参考答案及解析

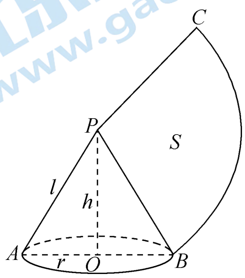
2023—2024 学年度上学期高三年级四调考试·数学

一、选择题

1. A 【解析】因为集合 $A=\{x\mid -1<x<1\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x<1\}$.

2. D 【解析】由于直线 $l_1: ax+y-3=0$ 和直线 $l_2: 3x-2y+3=0$ 垂直，故 $3a-2=0$，解得 $a=\frac{2}{3}$.

3. B 【解析】已知圆锥的底面半径 $r=2$，高 $h=4\sqrt{2}$，则母线长 $l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$. 圆锥的侧面展开图为扇形，且扇形的弧长为圆锥底面圆周长 $2\pi r$，扇形的半径为圆锥的母线长为 l，所以圆锥的侧面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\pi rl=\pi rl=2\times 6\pi=12\pi$.



4. B 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x(1+x)$，所以 $f(-1)=-f(1)=-2$.

5. B 【解析】因为 α 是第一象限角，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos 2\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\cos^2\alpha-1-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\times\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2-1-\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=-\frac{7}{5}$.

6. A 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $a_1>0$，$q>0$，由题意可得 $\begin{cases}a_1a_3=a_2^2=16,\\ S_1+\frac{1}{2}S_3=\frac{3}{2}S_2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a_2=4,\\ a_1+\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)=\frac{3}{2}(a_1+a_2),\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}a_2=4,\\ a_3=2a_2=8,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a_1q=4,\\ a_1q^2=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\ q=2,\end{cases}$ 所以 $S_6=\frac{2\times(1-2^6)}{1-2}=126$.

7. A 【解析】因为直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，所以令 $x=0$，得 $y=-2$，令 $y=0$，得 $x=-2$，所以 $A(-2,0)$，$B(0,-2)$，$|AB|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$. 点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离为 $\triangle ABP$ 的高 h，圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 的圆心为 $(2,0)$，半径为 $\sqrt{2}$，圆心到直线的距离为 $d=\frac{|2+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$，所以点 P 到直线的距离 h 的最大值为 $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，最小值为 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$，则 $\triangle ABP$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times|AB|\times h$，最大值为 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6$，最小值为 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$. 所以 $\triangle ABP$ 面积的取值范围为 $[2,6]$.

8. D 【解析】令 $x=0.01$，则 $a=2\ln(1-x)=\ln(1-2x+x^2)$，$b=\ln(1-2x)$，显然 $a>b$. 令 $x=0.02$，则 $b=\ln(1-x)$，$c=\sqrt{1-2x}-1$，令 $f(x)=b-c$，则 $f(x)=\ln(1-x)-\sqrt{1-2x}+1\left(x<\frac{1}{2}\right)$，$f'(x)=\frac{1-x-\sqrt{1-2x}}{(1-x)\sqrt{1-2x}}$. 因为 $(1-x)^2=1-2x+x^2>1-2x$，所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)>f(0)=0$，即 $b>c$，综上，$a>b>c$.

二、选择题

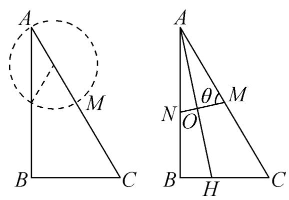
9. CD 【解析】当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-2n+8$，又 $a_1=S_1=6$ 适合上式，所以 $a_n=-2n+8$，则 $\{a_n\}$ 是递减数列，故 A 错误；$a_{10}=-12$，故 B 错误；当 $n>4$ 时，$a_n=8-2n<0$，故 C 正确；因为 $S_n=-n^2+7n$ 的对称轴为 $n=\frac{7}{2}$，开口向下，而 n 是正整数，且 $n=3$ 或 4 距离对称轴一样远，所以当 $n=3$ 或 4 时，S_n 取得最大值，故 D 正确.

10. ACD 【解析】由题得 $f'(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$，则 $f'(2)=-e^2<0$，故 A 错误；当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 的极大值即最大值为 $f(1)=e$，故 B 正确，C 错误；令 $g(x)=f(x)-a$，则 $g'(x)=(1-x)e^x$，由 B 知 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 的极大值为 $g(1)=e-a$，且当 x 趋向于 $-\infty$ 时，$g(x)$ 趋向于 $-a$，当 x 趋向于 $+\infty$ 时，$g(x)$ 趋向于 $-\infty$，所以若 $f(x)=a$ 有两个零点，则 $\begin{cases}e-a>0,\\ -a<0,\end{cases}$ 即 $0<a<e$，故 D 错误.

11. ABC 【解析】若 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数，则 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，A 选项正确；若 $g(x)$ 的最小正周期为 3π，则 $T=\frac{2\pi}{\omega}=3\pi$，所以 $\omega=\frac{2}{3}$，B 选项正确；由 $x\in(0,\pi)$，得 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right)$. 若 $g(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有 3 个最值点，则 $\frac{5\pi}{2}<$

$\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{2}$,得$\frac{7}{3}<\omega\leqslant\frac{10}{3}$,C选项正确;因为$g(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,若$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\omega\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则$\omega\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$或$\omega\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$,得$\omega=\frac{2}{3}+8k$或$\omega=2+8k$,$k\in\mathbf{Z}$,又$\omega>0$,所以$\omega$的最小值为$\frac{2}{3}$,D选项错误.

12. BCD【解析】依题意,将$\triangle AMN$沿直线l翻折至$\triangle A'MN$,连接AA'.由翻折的性质可知,关于所沿轴对称的两点连线被该轴垂直平分,故$AA'\perp MN$,又A'在平面$BCMN$内的射影H在线段BC上,所以$A'H\perp$平面$BCMN$,$MN\subset$平面$BCMN$,所以$A'H\perp MN$,$AA'\cap A'H=A'$,$AA'\subset$平面$A'AH$,$A'H\subset$平面$A'AH$,所以$MN\perp$平面$A'AH$,所以$AO\perp MN$,$A'O\perp MN$,$A'H\perp MN$,所以$\angle AOM=90^\circ$,且$\angle A'OH$即为二面角A'-MN-B的平面角.对于A选项,由题意可知,$\angle A'DH$为$A'D$与平面$BCMN$所成的线面角,故由线面角最小可知$\angle A'DH\leqslant\angle A'DC$,故A错误;对于B选项,因为$\angle A'OH$即为二面角$A'$-$MN$-$B$的平面角,故由二面角最大可知$\angle A'DH\leqslant\angle A'OH$,故B正确;对于C选项,因为$MN\perp AO$恒成立,故$O$的轨迹以$AM$为直径的圆弧夹在$\triangle ABC$内的部分,易知其长度为$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$,故C正确;对于D选项,如图所示,



设$\angle AMN=\theta\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$,在$\triangle AOM$中,因为$\angle AOM=90^\circ$,所以$AO=AM\sin\theta=\sin\theta$,在$\triangle ABH$中,$\angle B=\frac{\pi}{2}$,$AH=\frac{AB}{\cos\angle BAH}=\frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$,所以

$OH=AH-AO=\frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}-\sin\theta$,设直线$A'O$与平面$BCMN$所成的角为$\alpha$,则$\cos\alpha=\frac{OH}{AO}=$

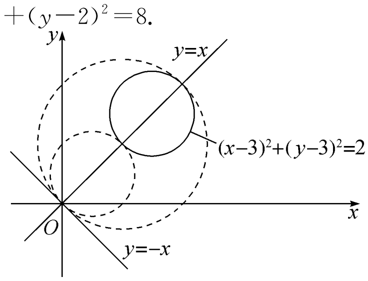
$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}-\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}-1=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}}-1\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}-1=8\sqrt{3}-13,$$

当且仅当$2\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即$\theta=\frac{5\pi}{12}$时取等号,故D正确.

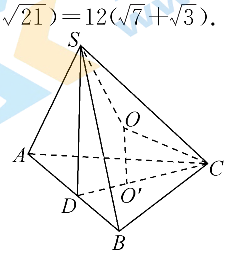
三、填空题

13. -5【解析】因为$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以$-1\times k=2\times\frac{5}{2}$,故$k=-5$.

14. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$或$(x-2)^2+(y-2)^2=8$(答案不唯一)【解析】设圆心为(m,m),则半径$r=\frac{|m+m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|m|$;假设与圆$(x-3)^2+(y-3)^2=2$外切,则$\sqrt{(m-3)^2+(m-3)^2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}|m|$,所以$|m-3|=1+|m|$,故$m^2-6m+9=m^2+2|m|+1$,则$3m+|m|=4$,若$m>0$,则$4m=4$,得$m=1$,则圆心为$(1,1)$,半径为$r=\sqrt{2}$,故$(x-1)^2+(y-1)^2=2$;若$m<0$,则$2m=4$,得$m=2$,不满足前提.假设与圆$(x-3)^2+(y-3)^2=2$内切,又点$(3,3)$与$y=-x$的距离为$\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}>\sqrt{2}$,此时圆$(x-3)^2+(y-3)^2=2$内切于所求圆,则$\sqrt{(m-3)^2+(m-3)^2}=\sqrt{2}|m|-\sqrt{2}$,所以$|m-3|=|m|-1$,故$m^2-6m+9=m^2-2|m|+1$,则$3m-|m|=4$,若$m>0$,则$2m=4$,得$m=2$,则圆心为$(2,2)$,半径为$r=2\sqrt{2}$,故$(x-2)^2+(y-2)^2=8$;若$m<0$,则$4m=4$,得$m=1$,不满足前提.综上,所求圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$或$(x-2)^2+(y-2)^2=8$.



15. $12(\sqrt{7}+\sqrt{3})$【解析】如图,因为球的表面积为100π,所以球的半径为5.设$\triangle ABC$的中心为O',则$OO'=3$,所以$CO'=4$,所以$\triangle ABC$的边长为$4\sqrt{3}$,所以$\triangle ABC$的面积为$12\sqrt{3}$.欲使三棱锥S-ABC的体积最大,则S到平面ABC的距离最大.又平面$SAB\perp$平面ABC,所以点S在平面ABC上的射影为线段AB的中点D.因为$SO=5$,所以$SD=3+\sqrt{25-4}=3+\sqrt{21}$,所以三棱锥$S$-$ABC$的体积最大为$V=\frac{1}{3}\times12\sqrt{3}\times(3+\sqrt{21})=12(\sqrt{7}+\sqrt{3})$.



16. 2【解析】因为$a_1=\frac{4}{3}$,$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$,所以$a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2>0$,即$a_{n+1}>a_n$,所以数列$\{a_n\}$单调递增,所以$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)>0$,所以$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$,所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$,所以$S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1}\right)+\left(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$.所以$m=S_{2017}=3-$

$\frac{1}{a_{2\,018}-1}$，因为 $a_1=\frac{4}{3}$，所以 $a_2=\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{3}+1=\frac{13}{9}$，$a_3=\left(\frac{13}{9}\right)^2-\frac{13}{9}+1=\frac{133}{81}$，$a_4=\left(\frac{133}{81}\right)^2-\frac{133}{81}+1>2$，…，则 $a_{2\,018}>a_{2\,017}>a_{2\,016}>a_{2\,015}>\cdots>a_4>2$，故 $a_{2\,018}-1>1$，所以 $0<\frac{1}{a_{2\,018}-1}<1$，所以 $2<3-\frac{1}{a_{2\,018}-1}<3$. 因此 m 的整数部分是 2.

四、解答题

17. **解**：因为 $c\sin\frac{A+C}{2}=b\sin C$，

所以 $\sin C\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\sin B\sin C$，

因为 $C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq 0$，

所以 $\cos\frac{B}{2}=\sin B$，即 $\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$，

因为 $\frac{B}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\frac{B}{2}\neq 0$，

所以 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，故 $\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}$，解得 $B=\frac{\pi}{3}$.　（5 分）

(2)因为 $B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b\cdot BD=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

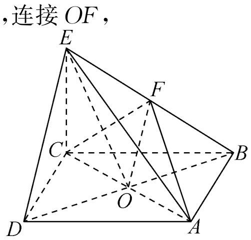
又由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，可得 $\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $ac=2$.　（7 分）

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}$，可得 $3=a^2+c^2-ac$，即 $(a+c)^2=3+3ac$，即 $(a+c)^2=3+6=9$，

所以 $a+c=3$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt{3}$.　（10 分）

18. (1)**证明**：如图，连接 OF，



因为底面 $ABCD$ 是菱形，AC 与 BD 交于点 O，可得 O 为 BD 的中点，

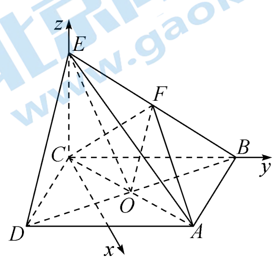
又 F 为 BE 的中点，所以 OF 为 $\triangle BDE$ 的中位线，所以 $OF/\!/DE$.

又 $OF\subset$ 平面 ACF，$DE\not\subset$ 平面 ACF，

所以 $DE/\!/$平面 ACF.　（5 分）

(2)**解**：以 C 为坐标原点，CB，CE 所在直线为 y，z 轴，过 C 作 CB 的垂线所在的直线为 x 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $ABCD$ 是菱形，$\angle ADC=60°$，所以 $\triangle ADC$ 为等边三角形.



不妨设 $AB=CE=2$，则 $D(\sqrt{3},-1,0)$，$B(0,2,0)$，$E(0,0,2)$，$A(\sqrt{3},1,0)$，$F(0,1,1)$，可得 $\overrightarrow{DB}=(-\sqrt{3},3,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,-2,2)$，　（8 分）

设平面 EBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，可得 $\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{3}x+3y=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=-2y+2z=0,\end{cases}$

不妨取 $y=1$，则 $x=\sqrt{3}$，$z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$.

又 $\overrightarrow{AF}=(-\sqrt{3},0,1)$，

所以 AF 与平面 EBD 所成角的正弦值为 $\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AF}|}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})+1\times 0+1\times 1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2+1^2}\times\sqrt{(-\sqrt{3})^2+0^2+1^2}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（12 分）

19. **解**：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q\in\mathbf{N}^*$，

因为 a_3 是 a_2 与 $\frac{3}{4}a_4$ 的等差中项，所以 $2a_3=a_2+\frac{3}{4}a_4$，

所以 $2q=1+\frac{3}{4}q^2$，解得 $q=2$ 或 $q=\frac{2}{3}$（舍去），所以 $a_n=3\times 2^{n-1}$.　（3 分）

因为 $b_{n+1}=2b_n+1$，所以 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，

又 $b_1+1=2$，所以数列$\{b_n+1\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

所以 $b_n+1=2^n$，所以 $b_n=2^n-1$.　（6 分）

(2)由 $k\cdot\frac{b_n+5}{2}-a_n\geqslant 8n+2k-24$，

整理得可得 $k(2^{n-1}+2)-3\times 2^{n-1}\geqslant 8(n-3)+2k$，即 $(k-3)\cdot 2^{n-1}\geqslant 8(n-3)$，

所以$\frac{k-3}{16}\geqslant\frac{n-3}{2^n}$对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.　（8 分）

令 $f(n)=\frac{n-3}{2^n}$，则 $f(n+1)-f(n)=\frac{n-2}{2^{n+1}}-\frac{n-3}{2^n}=\frac{(n-2)-2(n-3)}{2^{n+1}}=\frac{4-n}{2^{n+1}}$，

所以当 $n\leqslant 4$ 时，$f(n+1)\geqslant f(n)$，当 $n\geqslant 5$ 时，$f(n+1)<f(n)$，

所以当 $n=4$ 或 5 时，$f(n)$取得最大值，

所以 $f(n)_{\max}=f(4)=\frac{1}{16}$.　（10 分）

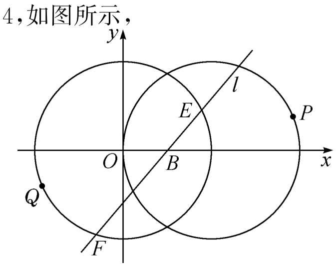
所以$\frac{k-3}{16}\geqslant\frac{1}{16}$，解得 $k\geqslant 4$.

故实数 k 的取值范围是$[4,+\infty)$.　（12 分）

20. **解**：(1)设点 $P(x,y)$，由题意可得$|PA|=2|PB|$，即 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，化简可得$(x-2)^2+y^2=4$.　（4 分）

(2)设点 $Q(x_0,y_0)$，由(1)知点 P 满足方程$(x-2)^2+y^2=4$，则$\begin{cases}x_0+x=2\times 1,\\ y_0+y=0,\end{cases}$

代入上式整理可得 $x_0^2+y_0^2=4$，即点 Q 的轨迹方程为 $x^2+y^2=4$，如图所示，　（8 分）



当直线 l 的斜率存在时，设其斜率为 k，则直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，由 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ y=k(x-1)\end{cases}$ 消去 y，得 $(1+k^2)x^2-2k^2x+k^2-4=0$，显然 $\Delta>0$，

设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2}{1+k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{k^2-4}{1+k^2}$， （10 分）

又 $\overrightarrow{BE}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{BF}=(x_2-1,y_2)$，

则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=1-(x_1+x_2)+x_1x_2+y_1y_2=1-(x_1+x_2)+x_1x_2+k^2(x_1-1)(x_2-1)=(1+k^2)\cdot x_1x_2-(1+k^2)(x_1+x_2)+(1+k^2)=(1+k^2)\cdot\dfrac{k^2-4}{1+k^2}-(1+k^2)\dfrac{2k^2}{1+k^2}+(1+k^2)=k^2-4-2k^2+1+k^2=-3$.

当直线 l 的斜率不存在时，$E(1,\sqrt{3})$，$F(1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=-3$.

故 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 是定值，$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=-3$. （12 分）

21. (1)**解**：当 $a=1$ 时，$g(x)=\dfrac{e^x-\sin x-1}{e^x}=1-\dfrac{\sin x+1}{e^x}$， （2 分）

$g'(x)=-\dfrac{\cos x-\sin x-1}{e^x}=-\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{e^x}$，

当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 时，$-\dfrac{\pi}{4}<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$，$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $0<x<\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\pi}{4}<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7\pi}{4}$，$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递增. （5 分）

(2)**证明**：当 $a=-3$ 时，要证 $f(x)<e^x+x+1-2e^{-2x}$，只要证 $3\sin x-x-2<-2e^{-2x}$，

即证 $e^{2x}(3\sin x-x-2)<-2$.

令 $F(x)=e^{2x}(3\sin x-x-2)$，则 $F'(x)=e^{2x}(6\sin x-2x+3\cos x-5)$.

当 $x>0$ 时，令 $h(x)=x-\sin x$，$h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)>h(0)=0$，即 $x>\sin x$，

所以 $-2x<-2\sin x$.

所以 $F'(x)=e^{2x}(6\sin x-2x+3\cos x-5)<e^{2x}(6\sin x-2\sin x+3\cos x-5)=e^{2x}(4\sin x+3\cos x-5)=e^{2x}[5\sin(x+\varphi)-5]\leqslant 0$，

其中 φ 为辅助角，且满足 $\sin\varphi=\dfrac{3}{5}$，$\cos\varphi=\dfrac{4}{5}$.

所以 $F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，即 $F(x)<F(0)=-2$.

故 $f(x)<e^x+x+1-2e^{-2x}$. （12 分）

22. (1)**证明**：如图，连接 CC_1，

因为 E,D 分别为 BC,AC 的中点，

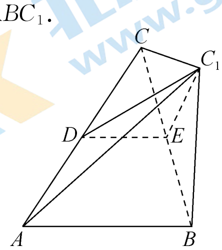
所以 $CE=C_1E=EB$，$CD=C_1D=DA$，

所以 $\triangle ACC_1$，$\triangle BCC_1$ 分别为以 AC,BC 为斜边的直角三角形，

即 $CC_1\perp AC_1$，$CC_1\perp BC_1$，又 $AC_1\cap BC_1=C_1$，$BC_1\subset$ 平面 ABC_1，$AC_1\subset$ 平面 ABC_1，所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC_1，

因为平面 $C_1AD\cap$ 平面 $BEC_1=l=CC_1$，

所以 $l\perp$ 平面 ABC_1. （5 分）



(2)**解**：如图，过 C_1 作 $C_1H\perp BE$，连接 CP 并延长，交 AC_1 于点 Q，连接 EP,BQ，因为 $C_1E=C_1B$，

所以 H 为 EB 的中点，所以 $BH=1$，

连接 AH，因为 $AB=\sqrt{13}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{13}}{13}=\dfrac{BH}{AB}$，

所以 $AH\perp EB$，又 $AH\cap C_1H=H$，$AH\subset$ 平面 AHC_1，$C_1H\subset$ 平面 AHC_1，

所以 $BE\perp$ 平面 AHC_1，连接 HQ，

则 $\angle C_1HQ$ 是截面 $EPQB$ 与平面 BEC_1 所成二面角的平面角，

即 $\tan\angle C_1HQ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

在 $Rt\triangle BCC_1$ 中，$BC_1=2$，$BC=4$，所以 $CC_1=2\sqrt{3}$，

又在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=13+16-2\times\sqrt{13}\times 4\times\dfrac{\sqrt{13}}{13}=21$，

所以在 $Rt\triangle ACC_1$ 中，$AC_1^2=AC^2-CC_1^2=21-12=9$，

所以 $AC_1=3$，所以 $AH^2=AC_1^2+HC_1^2$，所以 $HC_1\perp AC_1$；

因为 $\tan\angle C_1HQ=\dfrac{C_1Q}{HC_1}=\dfrac{C_1Q}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $C_1Q=\dfrac{3}{2}$，即 Q 为 AC_1 中点.

又 D 是 AC 中点，所以 P 是 $\triangle ACC_1$ 的重心，

所以 $C_1P=\dfrac{2}{3}C_1D$，$CP=\dfrac{2}{3}CQ$，

所以 $\dfrac{S_{\triangle CPE}}{S_{\triangle CQB}}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$，所以 $V_{四棱锥C_1\text{-}BQPE}=2V_{三棱锥C_1\text{-}CPE}=4V_{三棱锥C\text{-}DPE}$，

又 $V_{三棱锥C\text{-}AQB}=V_{三棱锥C\text{-}BQC_1}$，

所以 $V_{几何体ABEDQP}=V_{三棱锥C\text{-}ABQ}-V_{三棱锥C\text{-}DPE}=V_{三棱锥C\text{-}BQC_1}-V_{三棱锥C\text{-}DPE}=5V_{三棱锥C\text{-}DPE}$，

所以 $\dfrac{V_{四棱锥C_1\text{-}BQPE}}{V_{几何体ABEDQP}}=\dfrac{4}{5}$. （12 分）