2024 届新高三摸底联考

数学试题

本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-5x+6<0\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid\sqrt{x}>1\}$,则 $A\cup B=$

A. $(2,+\infty)$　　B. $(2,3)$　　C. $(1,3)$　　D. $(1,+\infty)$

2. 已知 $z=|3i-4|i+\bar{z}$,则 z 的虚部为

A. $\frac{5}{2}$　　B. 5　　C. $\frac{5}{2}i$　　D. 5i

3. 已知 O 为△ABC 的重心,$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$,则 $\overrightarrow{AO}=$

A. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

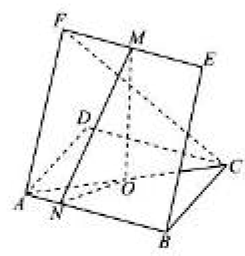
4. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}+1\right)^8$ 的展开式中的常数项为

A. 588　　B. 589　　C. 798　　D. 799

5. 如图,正方形 $ABCD$,$ABEF$ 的边长均为 2,动点 N 在线段 AB 上移动,M,O 分别为线段 EF,AC 中点,且 $MO\perp$平面 $ABCD$,则当$\angle MNO$ 取最大值时,异面直线 MN 与 FC 所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$



6. 中国古代钱币历史悠久，品种纷繁，多姿多彩，大多数是以铜合金形式铸造的，方孔钱是古代钱币最常见的一种，如图 1. 现有如图 2 所示某方孔钱中心方孔为正方形，M，N 为正方形的顶点，O 为圆心，A 为圆上的点，且 $\tan\angle MAO=\frac{1}{5}$，$MN\perp OA$，定义方孔钱金属面积比率$=\frac{\text{金属面积}}{\text{圆形面积}}\times100\%$，则该方孔钱金属面积比率约为（方孔钱厚度不计，$\pi\approx3$）

图1

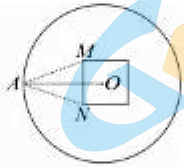


图2

A. 83.3%　　B. 88.9%　　C. 92.3%　　D. 96.3%

7. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{2a_n-1}{4a_n+2}$，且 $a_1=1$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 2 024 项的和 $S_{2\,024}=$

A. $-\frac{253}{6}$　　B. $-\frac{253}{8}$　　C. $-\frac{1\,771}{6}$　　D. $-\frac{1\,771}{8}$

8. 已知正数 a，b，$c\in(1,+\infty)$，满足 $\frac{2a-1}{a-1}=2+\log_2 a$，$\frac{3b-2}{b-1}=3+\log_3 b$，$\frac{4c-3}{c-1}=4+\log_4 c$，则下列不等式成立的是

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$　　C. $a<c<b$　　D. $c<a<b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 α，β 为两个不同的平面，m，n，l 为三条不同的直线，则下列结论中不一定成立的是

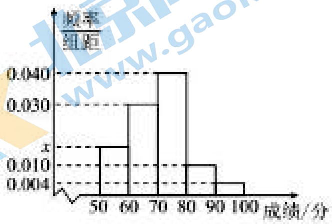
A. 若 $\alpha\perp\beta$，$l/\!/\alpha$，则 $l/\!/\beta$

B. 若 $l\perp\beta$，$l\perp\alpha$，则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $l\perp m$，$l\perp n$，且 $l\subset\alpha$，m，$n\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

D. 若 $l/\!/m$，$l/\!/n$，且 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

10. 在某市高二年级举行的一次体育统考中，共有 10 000 名考生参加考试. 为了解考生的成绩情况，随机抽取了 n 名考生的成绩，其成绩均在区间[50，100]，按照[50，60)，[60，70)，[70，80)，[80，90)，[90，100]分组作出如图所示的频率分布直方图. 若在样本中，成绩落在区间[50，60)的人数为 32，则



A. $n=100$

B. 考生成绩的中位数为 71

C. 考生成绩的第 70 百分位数为 75

D. 估计该市考生成绩的平均分为 70.6（每组数据以区间的中点值为代表）

11. 已知 O 为坐标原点，F 为抛物线 $E:y^2=2x$ 的焦点，过点 $P(2,0)$ 的直线交 E 于 A，B 两点，直线 AF，BF 分别交 E 于 C，D，则

A. E 的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$

B. $\angle AOB=90^\circ$

C. $|FA|+|FB|$ 的最小值为 4

D. $|AC|+2|BD|$ 的最小值为 $3+\frac{3\sqrt{66}}{4}$

12. 已知函数 $f(x)=ae^x-x^2+x\ln x-ax$，则

A. 当 $a=0$ 时，$f(x)$ 单调递减

B. 当 $a=1$ 时，$f(x)>0$

C. 若 $f(x)$ 有且仅有一个零点，则 $a\leqslant 1$

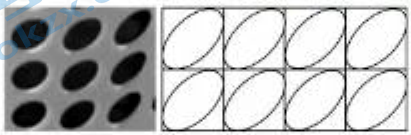
D. 若 $f(x)\geqslant 0$，则 $a\geqslant\frac{1}{e-1}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知直线 l: $4x-3y-4=0$，请写出一个满足以下条件的圆 M 的方程________.
①圆 M 与 x 轴相切；②圆 M 与直线 l 相切；③圆 M 的半径为 2.

14. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(-\pi<\varphi<0)$，设方程 $f(x)=\frac{1}{2}$ 最小的两个正根为 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$，若 $x_2=4x_1$，则 $\varphi=$________.

15. 椭圆与正方形是常见的几何图形，具有对称美感，受到设计师的青睐. 现有一工艺品，其图案如图所示：基本图形由正方形和内嵌其中的"斜椭圆"组成（"斜椭圆"和正方形的四边各恰有一个公共点）. 在平面直角坐标系 xOy 中，将标准椭圆绕着对称中心旋转一定角度，即得"斜椭圆" C: $x^2+y^2-xy=3$，则"斜椭圆"的离心率为________.



16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，M 为线段 B_1C 的中点，$AM\perp$ 平面 α，$D_1\in$ 平面 α，若点 P 为平面 α 与侧面 D_1DCC_1 相交的线段上的一动点，Q 为线段 BD 上一动点，则 $|PQ|$ 的最小值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

为增强学生体质，促进学生身心全面发展，某调研小组调查某中学男女生清晨跑操（晨跑）的情况，现随机对 80 名学生进行调研，得到的统计数据如下表所示：

	参加晨跑	不参加晨跑	合计
男生	32	8	40
女生	10	30	40
合计	42	38	80

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

(1) 分别求男生和女生中参加晨跑的概率；

(2) 依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，能否认为学生是否参加晨跑与性别有关.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2n+\frac{5}{3}$，且 $a_2=\frac{13}{3}$.

(1) 证明：数列 $\{a_n-3n+2\}$ 为等比数列，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

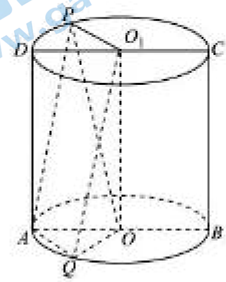
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

如图，O_1，O 分别是圆柱上、下底面圆的圆心，该圆柱的轴截面是边长为 2 的正方形 $ABCD$，P，Q 分别是其上、下底面圆周上的动点，已知 P，Q 位于轴截面 $ABCD$ 的异侧，且 $\angle AOQ=\angle DO_1P=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（1）当 A，P，O_1，Q 四点共面时，求 θ；

（2）当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，求二面角 $A-PO-O_1$ 的正弦值.

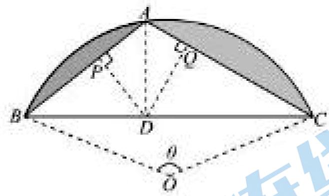


20.（本小题满分 12 分）

“特种兵式旅游”是年轻游客中兴起的一种新的旅游方式，即用尽可能少的时间、费用，游览尽可能多的景点. 某景点示意图如下：D 为景点入口，A、B、C 为景点出口，且 A、B、C 均在圆 O 上，阴影部分为草地，其中 P，Q 分别为 AB，AC 街道上的标志性建筑，且 $DP\perp AB$，$DQ\perp AC$. $D\to Q\to P\to D$ 为“特种兵”通道，已知 $DC=2BD$，$AD=1$，$\angle BAC=120^\circ$.

（1）若 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$，求 BC；

（2）记 $L=DQ+QP+PD$ 为“特种兵通道”的总长，求 L 的最大值.



21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=-\dfrac{\ln x+a+1}{x}$，函数 $g(x)=x(x+3)^2-3(x+1)^2e^x$.

（1）求 $g(x)$ 的单调区间；

（2）若 $\forall x_1\in[1,e]$，$\exists x_2\in[-3,0]$，使得 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 成立，求 a 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

已知 A，B 分别为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的左、右顶点，点 P 是直线 $x=1$ 上的动点，延长 AP，PB 分别与 C 交于点 M，N.

（1）若点 P 的纵坐标为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 M 的坐标；

（2）若 D 在直线 MN 上且满足 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，求 D 的轨迹方程.

2024 届新高三摸底联考

数学参考答案及解析

一、选择题

1. D 【解析】由 $x^2-5x+6<0$，解得 $2<x<3$，由 $\sqrt{x}>1$，解得 $x>1$，则 $A\cup B=(1,+\infty)$. 故选 D.

2. A 【解析】$|3\mathrm{i}-4|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，设 $z=a+b\mathrm{i}$，则 $a+b\mathrm{i}=5\mathrm{i}+a-b\mathrm{i}$，解得 $b=\frac{5}{2}$. 故选 A.

3. B 【解析】取 BC 的中点 M，则 $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，又因为 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. 故选 B.

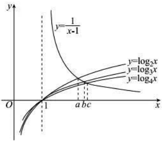
4. B 【解析】展开式中常数项为 $1+\mathrm{C}_8^2(\sqrt{x})^2\mathrm{C}_6^1\frac{1}{x}+\mathrm{C}_8^4(\sqrt{x})^4\mathrm{C}_4^2\left(\frac{1}{x}\right)^2=589$. 故选 B.

5. A 【解析】因为 $MO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $MO\perp ON$，当 ON 最小时，即 N 为 AB 中点时，$\angle MNO$ 取最大值，此时 $MN/\!/FA$，所以异面直线 MN 与 FC 所成的角为 $\angle AFC$（或补角），$FA=2$，$CA=2\sqrt{2}$，取 AD 的中点 G，则 $FG=MO=\sqrt{3}$，$FC=\sqrt{FG^2+CG^2}=2\sqrt{2}$，所以 $\triangle CAF$ 是等腰三角形，$\cos\angle AFC=\frac{\frac{1}{2}AF}{FC}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 故选 A.

6. D 【解析】OA 与 MN 交于点 P，$MN=a$，则 $PM=PO=\frac{a}{2}$，又因为 $\tan\angle MAO=\frac{PM}{PA}=\frac{1}{5}$，所以 $PA=\frac{5a}{2}$，$OA=PA+PO=3a$，所以方孔钱金属面积比率 $=\frac{\pi OA^2-a^2}{\pi OA^2}\times100\%=\frac{\pi(3a)^2-a^2}{\pi(3a)^2}\times100\%=\frac{a^2(9\pi-1)}{9\pi a^2}\times100\%\approx96.3\%$. 故选 D.

7. C 【解析】由题意知：$a_1=1$，$a_2=\frac{2-1}{4+2}=\frac{1}{6}$，$a_3=\frac{2\times\frac{1}{6}-1}{4\times\frac{1}{6}+2}=-\frac{1}{4}$，$a_4=\frac{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)-1}{4\times\left(-\frac{1}{4}\right)+2}=-\frac{3}{2}$，$a_5=\frac{2\times\left(-\frac{3}{2}\right)-1}{4\times\left(-\frac{3}{2}\right)+2}=1$，……，易知数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的数列，$S_{2024}=506\times\left(1+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1771}{6}$. 故选 C.

8. B 【解析】$\because\frac{2a-1}{a-1}=2+\log_2 a\Rightarrow\frac{1}{a-1}=\log_2 a$，$\frac{3b-2}{b-1}=3+\log_3 b\Rightarrow\frac{1}{b-1}=\log_3 b$，$\frac{4c-3}{c-1}=4+\log_4 c\Rightarrow\frac{1}{c-1}=\log_4 c$，$\therefore$ 考虑 $y=\frac{1}{x-1}$ 和 $y=\log_2 x$，$y=\log_3 x$，$y=\log_4 x$ 的图象的交点，根据图象可知：$a<b<c$. 故选 B.



二、选择题

9. ACD 【解析】当 $\alpha\perp\beta$，$l/\!/\alpha$ 时，$l/\!/\beta$ 或 $l\subset\beta$ 或 l 与 β 相交，故 A 错误；B 正确；若 $l\perp m$，$l\perp n$，且 $l\subset\alpha$，m，$n\subset\beta$，则 α 与 β 可能相交，可能平行，不一定垂直，故 C 错误；当 $\alpha\cap\beta=l$ 时，若 $l/\!/m$，$l/\!/n$，且 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，此时 $\alpha/\!/\beta$ 不成立，故 D 错误. 故选 ACD.

10. BD 【解析】对于 A，由频率分布直方图可得 $x=0.1-(0.03+0.04+0.01+0.004)=0.016$，则 $n=\frac{32}{0.16}=200$，故 A 错误；对于 B，考生成绩的中位数为 $70+\frac{(0.5-0.16-0.3)\times10}{0.4}=71$，故 B 正确；对于 C，考生成绩的第 70 百分位数为 $70+10\times\frac{0.70-0.46}{0.86-0.46}=76$，故 C 错误；对于 D，该市考生成绩的平均分为 $55\times0.16+65\times0.3+0.4\times75+0.1\times85+95\times0.04=70.6$，故 D 正确. 故选 BD.

11. ABD 【解析】对于 A，由题意 $p=1$，所以 E 的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$，故 A 正确；对于 B，设 $A\left(\frac{y_1^2}{2},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{2},y_2\right)$，设直线 AB：$x=my+2$，与抛物线联立可得 $y^2-2my-4=0$，$\Delta>0\Rightarrow m\in\mathbf{R}$，$y_1y_2=-4$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{y_1y_2}{4}(y_1y_2+4)=0$，所以 $\angle AOB=90^\circ$，故 B 正确；对于 C，$|FA|+|FB|=\frac{y_1^2+y_2^2}{2}+1\geqslant|y_1y_2|+1=5>4$，故 C 错误；对于 D，设直线 AC：$x=ty+\frac{1}{2}$，与抛物线联立可得 $y^2-2ty-1=0$，$\Delta>0\Rightarrow t\in\mathbf{R}$，$y_1y_C=-1$，同理 $y_2y_D=-1$，$|AC|=1+\frac{1}{2}\left(y_1^2+\frac{1}{y_1^2}\right)$，$|BD|=1+\frac{1}{2}\left(y_2^2+\frac{1}{y_2^2}\right)$，由 $y_1y_2=-4$，$|AC|+2|BD|=3+\frac{9}{16}y_1^2+\frac{33}{2y_1^2}\geqslant3+\frac{3\sqrt{66}}{4}$，当且仅当 $y_1^2=\frac{2\sqrt{66}}{3}$ 时等号成立，故 D 正确. 故选 ABD.

12. ABD 【解析】当 $a=0$ 时，$f(x)=x\ln x-x^2$，$f'(x)=1+\ln x-2x(x>0)$，设 $g(x)=1+\ln x-2x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x}$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)$ 取得最大值，因为 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+\ln\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}=-\ln 2<0$，所以 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，故 A 正确；当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+x\ln x-x^2-x=x(e^{x-\ln x}-(x-\ln x)-1)$，设 $t=m(x)=x-\ln x$，则 $m'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，当 $x=1$ 时，$m(x)$ 取得最小值，$m(1)=1$，所以 $t=m(x)\geqslant1$. 设 $h(t)=e^t-t-1$，$h'(t)=e^t-1$，因为 $t\geqslant1$，所以 $h'(t)=e^t-1\geqslant e-1>0$，$h(t)$ 单调递增，所以 $h(t)\geqslant h(1)=e-2>0$，所以 $f(x)=e^x+x\ln x-x^2-x=x(e^{x-\ln x}-(x-\ln x)-1)=xh[m(x)]>0$，故 B 正确；$f(x)=x(ae^{x-\ln x}-(x-\ln x)-a)$，若 $f(x)=0$，则 $ae^{x-\ln x}-(x-\ln x)-a=0$. 设 $t=m(x)=x-\ln x\geqslant1$，即 $a=\frac{t}{e^t-1}$，设 $F(t)=\frac{t}{e^t-1}$，则 $F'(t)=\frac{(1-t)e^t-1}{(e^t-1)^2}$，因为 $t\geqslant1$，所以 $(1-t)e^t-1<0$，$F'(t)<0$，$F(t)$ 单调递减，若 $f(x)$ 有且仅有一个零点，则

$t=1$，此时 $a=\frac{1}{e-1}$，故 C 错误；若 $f(x)\geqslant 0$，则 $ae^t-t-a\geqslant 0$，即 $a\geqslant\frac{t}{e^t-1}=F(t)$，因为 $F(t)$ 单调递减，所以 $a\geqslant F(1)=\frac{1}{e-1}$，故 D 正确. 故选 ABD.

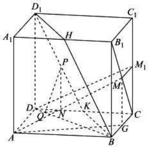
三、填空题

13. $x^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x-5)^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 或 $(x+3)^2+(y+2)^2=4$（写出其中的一个即可） **【解析】** 当圆心为 $M(a,2)$ 时，圆 M 与直线 l 相切，即 $\frac{|4a-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$，解得 $a=0$ 或 $a=5$. 当圆心为 $M(a,-2)$ 时，圆 M 与直线 l 相切，即 $\frac{|4a+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$，解得 $a=2$ 或 $a=-3$. 所以圆的方程为 $x^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x-5)^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 或 $(x+3)^2+(y+2)^2=4$. 故答案为 $x^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x-5)^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 或 $(x+3)^2+(y+2)^2=4$（写出其中的一个即可）.

14. $-\frac{\pi}{18}$ **【解析】** 令 $f(x)=\sin(2x+\varphi)=\frac{1}{2}$，当 $x>0$ 时，$2x+\varphi>\varphi$，所以 $2x_1+\varphi=\frac{\pi}{6}$，$2x_2+\varphi=\frac{5\pi}{6}$，解得 $x_1=\frac{\pi}{12}-\frac{\varphi}{2}$，$x_2=\frac{5\pi}{12}-\frac{\varphi}{2}$，又 $x_2=4x_1$，所以 $\frac{5\pi}{12}-\frac{\varphi}{2}=4\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\varphi}{2}\right)$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{18}$. 故答案为 $-\frac{\pi}{18}$.

15. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **【解析】**“斜椭圆”的中心为坐标原点，所以长半轴的长度为曲线上的点到原点距离最大值，短半轴的长度为曲线上的点到原点距离最小值，由基本不等式 $|xy|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，即 $-\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $-\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant xy=x^2+y^2-3\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，解得 $2\leqslant x^2+y^2\leqslant 6$，当 $x=y=\pm\sqrt{3}$ 时，$x^2+y^2=6$ 成立，$x=-y=\pm 1$ 时，$x^2+y^2=2$ 成立. 所以椭圆的长半轴长为 $\sqrt{6}$，短半轴长为 $\sqrt{2}$，所以椭圆的离心率为 $\sqrt{1-\frac{2}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故答案为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

16. $\frac{1}{3}$ **【解析】** 如图所示，取 CC_1 的中点 M_1，CD 的中点 K，A_1B_1 的中点 H，BC 的中点 G，连接 D_1K，BK，D_1H，HB，AG，MG，则 $\angle M_1DC=\angle DD_1K$，所以 $\angle DD_1K+\angle D_1DM_1=\angle M_1DC+\angle D_1DM_1=90^\circ$，所以 $D_1K\perp DM_1$，同理可得 $BK\perp AG$，又 $AD\perp D_1K$，因为 $AD/\!/MM_1$，所以 A,D,M_1,M 四点共面. 又因为 $D_1K\perp AD$，$AD\cap DM_1=D$，所以 $D_1K\perp$ 平面 ADM_1M，所以 $D_1K\perp AM$. 因为 $BK\perp AG$，$BK\perp MG$，$AG\cap MG=G$，所以 $BK\perp$ 平面 AMG，所以 $BK\perp AM$，$D_1K\cap BK=K$，所以 $AM\perp$ 平面 D_1KBH，所以平面 D_1KBH 即为 α，D_1K 为 α 与平面 D_1DCC_1 的交线，在 D_1K 上取一点 P，过 P 作 $PN\perp CD$ 于 N，过 N 作 $NQ\perp BD$ 于 Q，设 $PN=x$，$x\in[0,1]$，则 $DN=\frac{1-x}{2}$，$NQ=\frac{1-x}{2\sqrt{2}}$，$|PQ|^2=|PN|^2+|NQ|^2=x^2+\frac{(1-x)^2}{8}=\frac{9}{8}\left(x-\frac{1}{9}\right)^2+\frac{1}{9}\geqslant\frac{1}{9}$，当且仅当 $x=\frac{1}{9}$ 时等号成立，所以 $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$. 故答案为 $\frac{1}{3}$.



四、解答题

17. **解**：(1)由题意可得，男生中参加晨跑的概率为 $P=\frac{32}{40}=\frac{4}{5}$，女生中参加晨跑的概率为 $P=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$.

(4分)

(2)零假设为 H_0：学生是否参加晨跑与性别无关.

$\chi^2=\frac{80\times(32\times30-10\times8)^2}{42\times38\times40\times40}=\frac{11\times880}{399}\approx24.261>7.879$，(8分)

依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，故可认为学生是否参加晨跑与性别有关.

(10分)

18. **证明**：(1)因为 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2n+\frac{5}{3}$，

所以 $\frac{a_{n+1}-3(n+1)+2}{a_n-3n+2}=\frac{\frac{1}{3}a_n+2n+\frac{5}{3}-3n-3+2}{a_n-3n+2}$

$=\frac{\frac{1}{3}(a_n-3n+2)}{a_n-3n+2}=\frac{1}{3}$.　　(2分)

当 $n=1$ 时，$a_2=\frac{1}{3}a_1+2+\frac{5}{3}=\frac{13}{3}$，所以 $a_1=2$，$a_1-3+2=1$，故 $\{a_n-3n+2\}$ 是首项为1，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列，所以 $a_n-3n+2=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3n-2$.　　(5分)

(2)由(1)知 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3n-2$，

$T_n=\left(\frac{1}{3}\right)^0+1+\left(\frac{1}{3}\right)^1+4+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3n-2$

$=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]+(1+4+\cdots+3n-2)=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}+\frac{(1+3n-2)\times n}{2}$

$=-\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$.　　(12分)

19. **解**：(1)连接 O_1A，因为平面 O_1PD∥平面 OAQ，且平面 $O_1PD\cap$ 平面 $AQO_1P=PO_1$，

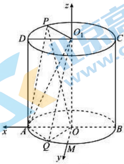
平面 $OAQ\cap$ 平面 $AQO_1P=AQ$，所以 $PO_1\parallel AQ$.

(2分)

又 $DO_1\parallel AO$，所以 $\angle PO_1D=\angle QAO=\angle AOQ=\theta$，

所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.　　(4分)

(2)如图，作 $\overset{\frown}{AQB}$ 的中点 M，分别以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OO_1}$ 为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，



易知 $A(1,0,0)$，$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$，$O_1(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$，$\overrightarrow{OO_1}=(0,0,2)$，　　(6分)

设平面 POO_1 的法向量为 $m=(x_1,y_1,z_1)$，

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。