

2023 北京育才学校高一 3 月月考

数 学

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.）

1. $\sin 150^\circ$ 的值为（ ）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 若 $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha < 0$, 则角 α 的终边在

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

3. 函数 $y = \cos x$ 和 $y = \sin x$ 都是增函数的区间是（ ）

A. $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

B. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

C. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

D. $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$

4. 要得到函数 $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需要将函数 $y = \sin 4x$ 的图象

A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

5. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的长度分别为 4 和 3, 夹角为 120° , 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的值为（ ）

A. $6\sqrt{3}$

B. 6

C. -6

D. $-6\sqrt{3}$

6. 函数 $y = \cos 2x$ 的图象（ ）

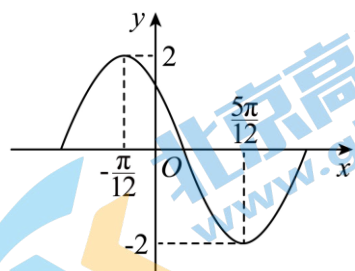
A. 关于直线 $x = -\frac{\pi}{2}$ 对称

B. 关于直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 对称

C. 关于直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 对称

D. 关于直线 $x = \frac{5\pi}{4}$ 对称

7. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 在一个周期内的图像如图，则此函数的解析式为（ ）



A. $y = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ B. $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ C. $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$ D. $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

8. 函数 $f(x) = 2\sin(\pi x)$ 的图象与直线 $y = x$ 的交点个数为 ()

A. 3 B. 2 C. 1 D. 4

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值为 -2 , 则 ω 的最小值是 ()

A. 6 B. $\frac{9}{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$

10. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有 4 条对称轴, 给出下列四个结论:

① $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 3 个不同的零点;

② $f(x)$ 的最小正周期可能是 $\frac{\pi}{2}$;

③ ω 的取值范围是 $\left[\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right)$;

④ $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{15}\right)$ 上单调递增.

其中所有正确结论的序号是 ()

A. ①④ B. ②③ C. ②④ D. ②③④

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.)

11. 扇形的半径为 4, 圆心角为 2 弧度, 则扇形的周长为_____, 面积为_____.

12. 已知角 α 终边上一点坐标为 $-1, 2$. 则 $\tan \alpha =$ _____; $\frac{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}{3\sin \alpha - 2\cos \alpha} =$ _____.

13. 函数 $y = \tan 2x$ 的定义域是_____, 最小正周期是_____.

14. 已知函数 $f(x)$ 的值域为 $[-3, 3]$, $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位后所得的函数图象与 $f(x)$ 的图象重合, 写出符合上述条件的一个函数 $f(x)$ 的解析式: _____.

15. 设函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A > 0, \omega > 0$). 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上具有

单调性, 且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -f\left(\frac{\pi}{12}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是_____.

三、解答题 (共 5 小题, 共 55 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.)

16. 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 及 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 的值.

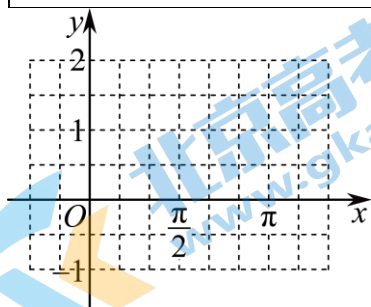
17. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值;

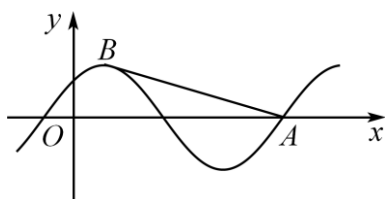
(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(3) 作出 $f(x)$ 在一个周期内的图象 (将给定的表格中填全, 并描点画图)

$2x + \frac{\pi}{6}$					
x					
$f(x)$					



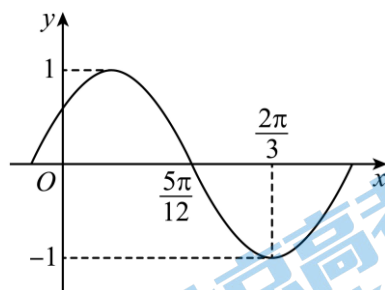
18. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$ 的部分图象如图所示.



(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间;

(2) 设点 B 是图象上的最高点, 点 A 是图象与 x 轴的交点, 求 $\tan \angle BAO$ 的值.

19. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}, A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 部分图象如图所示.



(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求曲线 $y = g(x)$ 的对称

轴只有一条落在区间 $[0, m]$ 上, 求 m 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

(1) 若 $f(x) = 0$, 求 x 的取值;

(2) 若对于任意 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 都有 $|f(x) - m| < 2$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.）

1. 【答案】C

【解析】

【分析】根据诱导公式及特殊三角函数值求解即可.

【详解】 $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

故选：C.

2. 【答案】D

【解析】

【详解】本题考查三角函数的性质.

由 $\cos \alpha > 0$ 知角 α 可能在第一、四象限；由 $\sin \alpha < 0$ 知角 α 可能在第三、四象限；

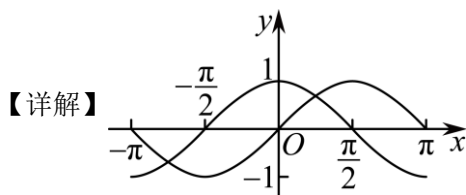
综上得角 α 的终边在第四象限

故正确答案为 D

3. 【答案】C

【解析】

【分析】根据正余弦函数图像即可求得结果.



函数 $y = \cos x$ 和 $y = \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图像如图所示，

则由图像可知 C 选项符合题意，

故选：C.

4. 【答案】B

【解析】

【详解】因为函数 $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[4\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\right]$ ，要得到函数 $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需要将函数

$y = \sin 4x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位.

本题选择 B 选项.

点睛：三角函数图象进行平移变换时注意提取 x 的系数，进行周期变换时，需要将 x 的系数变为原来的 ω 倍，要特别注意相位变换、周期变换的顺序，顺序不同，其变换量也不同.

5. 【答案】C

【解析】

【分析】根据向量的数量积运算即可求出结果.

【详解】由题意得 $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3$,

$$\text{则 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 4 \times 3 \times \cos 120^\circ = -6,$$

故选: C.

6. 【答案】A

【解析】

【分析】 $y = \cos 2x$ 的对称轴满足 $2x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 对比选项得到答案.

【详解】 $y = \cos 2x$ 的对称轴满足 $2x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

当 $k = -1$ 时, A 满足, 其他选项不满足.

故选: A

7. 【答案】A

【解析】

【分析】根据图中函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 在一个周期内的图像经过 $\left(-\frac{\pi}{12}, 2\right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{12}, -2\right)$, 可分析出函数的最值、周期, 求出 A, ω 后, 代入点求 φ , 即可得到函数解析式

【详解】函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 在一个周期内的图像如图, 观察选项, 不妨设 $A > 0, \omega > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$,

由函数图像可得, $A = 2, \frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2} = \frac{T}{2}, T = \pi = \frac{2\pi}{|\omega|}$, 又 $\omega > 0$, 故 $\omega = 2$,

则函数的解析式可化为 $y = 2\sin(2x + \varphi)$, 将点 $\left(-\frac{\pi}{12}, 2\right)$ 代入得 $-\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 即

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

又 $-\pi < \varphi < \pi$, 取 $k = 0$, 得 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 此时 $y = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

故选: A.

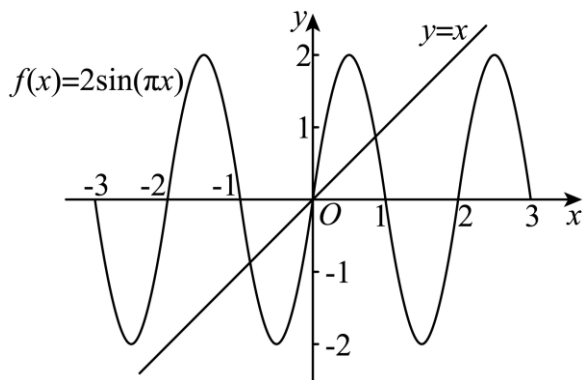
8. 【答案】A

【解析】

【分析】画出函数图像, 根据图像得到答案.

【详解】 $f(x) = 2\sin(\pi x)$ 的周期为 $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, 且 $f(x) = 2\sin(\pi x) \in [-2, 2]$,

画出函数 $f(x) = 2\sin(\pi x)$ 和 $y = x$ 的图像, 如图所示:



根据图像知有三个交点.

故选: A

9. 【答案】D

【解析】

【分析】根据题意求出 ωx 范围, 再根据正弦函数图像列出不等式即可求出结果.

【详解】因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$, 所以 $\omega x \in \left[-\frac{\pi}{3}\omega, \frac{\pi}{4}\omega\right]$,

则由题意可得 $-\frac{\pi}{3}\omega \leq -\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{4}\omega \geq \frac{3\pi}{2}$,

解得 $\omega \geq \frac{3}{2}$ 或 $\omega \geq 6$,

所以 $\omega \geq \frac{3}{2}$,

故选: D.

10. 【答案】B

【解析】

【分析】令 $\omega x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 则 $x = \frac{(1+4k)\pi}{4\omega}, k \in \mathbb{Z}$, 由函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有 4 条对称轴, 即 $0 \leq \frac{(1+4k)\pi}{4\omega} \leq \pi$ 有 4 个整数 k 符合, 可求出 $\omega \in \left[\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right)$ 判断③, 再利用三角函数的性质可依次判断①②④.

【详解】由函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$,

令 $\omega x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 则 $x = \frac{(1+4k)\pi}{4\omega}, k \in \mathbb{Z}$

函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有 4 条对称轴, 即 $0 \leq \frac{(1+4k)\pi}{4\omega} \leq \pi$ 有 4 个整数 k 符合,

由 $0 \leq \frac{(1+4k)\pi}{4\omega} \leq \pi$, 得 $0 \leq \frac{1+4k}{4\omega} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1+4k \leq 4\omega$, 则 $k = 0, 1, 2, 3$,

即 $1+4 \times 3 \leq 4\omega < 1+4 \times 4$, $\therefore \frac{13}{4} \leq \omega < \frac{17}{4}$, 故③正确;

对于①, $\because x \in (0, \pi)$, $\therefore \omega x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \omega\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, $\therefore \omega\pi + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right)$

当 $\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}\right)$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 3 个不同的零点;

当 $\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{2}\right)$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 4 个不同的零点; 故①错误;

对于②, 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 由 $\frac{13}{4} \leq \omega < \frac{17}{4}$, 则 $\frac{4}{17} < \frac{1}{\omega} \leq \frac{4}{13}$, $\therefore \frac{8\pi}{17} < T \leq \frac{8\pi}{13}$,

又 $\frac{\pi}{2} \in \left(\frac{8\pi}{17}, \frac{8\pi}{13}\right]$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期可能是 $\frac{\pi}{2}$, 故②正确;

对于④, $\because x \in \left(0, \frac{\pi}{15}\right)$, $\therefore \omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\omega\pi}{15} + \frac{\pi}{4}\right)$, 又 $\omega \in \left[\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right)$, $\therefore \frac{\omega\pi}{15} + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{7\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}\right)$

又 $\frac{8\pi}{15} > \frac{\pi}{2}$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{15}\right)$ 上不一定单调递增, 故④错误.

故正确结论的序号是: ②③

故选: B

【点睛】方法点睛: 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0)$ 的性质:

(1) $y_{\max} = A + B$, $y_{\min} = A - B$.

(2) 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

(3) 由 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 求对称轴, 由 $\omega x + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 求对称中心.

(4) 由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 求增区间; 由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 求减区间.

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.)

11. 【答案】 ①. 16 ②. 16

【解析】

【分析】直接根据扇形的周长和面积公式计算得到答案.

【详解】扇形的半径为 $r = 4$, 圆心角为 $\alpha = 2$ 弧度,

则扇形的周长为 $2r + r \cdot \alpha = 8 + 4 \times 2 = 16$, 面积为 $\frac{1}{2} \alpha r^2 = 16$.

故答案为: 16; 16

12. 【答案】 ①. -2 ②. $\frac{7}{8}$

【解析】

【分析】根据定义得到 $\tan \alpha = -2$ ，变换 $\frac{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}{3\sin \alpha - 2\cos \alpha} = \frac{2\tan \alpha - 3}{3\tan \alpha - 2}$ ，计算得到答案.

【详解】角 α 终边上一点坐标为 $-1, 2$ ，则 $\tan \alpha = \frac{2}{-1} = -2$ ；

$$\frac{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}{3\sin \alpha - 2\cos \alpha} = \frac{2\tan \alpha - 3}{3\tan \alpha - 2} = \frac{-4 - 3}{-6 - 2} = \frac{7}{8}.$$

故答案为： $-2; \frac{7}{8}$

13. 【答案】 ①. $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ②. $\frac{\pi}{2} \neq \frac{1}{2}\pi$

【解析】

【分析】定义域满足 $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得答案，再根据公式计算周期即可.

【详解】 $y = \tan 2x$ 定义域满足 $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，

故定义域为： $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ；

最小正周期是 $T = \frac{\pi}{2}$.

故答案为： $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}; \frac{\pi}{2}$

14. 【答案】 $f(x) = 3\sin(2\pi x)$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】根据题设 $f(x)$ 的周期为 1 及值域，由三角函数的性质写出一个解析式即可.

【详解】由题设， $f(x) = f(x-1)$ ，易知 $f(x)$ 的周期为 1，又值域为 $[-3, 3]$ ，

$\therefore f(x) = 3\sin(2\pi x)$ 符合题设要求.

故答案为： $f(x) = 3\sin(2\pi x)$.

15. 【答案】 $\frac{2\pi}{3} \neq \frac{2}{3}\pi$

【解析】

【分析】由 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上具有单调性，得函数最小正周期 $T \geq \frac{\pi}{3}$ ，从而可由

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 得出其一条对称轴方程和一个对称中心，然后可求得周期.

【详解】由于 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上具有单调性,

则 $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \leq \frac{1}{2}T$, 所以 $T \geq \frac{\pi}{3}$,

由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ 可知函数 $f(x)$ 的一条对称轴为 $x = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}}{2} = \frac{\pi}{3}$,

又 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f\left(\frac{\pi}{12}\right)$, 则 $f(x)$ 有对称中心 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$,

从而 $T = 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

故答案为: $\frac{2\pi}{3}$.

三、解答题 (共 5 小题, 共 55 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.)

16. 【答案】 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】由平方关系可以求出 $\cos \alpha$, 由商数关系可以求出 $\tan \alpha$, 由诱导公式可以求出 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

【详解】因为 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

则 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

由商数关系可得: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2}$,

由诱导公式可得: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

17. 【答案】 (1) 1 (2) $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$

(3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据特殊角的三角函数值可以求出结果;

(2) 利用正弦函数的单调性即可求出结果;

(3) 利用五点法作图可以作出 $f(x)$ 在一个周期内的图象.

【小问 1 详解】

因为 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 1$,

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为 1.

【小问 2 详解】

函数 $f(x)$ 的单调递增区间需要满足:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}),$$

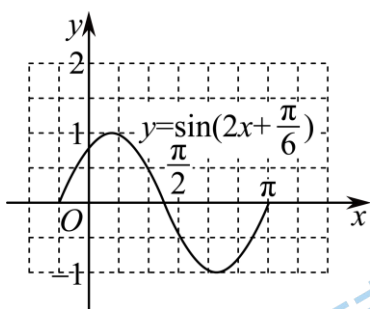
$$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}),$$

函数 $f(x)$ 的单调递增区间为: $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$.

【小问 3 详解】

$2x + \frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0

图像如下:



18. 【答案】(1) $T = 4\pi$; 单调减区间为 $\left[4k\pi + \frac{\pi}{2}, 4k\pi + \frac{5\pi}{2}\right], k \in \mathbb{Z}$

(2) $\frac{2}{3\pi}$

【解析】

【分析】(1) 根据公式得到周期, 单调减区间满足 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 解得答案.

(2) A, B 两点横坐标的差为 $\frac{3}{4}T = 3\pi$, $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值为 2, 得到正切值.

【小问 1 详解】

$f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$,

单调递减区间满足: $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $4k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq 4k\pi + \frac{5\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 故单调减区间为 $\left[4k\pi + \frac{\pi}{2}, 4k\pi + \frac{5\pi}{2}\right], k \in \mathbb{Z}$

【问 2 详解】

A, B 两点横坐标的差为 $\frac{3}{4}T = 3\pi$, $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值为 2,

故 $\tan \angle BAO = \frac{2}{3\pi}$

19. 【答案】(1) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

(2) $\frac{\pi}{3} \leq m < \frac{5\pi}{6}$

【解析】

【分析】(1) 由图象可知 $A=1$, 相邻的对称中心和对称轴距离相差 $\frac{T}{4}$, 再代入关键点可得解析式;

(2) 根据图象的变换得到 $y = g(x)$ 解析式, 求解函数 $y = g(x)$ 的对称轴, 由题意列不等式即可求解.

【小问 1 详解】

由图象可知 $y = f(x)$ 的最大值为 1, 最小值 -1, 故 $A=1$;

又 $\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4\omega}$ 且 $\omega > 0$, $\therefore \omega = 2$,

将点 $\left(\frac{2\pi}{3}, -1\right)$ 代入 $y = f(x)$ 得, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi\right) = -1$,

$\therefore \frac{4\pi}{3} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;

【小问 2 详解】

由 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

令 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 得 $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

$\therefore$ 曲线 $y = g(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

$\therefore$ 曲线 $y = g(x)$ 的对称轴只有一条落在区间 $[0, m]$ 上,

$\therefore \frac{\pi}{3} \leq m < \frac{5\pi}{6}$.

20. 【答案】(1) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 或 $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(2) $-1, 2$

【解析】

【分析】(1) 根据已知条件求得 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, 解方程即可;

(2) 根据 x 的范围求得 $f(x)$ 的范围, 只需 $m > f(x)_{\max} - 2$, 且 $m < f(x)_{\min} + 2$, 即可求解.

【小问 1 详解】

因为 $f(x) = 0$, 所以 $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$, 即 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$,

得 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, 或 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 或 $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

【小问 2 详解】

因为 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$,

所以 $0 \leq 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \leq 1$,

即 $f(x)$ 的值域是 $[0, 1]$.

$|f(x) - m| < 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 < m < f(x) + 2, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

所以 $m > f(x)_{\max} - 2$, 且 $m < f(x)_{\min} + 2$,

所以 $m > -1$, 且 $m < 2$ 即 m 的取值范围是 $-1, 2$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯