_\_.
11. (5 分) 在极坐标系中，点  $(2, \frac{\pi}{3})$  到直线  $\rho(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) = 6$  的距离为\_\_\_\_\_.
12. (5 分) 在  $\triangle ABC$  中， $a=4, b=5, c=6$ ，则  $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ \_\_\_\_\_.
13. (5 分) 在  $\triangle ABC$  中，点  $M, N$  满足  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$ ，若  $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，则  $x =$ \_\_\_\_\_,  $y =$ \_\_\_\_\_.
14. (5 分) 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1 \end{cases}$
- ①若  $a=1$ ，则  $f(x)$  的最小值为\_\_\_\_\_；
- ②若  $f(x)$  恰有 2 个零点，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

15. (13 分) 已知函数  $f(x) = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2}\sin\frac{2x}{2}$ .
- (I) 求  $f(x)$  的最小正周期；
- (II) 求  $f(x)$  在区间  $[-\pi, 0]$  上的最小值.
16. (13 分)  $A, B$  两组各有 7 位病人，他们服用某种药物后的康复时间（单位：天）记录如下：
- $A$  组：10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
- $B$  组：12, 13, 15, 16, 17, 14,  $a$
- 假设所有病人的康复时间相互独立，从  $A, B$  两组随机各选 1 人， $A$  组选出的人记为甲， $B$  组选出的人记为乙.
- (I) 求甲的康复时间不少于 14 天的概率；
- (II) 如果  $a=25$ ，求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率；

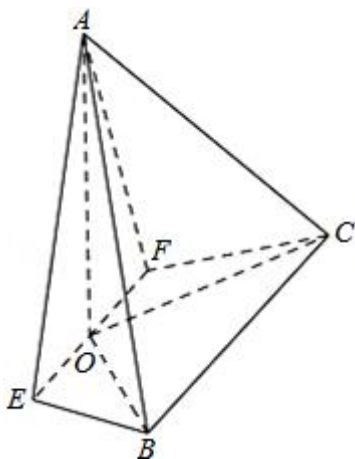
(III) 当  $a$  为何值时,  $A, B$  两组病人康复时间的方差相等? (结论不要求证明)

17. (14分) 如图, 在四棱锥  $A-EFCB$  中,  $\triangle AEF$  为等边三角形, 平面  $AEF \perp$  平面  $EFCB$ ,  $EF \parallel BC$ ,  $BC=4$ ,  $EF=2a$ ,  $\angle EBC = \angle FCB = 60^\circ$ ,  $O$  为  $EF$  的中点.

(I) 求证:  $AO \perp BE$ .

(II) 求二面角  $F-AE-B$  的余弦值;

(III) 若  $BE \perp$  平面  $AOC$ , 求  $a$  的值.



18. (13分) 已知函数  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,

(I) 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 求证, 当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) > 2(x + \frac{x^3}{3})$ ;

(III) 设实数  $k$  使得  $f(x) > k(x + \frac{x^3}{3})$  对  $x \in (0, 1)$  恒成立, 求  $k$  的最大值.

19. (14分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 点  $P(0, 1)$  和点  $A(m, n)$  ( $m \neq 0$ ) 都在椭圆  $C$  上, 直线  $PA$  交  $x$  轴于点  $M$ .

(I) 求椭圆  $C$  的方程, 并求点  $M$  的坐标 (用  $m, n$  表示);

(II) 设  $O$  为原点, 点  $B$  与点  $A$  关于  $x$  轴对称, 直线  $PB$  交  $x$  轴于点  $N$ , 问:  $y$  轴上是否存在点  $Q$ , 使得  $\angle OQM = \angle ONQ$ ? 若存在, 求点  $Q$  的坐标, 若不存在, 说明理由.

20. (13分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1 \leq 36$ , 且  $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18 \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 记集合  $M = \{a_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ .

(I) 若  $a_1=6$ , 写出集合  $M$  的所有元素;

(II) 如集合  $M$  存在一个元素是 3 的倍数, 证明:  $M$  的所有元素都是 3 的倍数;

(III) 求集合  $M$  的元素个数的最大值.

## 数学试题答案

### 一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 【分析】利用复数的运算法则解答.

【解答】解：原式  $= 2i - i^2 = 2i - (-1) = 1 + 2i$ ;

故选：A.

【点评】本题考查了复数的运算；关键是熟记运算法则. 注意  $i^2 = -1$ .

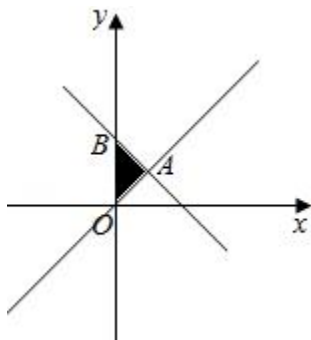
2. 【分析】作出题中不等式组表示的平面区域，再将目标函数  $z = x + 2y$  对应的直线进行平移，即可求出  $z$  取得最大值.

【解答】解：作出不等式组  $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$  表示的平面区域，

当  $l$  经过点  $B$  时，目标函数  $z$  达到最大值

$$\therefore z_{\text{最大值}} = 0 + 2 \times 1 = 2.$$

故选：D.



【点评】本题给出二元一次不等式组，求目标函数  $z = x + 2y$  的最大值，着重考查了二元一次不等式组表示的平面区域和简单的线性规划等知识，属于基础题.

3. 【分析】模拟程序框图的运行过程，即可得出程序运行后输出的结果.

【解答】解：模拟程序框图的运行过程，如下：

$$x = 1, y = 1,$$

$$k = 0 \text{ 时, } s = x - y = 0, t = x + y = 2;$$

$$x = s = 0, y = t = 2,$$

$k=1$  时,  $s=x-y=-2$ ,  $t=x+y=2$ ;

$x=s=-2$ ,  $y=t=2$ ,

$k=2$  时,  $s=x-y=-4$ ,  $t=x+y=0$ ;

$x=s=-4$ ,  $y=t=0$ ,

$k=3$  时, 循环终止,

输出  $(x, y)$  是  $(-4, 0)$ .

故选: B.

**【点评】** 本题考查了程序框图的应用问题, 解题时应模拟程序框图的运行过程, 是基础题目.

4. **【分析】**  $m//\beta$  并不得到  $\alpha//\beta$ , 根据面面平行的判定定理, 只有  $\alpha$  内的两相交直线都平行于  $\beta$ , 而  $\alpha//\beta$ , 并且  $m\subset\alpha$ , 显然能得到  $m//\beta$ , 这样即可找出正确选项.

**【解答】** 解:  $m\subset\alpha$ ,  $m//\beta$  得不到  $\alpha//\beta$ , 因为  $\alpha, \beta$  可能相交, 只要  $m$  和  $\alpha, \beta$  的交线平行即可得到  $m//\beta$ ;

$\alpha//\beta$ ,  $m\subset\alpha$ ,  $\therefore m$  和  $\beta$  没有公共点,  $\therefore m//\beta$ , 即  $\alpha//\beta$  能得到  $m//\beta$ ;

$\therefore$  “ $m//\beta$ ” 是 “ $\alpha//\beta$ ” 的必要不充分条件.

故选: B.

**【点评】** 考查线面平行的定义, 线面平行的判定定理, 面面平行的定义, 面面平行的判定定理, 以及充分条件、必要条件, 及必要不充分条件的概念.

5. **【分析】** 根据三视图可判断直观图为:  $OA\perp$  面  $ABC$ ,  $AC=AB$ ,  $E$  为  $BC$  中点,  $EA=2$ ,  $EA=EB=1$ ,  $OA=1$ ,  $\therefore BC\perp$  面  $AEO$ ,  $AC=\sqrt{5}$ ,  $OE=\sqrt{5}$

判断几何体的各个面的特点, 计算边长, 求解面积.

**【解答】** 解: 根据三视图可判断直观图为:

$OA\perp$  面  $ABC$ ,  $AC=AB$ ,  $E$  为  $BC$  中点,

$EA=2$ ,  $EC=EB=1$ ,  $OA=1$ ,

$\therefore$  可得  $AE\perp BC$ ,  $BC\perp OA$ ,

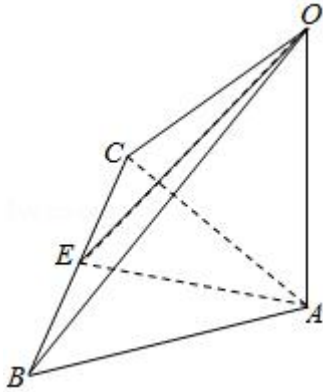
由直线与平面垂直的判定定理得:  $BC\perp$  面  $AEO$ ,  $AC=\sqrt{5}$ ,  $OE=\sqrt{5}$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$ ,  $S_{\triangle OAC}=S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times \sqrt{5}\times 1=\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

$$S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

故该三棱锥的表面积是  $2 + 2\sqrt{5}$ ,

故选: C.



**【点评】** 本题考查了空间几何体的三视图的运用, 空间想象能力, 计算能力, 关键是恢复直观图, 得出几何体的性质.

6. **【分析】** 对选项分别进行判断, 即可得出结论.

**【解答】** 解: 若  $a_1 + a_2 > 0$ , 则  $2a_1 + d > 0$ ,  $a_2 + a_3 = 2a_1 + 3d > 2d$ ,  $d > 0$  时, 结论成立, 即 A 不正确;

若  $a_1 + a_3 < 0$ , 则  $a_1 + a_2 = 2a_1 + d < 0$ ,  $a_2 + a_3 = 2a_1 + 3d < 2d$ ,  $d < 0$  时, 结论成立, 即 B 不正确;

$\{a_n\}$  是等差数列,  $0 < a_1 < a_2$ ,  $2a_2 = a_1 + a_3 > 2\sqrt{a_1 a_3}$ ,  $\therefore a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$ , 即 C 正确;

若  $a_1 < 0$ , 则  $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) = -d^2 \leq 0$ , 即 D 不正确.

故选: C.

**【点评】** 本题考查等差数列的通项, 考查学生的计算能力, 比较基础.

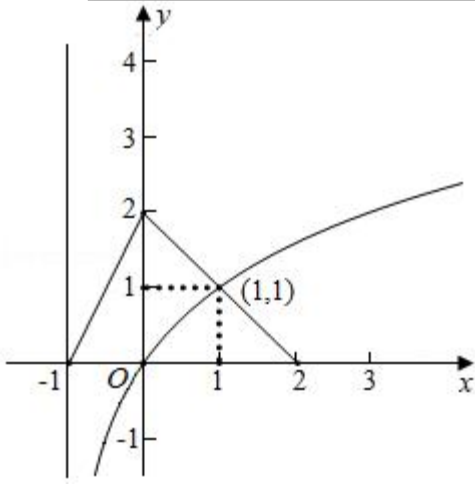
7. **【分析】** 在已知坐标系内作出  $y = \log_2(x+1)$  的图象, 利用数形结合得到不等式的解集.

**【解答】** 解: 由已知  $f(x)$  的图象, 在此坐标系内作出  $y = \log_2(x+1)$  的图象, 如图

满足不等式  $f(x) \geq \log_2(x+1)$  的  $x$  范围是  $-1 < x \leq 1$ ; 所以不等式  $f(x) \geq \log_2(x+1)$  的解集是  $\{x | -1 < x \leq 1\}$ ;

故选: C.





**【点评】** 本题考查了数形结合求不等式的解集；用到了图象的平移.

8. **【分析】** 根据函数图象的意义逐项分析各说法是否正确.

**【解答】** 解：对于 A，由图象可知当速度大于  $40\text{km/h}$  时，乙车的燃油效率大于  $5\text{km/L}$ ，

$\therefore$  当速度大于  $40\text{km/h}$  时，消耗 1 升汽油，乙车的行驶距离大于  $5\text{km}$ ，故 A 错误；

对于 B，由图象可知当速度相同时，甲车的燃油效率最高，即当速度相同时，消耗 1 升汽油，甲车的行驶路程最远，

$\therefore$  以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最少，故 B 错误；

对于 C，由图象可知当速度小于  $80\text{km/h}$  时，丙车的燃油效率大于乙车的燃油效率，

$\therefore$  用丙车比用乙车更省油，故 C 正确；

对于 D，由图象可知当速度为  $80\text{km/h}$  时，甲车的燃油效率为  $10\text{km/L}$ ，

即甲车行驶  $10\text{km}$  时，耗油 1 升，故行驶 1 小时，路程为  $80\text{km}$ ，燃油为 8 升，故 D 错误.

故选：C.

**【点评】** 本题考查了函数图象的意义，属于中档题.

## 二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

9. **【分析】** 写出二项式定理展开式的通项公式，利用  $x$  的指数为 3，求出  $r$ ，然后求解所求数值.

**【解答】** 解：  $(2+x)^5$  的展开式的通项公式为： $T_{r+1} = C_5^r 2^{5-r} x^r$ ，

所求  $x^3$  的系数为： $C_5^3 2^2 = 40$ .

故答案为：40.

**【点评】** 本题考查二项式定理的应用，二项式系数的求法，考查计算能力.

10. 【分析】运用双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{x}{a}$ ，结合条件可得  $\frac{1}{a} = \sqrt{3}$ ，即可得到  $a$  的值.

【解答】解：双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{x}{a}$ ，

由题意可得  $\frac{1}{a} = \sqrt{3}$ ，

解得  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

【点评】本题考查双曲线的方程和性质，主要考查双曲线的渐近线方程的求法，属于基础题.

11. 【分析】化为直角坐标，再利用点到直线的距离公式即可得出.

【解答】解：点  $P(2, \frac{\pi}{3})$  化为  $P(1, \sqrt{3})$ .

直线  $\rho(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) = 6$  化为  $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$ .

$\therefore$  点  $P$  到直线的距离  $d = \frac{|1 + 3 - 6|}{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}} = 1$ .

故答案为：1.

【点评】本题考查了极坐标化为直角坐标方程、点到直线的距离公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

12. 【分析】利用余弦定理求出  $\cos C$ ,  $\cos A$ ，即可得出结论.

【解答】解： $\because \triangle ABC$  中， $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6$ ,

$\therefore \cos C = \frac{16 + 25 - 36}{2 \times 4 \times 5} = \frac{1}{8}$ ,  $\cos A = \frac{25 + 36 - 16}{2 \times 5 \times 6} = \frac{3}{4}$

$\therefore \sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ ,  $\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ,

$\therefore \frac{\sin 2A}{\sin C} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{3}{4}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = 1$ .

故答案为：1.

【点评】本题考查余弦定理，考查学生的计算能力，比较基础.

13. 【分析】首先利用向量的三角形法则，将所求用向量  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  表示，然后利用平面向量基本定理得到  $x, y$  值.

【解答】解：由已知得到  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ ;

由平面向量基本定理，得到  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = -\frac{1}{6}$ ;

故答案为： $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{6}$ .

【点评】本题考查了平面向量基本定理的运用，一个向量用一组基底表示，存在唯一的实数对  $(x, y)$  使，向量等式成立.

14. 【分析】①分别求出分段的函数的最小值，即可得到函数的最小值；

②分别设  $h(x) = 2^x - a$ ,  $g(x) = 4(x-a)(x-2a)$ ，分两种情况讨论，即可求出  $a$  的范围.

【解答】解：①当  $a=1$  时， $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x < 1 \\ 4(x-1)(x-2), & x \geq 1 \end{cases}$

当  $x < 1$  时， $f(x) = 2^x - 1$  为增函数， $f(x) > -1$ ,

当  $x > 1$  时， $f(x) = 4(x-1)(x-2) = 4(x^2 - 3x + 2) = 4(x - \frac{3}{2})^2 - 1$ ,

当  $1 < x < \frac{3}{2}$  时，函数单调递减，当  $x > \frac{3}{2}$  时，函数单调递增，

故当  $x = \frac{3}{2}$  时， $f(x)_{min} = f(\frac{3}{2}) = -1$ ,

②设  $h(x) = 2^x - a$ ,  $g(x) = 4(x-a)(x-2a)$

若在  $x < 1$  时， $h(x)$  与  $x$  轴有一个交点，

所以  $a > 0$ ，并且当  $x=1$  时， $h(1) = 2 - a > 0$ ，所以  $0 < a < 2$ ，

而函数  $g(x) = 4(x-a)(x-2a)$  有一个交点，所以  $2a \geq 1$ ，且  $a < 1$ ，

所以  $\frac{1}{2} \leq a < 1$ ，

若函数  $h(x) = 2^x - a$  在  $x < 1$  时，与  $x$  轴没有交点，

则函数  $g(x) = 4(x-a)(x-2a)$  有两个交点，

当  $a \leq 0$  时， $h(x)$  与  $x$  轴无交点， $g(x)$  无交点，所以不满足题意（舍去），

当  $h(1) = 2 - a \leq 0$  时, 即  $a \geq 2$  时,  $g(x)$  的两个交点满足  $x_1 = a, x_2 = 2a$ , 都是满足题意的,

综上所述  $a$  的取值范围是  $\frac{1}{2} \leq a < 1$ , 或  $a \geq 2$ .

**【点评】** 本题考查了分段函数的问题, 以及函数的零点问题, 培养了学生的转化能力和运算能力以及分类能力, 属于中档题.

### 三、解答题 (共 6 小题, 共 80 分)

15. **【分析】** (I) 运用二倍角公式和两角和的正弦公式, 化简  $f(x)$ , 再由正弦函数的周期, 即可得到所求;

(II) 由  $x$  的范围, 可得  $x + \frac{\pi}{4}$  的范围, 再由正弦函数的图象和性质, 即可求得最小值.

**【解答】** 解: (I)  $f(x) = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \cos x)$$

$$= \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

则  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$ ;

(II) 由  $-\pi \leq x \leq 0$ , 可得

$$-\frac{3\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4},$$

$$\text{即有 } -1 \leq \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

则当  $x = -\frac{3\pi}{4}$  时,  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$  取得最小值  $-1$ ,

则有  $f(x)$  在区间  $[-\pi, 0]$  上的最小值为  $-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**【点评】** 本题考查二倍角公式和两角和的正弦公式, 同时考查正弦函数的周期和值域, 考查运算能力, 属于中档题.

16. **【分析】** 设事件  $A_i$  为“甲是  $A$  组的第  $i$  个人”, 事件  $B_i$  为“乙是  $B$  组的第  $i$  个人”, 由题意可知  $P(A_i) = P$

$$(B_i) = \frac{1}{7}, \quad i=1, 2, \dots, 7$$

(I) 事件等价于“甲是 A 组的第 5 或第 6 或第 7 个人”，由概率公式可得；

(II) 设事件“甲的康复时间比乙的康复时间长” $C=A_4B_1 \cup A_5B_1 \cup A_6B_1 \cup A_7B_1 \cup A_5B_2 \cup A_6B_2 \cup A_7B_2 \cup A_7B_3 \cup A_6B_6 \cup A_7B_6$ ，易得  $P(C) = 10P(A_4B_1)$ ，易得答案；

(III) 由方差的公式可得.

**【解答】**解：设事件  $A_i$  为“甲是 A 组的第  $i$  个人”，事件  $B_i$  为“乙是 B 组的第  $i$  个人”，

由题意可知  $P(A_i) = P(B_i) = \frac{1}{7}$ ,  $i=1, 2, \dots, 7$

(I) 事件“甲的康复时间不少于 14 天”等价于“甲是 A 组的第 5 或第 6 或第 7 个人”

$\therefore$  甲的康复时间不少于 14 天的概率  $P(A_5 \cup A_6 \cup A_7) = P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) = \frac{3}{7}$ ;

(II) 设事件  $C$  为“甲的康复时间比乙的康复时间长”，

则  $C=A_4B_1 \cup A_5B_1 \cup A_6B_1 \cup A_7B_1 \cup A_5B_2 \cup A_6B_2 \cup A_7B_2 \cup A_7B_3 \cup A_6B_6 \cup A_7B_6$ ,

$\therefore P(C) = P(A_4B_1) + P(A_5B_1) + P(A_6B_1) + P(A_7B_1) + P(A_5B_2) + P(A_6B_2) + P(A_7B_2) + P(A_7B_3) + P(A_6B_6) + P(A_7B_6)$

$= 10P(A_4B_1) = 10P(A_4)P(B_1) = \frac{10}{49}$

(III) 当  $a$  为 11 或 18 时，A, B 两组病人康复时间的方差相等.

**【点评】** 本题考查古典概型及其概率公式，涉及概率的加法公式和方差，属基础题.

17. **【分析】** (I) 根据线面垂直的性质定理即可证明  $AO \perp BE$ .

(II) 建立空间坐标系，利用向量法即可求二面角  $F-AE-B$  的余弦值；

(III) 利用线面垂直的性质，结合向量法即可求  $a$  的值

**【解答】** 证明：(I)  $\because \triangle AEF$  为等边三角形， $O$  为  $EF$  的中点，

$\therefore AO \perp EF$ ,

$\because$  平面  $AEF \perp$  平面  $EFCB$ ,  $AO \subset$  平面  $AEF$ ,

$\therefore AO \perp$  平面  $EFCB$

$\therefore AO \perp BE$ .

(II) 取  $BC$  的中点  $G$ , 连接  $OG$ ,

$\because EFCB$  是等腰梯形，

$\therefore OG \perp EF$ ,

由 (I) 知  $AO \perp$  平面  $EFCB$ ,

$\because OG \subset$  平面  $EFCB$ ,  $\therefore OA \perp OG$ ,

建立如图的空间坐标系,

则  $OE=a$ ,  $BG=2$ ,  $GH=a$ , ( $a \neq 2$ ),  $BH=2-a$ ,  $EH=BH \tan 60^\circ = \sqrt{3}(2-a)$ ,

则  $E(a, 0, 0)$ ,  $A(0, 0, \sqrt{3}a)$ ,  $B(2, \sqrt{3}(2-a), 0)$ ,

$\vec{EA} = (-a, 0, \sqrt{3}a)$ ,  $\vec{BE} = (a-2, -\sqrt{3}(2-a), 0)$ ,

设平面  $AEB$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BE} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -ax + \sqrt{3}az = 0 \\ (a-2)x + \sqrt{3}(a-2)y = 0 \end{cases},$$

令  $z=1$ , 则  $x=\sqrt{3}$ ,  $y=-1$ ,

即  $\vec{n} = (\sqrt{3}, -1, 1)$ ,

平面  $AEF$  的法向量为  $\vec{m} = (0, 1, 0)$ ,

$$\text{则 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

即二面角  $F-AE-B$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ;

(III) 若  $BE \perp$  平面  $AOC$ ,

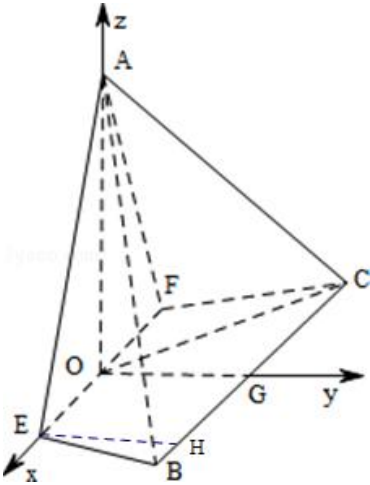
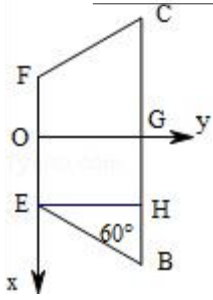
则  $BE \perp OC$ ,

即  $\vec{BE} \cdot \vec{OC} = 0$ ,

$\because \vec{BE} = (a-2, -\sqrt{3}(2-a), 0)$ ,  $\vec{OC} = (-2, \sqrt{3}(2-a), 0)$ ,

$\therefore \vec{BE} \cdot \vec{OC} = -2(a-2) - 3(a-2)^2 = 0$ ,

解得  $a = \frac{4}{3}$ .



**【点评】** 本题主要考查空间直线和平面垂直的判定以及二面角的求解，建立坐标系利用向量法是解决空间角的常用方法.

18. **【分析】** (1) 利用函数的导数求在曲线上某点处的切线方程.

(2) 构造新函数利用函数的单调性证明命题成立.

(3) 对  $k$  进行讨论，利用新函数的单调性求参数  $k$  的取值范围.

**【解答】** 解答：(1) 因为  $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$  所以

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}, \quad f'(0) = 2$$

又因为  $f(0) = 0$ ，所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y = 2x$ .

(2) 证明：令  $g(x) = f(x) - 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ ，则

$$g'(x) = f'(x) - 2(1+x^2) = \frac{2x^4}{1-x^2},$$

因为  $g'(x) > 0$  ( $0 < x < 1$ )，所以  $g(x)$  在区间  $(0, 1)$  上单调递增.

所以  $g(x) > g(0) = 0$ ， $x \in (0, 1)$ ，

即当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) > 2(x + \frac{x^3}{3})$ .

(3) 由 (2) 知, 当  $k \leq 2$  时,  $f(x) > k(x + \frac{x^3}{3})$  对  $x \in (0, 1)$  恒成立.

当  $k > 2$  时, 令  $h(x) = f(x) - k(x + \frac{x^3}{3})$ , 则

$$h'(x) = f'(x) - k(1+x^2) = \frac{kx^4 - (k-2)}{1-x^2},$$

所以当  $0 < x < \sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$  时,  $h'(x) < 0$ , 因此  $h(x)$  在区间  $(0, \sqrt[4]{\frac{k-2}{k}})$  上单调递减.

当  $0 < x < \sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$  时,  $h(x) < h(0) = 0$ , 即  $f(x) < k(x + \frac{x^3}{3})$ .

所以当  $k > 2$  时,  $f(x) > k(x + \frac{x^3}{3})$  并非对  $x \in (0, 1)$  恒成立.

综上所述,  $k$  的最大值为 2.

**【点评】** 本题主要考查切线方程的求法及新函数的单调性的求解证明. 在高考中属常考题型, 难度适中.

19. **【分析】** (I) 根据椭圆的几何性质得出  $\begin{cases} b=1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$  求解即可.

(II) 求解得出  $M(\frac{m}{1-n}, 0)$ ,  $N(\frac{m}{1+n}, 0)$ , 运用图形得出  $\tan \angle OQM = \tan \angle ONQ$ ,  $\frac{y_Q}{x_M} = \frac{x_Q}{y_Q}$ , 求解即可得出

即  $y_Q^2 = x_M \cdot x_N$ ,  $\frac{m^2}{2} + n^2$ , 根据  $m, n$  的关系整体求解.

**【解答】** 解: (I) 由题意得出  $\begin{cases} b=1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$

解得:  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$

$$\therefore \frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

$\therefore P(0, 1)$  和点  $A(m, n)$ ,  $-1 < n < 1$



∴ PA 的方程为:  $y - 1 = \frac{n-1}{m}x$ ,  $y=0$  时,  $x_M = \frac{m}{1-n}$

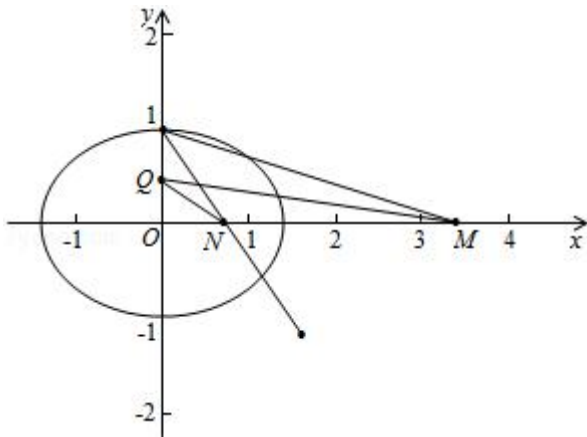
∴  $M(\frac{m}{1-n}, 0)$

(II) ∵ 点 B 与点 A 关于 x 轴对称, 点 A (m, n) (m≠0)

∴ 点 B (m, -n) (m≠0)

∵ 直线 PB 交 x 轴于点 N,

∴  $N(\frac{m}{1+n}, 0)$ ,



∵ 存在点 Q, 使得  $\angle OQM = \angle ONQ$ ,  $Q(0, y_Q)$ ,

∴  $\tan \angle OQM = \tan \angle ONQ$ ,

∴  $\frac{y_Q}{x_M} = \frac{x_N}{y_Q}$ , 即  $y_Q^2 = x_M \cdot x_N$ ,  $\frac{m^2}{2} + n^2 = 1$

$y_Q^2 = \frac{m^2}{1-n^2} = 2$ ,

∴  $y_Q = \pm \sqrt{2}$ ,

故 y 轴上存在点 Q, 使得  $\angle OQM = \angle ONQ$ ,  $Q(0, \sqrt{2})$  或  $Q(0, -\sqrt{2})$

**【点评】** 本题考查了直线圆锥曲线的方程, 位置关系, 数形结合的思想的运用, 运用代数的方法求解几何问题, 难度较大, 属于难题.

20. **【分析】** (I)  $a_1=6$ , 利用  $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18 \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases}$  可求得集合 M 的所有元素为 6, 12, 24;

(II) 因为集合  $M$  存在一个元素是 3 的倍数, 所以不妨设  $a_k$  是 3 的倍数, 由  $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18 \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases} (n=1, 2, \dots)$ , 可归纳证明对任意  $n \geq k$ ,  $a_n$  是 3 的倍数;

(III) 分  $a_1$  是 3 的倍数与  $a_1$  不是 3 的倍数讨论, 即可求得集合  $M$  的元素个数的最大值.

**【解答】**解: (I) 若  $a_1=6$ , 由于  $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18 \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases} (n=1, 2, \dots)$ ,  $M = \{a_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ .

故集合  $M$  的所有元素为 6, 12, 24;

(II) 因为集合  $M$  存在一个元素是 3 的倍数, 所以不妨设  $a_k$  是 3 的倍数, 由  $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18 \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases} (n=1, 2, \dots)$ , 可归纳证明对任意  $n \geq k$ ,  $a_n$  是 3 的倍数.

如果  $k=1$ ,  $M$  的所有元素都是 3 的倍数;

如果  $k>1$ , 因为  $a_k=2a_{k-1}$ , 或  $a_k=2a_{k-1}-36$ , 所以  $2a_{k-1}$  是 3 的倍数; 于是  $a_{k-1}$  是 3 的倍数;

类似可得,  $a_{k-2}, \dots, a_1$  都是 3 的倍数;

从而对任意  $n \geq 1$ ,  $a_n$  是 3 的倍数;

综上, 若集合  $M$  存在一个元素是 3 的倍数, 则集合  $M$  的所有元素都是 3 的倍数

(III) 对  $a_1 \leq 36$ ,  $a_n = \begin{cases} 2a_{n-1}, & a_{n-1} \leq 18 \\ 2a_{n-1} - 36, & a_{n-1} > 18 \end{cases} (n=1, 2, \dots)$ , 可归纳证明对任意  $n \geq k$ ,  $a_n < 36 (n=2, 3, \dots)$

因为  $a_1$  是正整数,  $a_2 = \begin{cases} 2a_1, & a_1 \leq 18 \\ 2a_1 - 36, & a_1 > 18 \end{cases}$ , 所以  $a_2$  是 2 的倍数.

从而当  $n \geq 2$  时,  $a_n$  是 2 的倍数.

如果  $a_1$  是 3 的倍数, 由 (II) 知, 对所有正整数  $n$ ,  $a_n$  是 3 的倍数.

因此当  $n \geq 3$  时,  $a_n \in \{12, 24, 36\}$ , 这时  $M$  的元素个数不超过 5.

如果  $a_1$  不是 3 的倍数, 由 (II) 知, 对所有正整数  $n$ ,  $a_n$  不是 3 的倍数.

因此当  $n \geq 3$  时,  $a_n \in \{4, 8, 16, 20, 28, 32\}$ , 这时  $M$  的元素个数不超过 8.

当  $a_1=1$  时,  $M = \{1, 2, 4, 8, 16, 20, 28, 32\}$ , 有 8 个元素.

综上所述, 集合  $M$  的元素个数的最大值为 8.

【点评】 本题考查数列递推关系的应用，突出考查分类讨论思想与等价转化思想及推理、运算能力，属于难题。