

高三数学

北京高考在线
www.gaokzx.com

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合与常用逻辑用语、不等式、函数与导数、三角函数、解三角形、平面向量、复数、数列。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | y = \log_2(x - \sqrt{2})\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | |1 - x| \leq 2\}$, 则 $B \cap (\complement_{\mathbb{R}} A) =$

A. $\{0, 2, 3\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

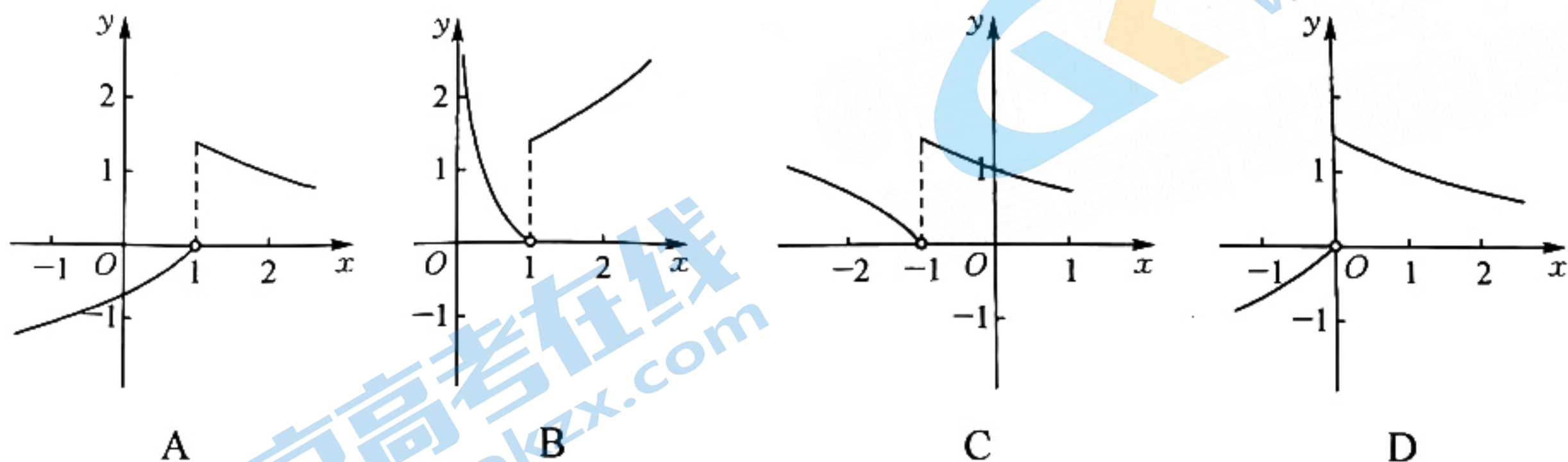
2. 若 $p: \frac{3}{x+1} \leq 1$, 则 p 成立的一个充分不必要条件是

A. $-1 \leq x \leq 1$ B. $-2 < x \leq -1$
C. $-3 < x < -2$ D. $0 < x \leq 5$

3. 已知 \bar{z} 是 z 的共轭复数, 若 $(-1+i)\bar{z} = -2-i$, 则 $z =$

A. $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ B. $-\frac{1}{2} + i$ C. $-\frac{1}{2} - i$ D. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\sqrt{2})^x, & x \leq 1, \\ -\ln x, & x > 1, \end{cases}$ 则 $y = f(2-x)$ 的大致图象是



5. 在实验室细菌培养过程中，细菌生长主要经历调整期、指数期、稳定期和衰亡期四个时期。在一定条件下，某生物实验室在研究某种动物细菌的过程中发现，细菌数量 N (单位) 与该动物细菌被植入培养的时间 t (单位：小时) 近似满足函数关系式 $Y(t) = N_0 e^{-\frac{t}{12}}$, 其中 N_0 为初始细菌含量。若经过 6 小时培养，该细菌数量为 $\frac{24\sqrt{e}}{e}$ (单位)，则 $Y(12) =$
- A. $12e^{-1}$ B. $24e^{-1}$ C. $36e^{-1}$ D. $38e^{-2}$

6. 在公差为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且 a_1, a_3, a_{13} 成等比数列, 设数列 $\{2^n \cdot a_{n+1}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则 $T_7 =$

- A. $3 \times 2^9 + 2$ B. $11 \times 2^7 + 8$ C. $13 \times 2^8 + 2$ D. $13 \times 2^7 + 4$

7. 已知 $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 若 $\frac{2+2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = 9$, 则 $\frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} =$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{5} - 2$ C. $\frac{1}{2}$ D. $2 - \sqrt{5}$

8. 已知 $x > 0, y > 0$, 若 $(1 + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{4y^2 + 1} - 2y) = x$, 则 $\log_2 x \cdot \log_2 y$ 的最大值为

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 0

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知平面内三点 $A(-1, 2), B(-3, 6), C(0, 5)$, 则

- A. $\vec{AC} = (1, 3)$
 B. $\vec{AC} \parallel \vec{BC}$
 C. $|\vec{AB} + \vec{CA}| = \sqrt{10}$
 D. \vec{AB} 与 \vec{BC} 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$

10. 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1 和 d_2 , 其前 n 项和分别为 S_n 和 T_n , 则

- A. 若 $\{\sqrt{S_n}\}$ 为等差数列, 则 $d_1 = 2a_1$
 B. 若 $\{S_n + T_n\}$ 为等差数列, 则 $d_1 + d_2 = 0$
 C. 若 $\{a_n b_n\}$ 为等差数列, 则 $d_1 = d_2 = 0$
 D. 若 $b_n \in \mathbf{N}^*$, 则 $\{a_{b_n}\}$ 也为等差数列, 且公差为 $d_1 d_2$

11. 已知 $\triangle ABC$ 外接圆的面积为 π , 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sin A, \sin B, \sin C$ 成等比数列, 设 $\triangle ABC$ 的周长和面积分别为 P, S , 则

- A. $0 < B \leq \frac{\pi}{3}$ B. $0 < b \leq \sqrt{3}$
 C. $0 < P \leq 2\sqrt{3}$ D. $0 < S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$

12. 已知函数 $f(x) = \tan(\cos x) + \cos(\sin x)$, 则

- A. $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数 B. $f(x)$ 的最大值为 2
 C. $f(x)$ 的最小正周期为 π D. $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, (a-1)x^2 + 2(a-1)x \geq 4$ ”为假命题, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 已知向量 $\mathbf{a} = (-2, 1), \mathbf{b} = (1, t)$, 若对任意 $t \in \mathbf{R}$, 向量 $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ 满足 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$ 恒成立, 则 k 的值为_____.

15. 一艘客船在 A 处测得灯塔 B 在它的北偏东 75° , 在 A 处测得灯塔 C 在它的北偏西 30° , 距离为 $18\sqrt{2}$ n mile. 客船由 A 处向正北航行 $12\sqrt{6}$ n mile 到达 D 处, 再看灯塔 B 在它的南偏东 60° , 则 $AB =$ _____ n mile; 设灯塔 C 在 D 处的南偏西 θ 度, 则 $\theta =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = e^x + ax + 1 (a \in \mathbf{R})$, 若函数 $f(x)$ 与函数 $f(f(x))$ 的单调区间相同, 并且既有单调递增区间, 也有单调递减区间, 则 a 的取值范围是_____ (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $a_1=1, na_{n+1}=(n+2)S_n$.

(1) 证明：数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等比数列；

(2) 求 S_n 与 a_n .

18. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ， $AB=2$ ， $\angle BAC=60^\circ$ ， AC, BC 边的中点分别是 N, M .

(1) 求 $\vec{AM} \cdot \vec{BN}$ ；

(2) 若 AM 与 BN 相交于点 P ，求 $\cos \angle MPN$ 的值.

19. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $a=2b=2$ ， $\tan A=-\sqrt{15}$.

(1) 求 c ；

(2) 求 $\sin(2A-B)$ 的值.

20. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0, a_{n+1}=\begin{cases} a_n+n+1, n \text{ 为奇数,} \\ a_n+n, n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

(1) 求证: $a_{n+2}=a_n+2(n+1)$;

(2) 设 $S_n=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}+n$, 求 $\left\{\frac{1}{S_{2n-1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c^2=a(a+b)$.

(1) 求证: $C=2A$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\sin B+3\sin A$ 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=(a-1)x^a-ax^{\frac{1}{a}}$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 当 $0\leq x\leq 1$ 且 $0<a\leq 1$ 时, 求证: $e^{-\frac{1}{a}}f(e)+f(x)\geq -2$.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. B 根据题意,得 $A = \{x | y = \log_2(x - \sqrt{2})\} = \{x | x > \sqrt{2}\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | |x - 1| \leq 2\} = \{0, 1, 2, 3\}$, 故 $B \cap (\complement_{\mathbf{R}} A) = \{0, 1\}$. 故选 B.

2. C $\frac{3}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2-x)(x+1) \leq 0, \\ x+1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x < -1$ 或 $x \geq 2$, 又 $(-3, -2) \subseteq (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$, 则 p

成立的一个充分不必要条件是 $-3 < x < -2$. 故选 C.

3. D 因为 $z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, 所以 $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. 故选 D.

4. A 函数 $f(x) = \begin{cases} (\sqrt{2})^x, & x \leq 1, \\ -\ln x, & x > 1, \end{cases}$ 则 $y = f(2-x) = \begin{cases} (\sqrt{2})^{2-x}, & x \geq 1, \\ -\ln(2-x), & x < 1. \end{cases}$

当 $x \geq 1$ 时, 函数 $f(2-x)$ 单调递减; 当 $x < 1$ 时, 函数 $f(2-x)$ 单调递增, 只有 A 符合. 故选 A.

5. B 由经过 6 小时培养该细菌数量为 $\frac{24\sqrt{e}}{e}$ (单位), 得 $Y(6) = e^{-\frac{6}{12}} \cdot N_0 = \frac{24\sqrt{e}}{e}$, 解得 $N_0 = 24$, 从而 $Y(t) = 24e^{-\frac{t}{12}}$, 所以 $Y(12) = 24 \times e^{-1} = 24e^{-1}$. 故选 B.

6. C 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$, 由 a_1, a_3, a_{13} 成等比数列, 得 $a_3^2 = a_1 \cdot a_{13}$, 即 $(1+2d)^2 = 1+12d$, 解得 $d=2$ 或 $d=0$ (舍去), 所以 $a_n = 2n-1$. 从而 $2^n \cdot a_{n+1} = (2n+1) \cdot 2^n$, 故 $T_n = 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + 7 \times 2^3 + \dots + (2n+1) \cdot 2^n$, $2T_n = 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-1) \cdot 2^n + (2n+1) \cdot 2^{n+1}$, 两式相减, 得 $-T_n = 3 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + 2 \cdot 2^n - (2n+1) \cdot 2^{n+1} = 6 + 2 \times \frac{2^2 - 2^{n+1}}{1-2} - (2n+1) \cdot 2^{n+1} = -(2n-1) \cdot 2^{n+1} - 2$, 所以 $T_n = (2n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$. 所以 $T_7 = 13 \times 2^8 + 2$. 故选 C.

7. D $\frac{2+2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{2\cos^2 \alpha} = 9$, 由 $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 得 $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$, 所以 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} = 3$, 即 $\sin \alpha = 2\cos \alpha$, 联立

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 解得 $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2})^2}{(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2})(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2})} =$

$\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2 - \sqrt{5}$. 故选 D.

8. C 因为 $(1 + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{4y^2 + 1} - 2y) = x$, 所以 $\frac{1}{x} + \sqrt{(\frac{1}{x})^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{4y^2 + 1} - 2y} = 2y + \sqrt{(2y)^2 + 1}$.

设 $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}, t > 0$, 则 $f(\frac{1}{x}) = f(2y)$, 易知 $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $\frac{1}{x} = 2y$, 即 $xy =$

$\frac{1}{2}$, 所以 $\log_2 x \cdot \log_2 y \leq \left(\frac{\log_2 x + \log_2 y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号, 即 $\log_2 x \log_2 y$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$. 故选 C.

9. ACD 由题意, 得 $\vec{AB} = (-2, 4), \vec{AC} = (1, 3), \vec{BC} = (3, -1)$, 则 A 正确; 因为 $1 \times (-1) - 3 \times 3 = -10 \neq 0$, 所以 \vec{AC} 与 \vec{BC} 不平行, 则 B 错误; 因为 $\vec{AB} + \vec{CA} = (-3, 1)$, 所以 $|\vec{AB} + \vec{CA}| = \sqrt{10}$, 则 C 正确; 因为 $\cos \langle \vec{AB}, \vec{BC} \rangle = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{-10}{2\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $\langle \vec{AB}, \vec{BC} \rangle \in [0, \pi]$, 所以 \vec{AB} 与 \vec{BC} 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$, 则 D 正确. 故选 ACD.

10. ABD 对于 A, 因为 $\{\sqrt{S_n}\}$ 为等差数列, 所以 $2\sqrt{S_2} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_3}, S_1 = a_1 \geq 0$, 即 $2\sqrt{a_1 + a_2} = \sqrt{a_1} + \sqrt{a_1 + a_2 + a_3}$, 所以 $2\sqrt{2a_1 + d_1} = \sqrt{a_1} + \sqrt{3a_1 + 3d_1}$, 化简得 $(d_1 - 2a_1)^2 = 0$, 所以 $d_1 = 2a_1$, 从而 $\sqrt{S_n} = n\sqrt{a_1}$, 适合

题意,则 A 正确;

对于 B,因为 $\{S_n + T_n\}$ 为等差数列,所以 $2(S_2 + T_2) = S_1 + T_1 + S_3 + T_3$,所以 $2(2a_1 + d_1 + 2b_1 + d_2) = a_1 + b_1 + 3a_1 + 3d_1 + 3b_1 + 3d_2$,所以 $d_1 + d_2 = 0$,则 B 正确;

对于 C,因为 $\{a_n b_n\}$ 为等差数列,所以 $2a_2 b_2 = a_1 b_1 + a_3 b_3$,所以 $2(a_1 + d_1)(b_1 + d_2) = a_1 b_1 + (a_1 + 2d_1)(b_1 + 2d_2)$,化简得 $d_1 d_2 = 0$,所以 $d_1 = 0$ 或 $d_2 = 0$,则 C 不正确;

对于 D,因为 $a_n = a_1 + (n-1)d_1$,且 $b_n \in \mathbf{N}^*$,所以 $a_{b_n} = a_1 + (b_n - 1)d_1 = a_1 + [b_1 + (n-1)d_2 - 1]d_1$,所以 $a_{b_n} = a_1 + (b_1 - 1)d_1 + (n-1)d_1 d_2$,所以 $a_{b_{n+1}} - a_{b_n} = a_1 + (b_1 - 1)d_1 + nd_1 d_2 - a_1 - (b_1 - 1)d_1 - (n-1)d_1 d_2 = d_1 d_2$,所以 $\{a_{b_n}\}$ 也为等差数列,且公差为 $d_1 d_2$,则 D 正确. 故选 ABD.

11. ABD 由 $\sin^2 B = \sin A \cdot \sin C$ 及正弦定理,得 $b^2 = ac$;由余弦定理,得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - ac}{2ac}$. 因为 $a^2 + c^2 \geq 2ac$,所以 $\cos B \geq \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$,又 $0 < B < \pi$,所以 $0 < B \leq \frac{\pi}{3}$,则 $0 < \sin B \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;因为 $\triangle ABC$ 外接圆的面积为 π ,所以 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $R = 1$;由正弦定理,得 $\frac{b}{\sin B} = 2R = 2$,所以 $b = 2\sin B, 0 < b \leq \sqrt{3}$. 选项 AB 正确; $S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} b^2 \sin B = 2\sin^3 B$,所以 $0 < 2\sin^3 B \leq 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$,故 $0 < S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$. 选项 D 正确;对于选项 C,取 $a = b = c = \sqrt{3}$ 满足条件, $P = a + b + c = 3\sqrt{3}$,则 C 错误. 故选 ABD.

12. AD 因为 $\forall x \in \mathbf{R}, \cos x \in [-1, 1] \subseteq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,所以 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ;对于 $\forall x \in \mathbf{R}$,都有 $-x \in \mathbf{R}$,且 $f(-x) = \tan[\cos(-x)] + \cos[\sin(-x)] = \tan(\cos x) + \cos(\sin x) = f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数,则 A 正确;

$f(0) = \tan 1 + \cos 0 = \tan 1 + 1 > 2$,则 B 错误;

又 $f(\pi) = -\tan 1 + 1$,所以 $f(\pi) \neq f(0)$,则 C 错误;

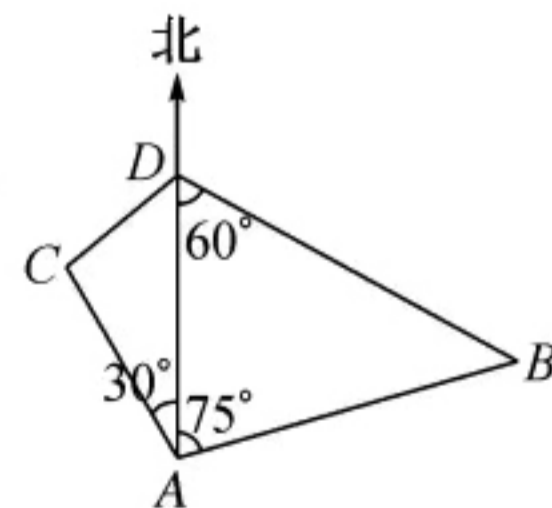
当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $y = \cos x$ 单调递减,且 $\cos x \in [0, 1]$,而 $y = \tan x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,所以 $y = \tan(\cos x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减;当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $y = \sin x$ 单调递增,且 $\sin x \in [0, 1]$,而 $y = \cos x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,所以 $y = \cos(\sin x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,从而 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,则 D 正确. 故选 AD.

13. $(-3, 1]$ 由题意,得 $\forall x \in \mathbf{R}, (a-1)x^2 + 2(a-1)x - 4 < 0$ 为真命题,当 $a = 1$ 时, $-4 < 0$,满足题意;当 $a \neq 1$ 时,
$$\begin{cases} a-1 < 0, \\ \Delta = 4(a-1)^2 - 4(a-1) \times (-4) < 0, \end{cases}$$
解得 $-3 < a < 1$. 综上,实数 a 的取值范围是 $(-3, 1]$.

14. 0 由题意知, $c = 2a + kb = (k-4, kt+2)$,因为 $a \parallel c$ 恒成立,所以 $-2(kt+2) - (k-4) = 0$,即 $k(2t+1) = 0$ 对任意 $t \in \mathbf{R}$ 恒成立,所以 $k = 0$.

15. 36(2分) 60(60后面若加单位度 $^\circ$,同样给分)(3分) 在 $\triangle ABD$ 中,由已知得 $\angle ADB = 60^\circ$, $\angle DAB = 75^\circ$,则 $\angle B = 45^\circ, AD = 12\sqrt{6}$.

由正弦定理,得 $AB = \frac{AD \sin \angle ADB}{\sin \angle B} = \frac{12\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 36$.



在 $\triangle ADC$ 中,由余弦定理,得 $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cos 30^\circ = (12\sqrt{6})^2 + (18\sqrt{2})^2 - 2 \times 12\sqrt{6} \times 18\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 216$,即 $CD = 6\sqrt{6}$. 因为 $AC^2 + CD^2 = AD^2$,所以 $\angle ACD = 90^\circ$,从而 $\angle CDA = 60^\circ$,所以灯塔 C 在 D 处的南偏西 60° .

16. [关注北京高者在线官方微信,北京高考资讯(微信号:bjgkzx),获取更多试题资料及排名分析信息,法高者在线官方微信]

$f(x)$ 只有单调增区间,不合题意;若 $a < 0$, 令 $f'(x_0) = 0$, 得 $x_0 = \ln(-a)$, $a = -e^{x_0}$, 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 设 $g(x) = f(f(x))$, 因为函数 $f(x)$ 与函数 $f(f(x))$ 的单调区间相同, 所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$, 所以 $f'(f(x)) \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 即 $f(x) \geq x_0$ 恒成立, 由 $f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0} + ax_0 + 1$, 所以 $e^{x_0} + ax_0 + 1 \geq x_0$, 将 $a = -e^{x_0}$ 代入上式, 整理得 $e^{x_0} - (e^{x_0} + 1)x_0 + 1 \geq 0$, 即 $(e^{x_0} + 1)(1 - x_0) \geq 0$, 从而 $x_0 \leq 1$, 此时 $a = -e^{x_0} \geq -e$, 所以 a 的取值范围为 $[-e, 0)$.

法二: $f'(x) = e^x + a$. 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) = e^x + a > 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. $f(x)$ 没有单调递减区间, 不符合题意. 当 $a < 0$ 时, $f'(x) = e^x - (-a) = e^x - e^{\ln(-a)}$. 当 $x \in (-\infty, \ln(-a))$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (\ln(-a), +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 令 $g(x) = f(f(x))$, 则 $g'(x) = f'(f(x))f'(x) = (e^{f(x)} + a)(e^x + a) = (e^{e^x + ax + 1} + a)(e^x + a) = (e^{e^x + ax + 1} - e^{\ln(-a)})(e^x - e^{\ln(-a)})$. 由题意, $\forall x \in \mathbf{R}, e^{e^x + ax + 1} - e^{\ln(-a)} \geq 0$ 恒成立, 即 $e^x + ax + 1 - \ln(-a) \geq 0$ 恒成立. 令 $h(x) = e^x + ax + 1 - \ln(-a)$, 则 $h(x) \geq 0$ 恒成立. 因为 $h'(x) = e^x + a = f'(x)$, 所以 $h(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的单调性, 所以 $h(x)_{\min} = h(\ln(-a)) = -a + a \ln(-a) + 1 - \ln(-a) = (a-1)[\ln(-a) - 1] \geq 0$. 又 $a-1 < 0$, 所以 $\ln(-a) - 1 \leq 0$, 即 $\ln(-a) \leq 1$, 即 $a \geq -e$. 综上, a 的取值范围是 $[-e, 0)$.

17. (1) 证明: 因为 $na_{n+1} = (n+2)S_n$, 所以 $a_{n+1} = \frac{n+2}{n}S_n$,

则 $S_{n+1} - S_n = \frac{n+2}{n}S_n \Rightarrow S_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n}S_n \Rightarrow \frac{S_{n+1}}{n+1} = 2 \times \frac{S_n}{n}$ 3分

又 $a_1 = 1$, 所以 $\frac{S_1}{1} = 1$,

所以数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列. 5分

(2) 解: 由(1)可得 $\frac{S_n}{n} = 2^{n-1}$, 即 $S_n = n \cdot 2^{n-1}$, 6分

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n \cdot 2^{n-1} - (n-1) \cdot 2^{n-2} = (n+1) \cdot 2^{n-2}$; 8分

当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$ 符合 $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$, 9分

所以 $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$ 10分

18. 解: (1) 由 $AB=2, S_{\triangle ABC} = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \angle BAC=60^\circ$,

得 $S_{\triangle ABC} = \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times 2AC \sin 60^\circ$, 解得 $AC=5$ 1分

因为 AC, BC 边的中点分别是 N, M , 所以 $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB}$ 3分

从而 $\vec{AM} \cdot \vec{BN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{4}\vec{AC}^2 - \frac{1}{2}\vec{AB}^2 - \frac{1}{4}\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
 $= \frac{1}{4} \times 5^2 - \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{1}{4} \times 2 \times 5 \times \frac{1}{2} = 3$ 6分

(2) 由(1), 得 $|\vec{AM}|^2 = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC})^2 = \frac{1}{4}\vec{AB}^2 + \frac{1}{4}\vec{AC}^2 + 2 \times \frac{1}{4}\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

$= \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{4} \times 25 + 2 \times \frac{1}{4} \times 2 \times 5 \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{25}{4} + \frac{5}{2} = \frac{4+25+10}{4} = \frac{39}{4}$.

所以 $|\vec{AM}| = \frac{\sqrt{39}}{2}$ 8分

$|\vec{BN}|^2 = (\frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \frac{1}{4}\vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 + \frac{1}{4} \times 25 - 2 \times 5 \times \frac{1}{2} = 4 + \frac{25}{4} - 5 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$,

所以 $|\vec{BN}| = \frac{\sqrt{21}}{2}$ 10分

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息.

故 $\cos \angle MPN = \cos \langle \vec{AM}, \vec{BN} \rangle = \frac{\vec{AM} \cdot \vec{BN}}{|\vec{AM}| \cdot |\vec{BN}|} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{13}}{2} \times \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{2}} = \frac{4\sqrt{91}}{91}$ 12分

19. 解: (1) 因为 $\tan A = -\sqrt{15}$, $0 < A < \pi$, 易得 $\cos A = -\frac{1}{4}$ 1分

由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 即 $4 = 1 + c^2 - 2 \times 1 \times c \times (-\frac{1}{4})$, 3分

整理, 得 $2c^2 + c - 6 = 0$,

解得 $c = \frac{3}{2}$, 或 $c = -2$ (舍去).

故 $c = \frac{3}{2}$ 5分

(2) 由 $\cos A = -\frac{1}{4}$, 得 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 6分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{15}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$ 7分

因为 $\cos A = -\frac{1}{4}$, 所以 $\frac{\pi}{2} < A < \pi$, 又 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

所以 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times (-\frac{1}{4}) \times \frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{8}$,

$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2 \times \frac{1}{16} - 1 = -\frac{7}{8}$, 9分

而 $0 < B < \frac{\pi}{2}$, $\sin B = \frac{\sqrt{15}}{8}$, 所以 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{7}{8}$, 10分

故 $\sin(2A - B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = (-\frac{\sqrt{15}}{8}) \times \frac{7}{8} + \frac{7}{8} \times \frac{\sqrt{15}}{8} = 0$ 12分

20. (1) 证明: 当 n 为奇数时, $n+1$ 为偶数, 则 $a_{n+2} = a_{n+1} + n + 1$, $a_{n+1} = a_n + n + 1$, 可得 $a_{n+2} = a_n + 2(n+1)$; 2分

当 n 为偶数时, $n+1$ 为奇数, 则 $a_{n+2} = a_{n+1} + n + 1 + 1$, $a_{n+1} = a_n + n$, 可得 $a_{n+2} = a_n + 2(n+1)$.

综上, $a_{n+2} = a_n + 2(n+1)$ 4分

(2) 解: 法一: 当 n 为奇数且 $n \geq 2$ 时, $a_2 = a_1 + 1 + 1$, $a_3 = a_2 + 2$, $a_4 = a_3 + 3 + 1$, ..., $a_{n-1} = a_{n-2} + n - 2 + 1$, $a_n = a_{n-1} + n - 1$,

$$\begin{aligned} \text{累加可得 } a_n &= a_1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1 + \dots + n - 2 + 1 + n - 1 \\ &= (1 + 1 + 3 + 1 + \dots + n - 2 + 1) + (2 + 4 + \dots + n - 1) \\ &= \frac{2+n-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{2+n-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{2}, \end{aligned}$$

$n=1$ 时也符合; 6分

当 n 为偶数且 $n \geq 2$ 时, $n-1$ 为奇数, 则 $a_{n-1} = \frac{(n-1)^2-1}{2} = \frac{n^2-2n}{2}$,

$$a_n = a_{n-1} + (n-1) + 1 = \frac{n^2-2n}{2} + n = \frac{n^2}{2}. \quad \dots\dots 8分$$

法二: 由(1), $a_{n+2} = a_n + 2(n+1)$, 即 $a_{n+2} - a_n = 2(n+1)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } a_{2n} &= (a_{2n} - a_{2(n-1)}) + (a_{2(n-1)} - a_{2(n-2)}) + (a_{2(n-2)} - a_{2(n-3)}) + \dots + (a_4 - a_2) + a_2 \\ &= 2[2(n-1)+1] + 2[2(n-2)+1] + 2[2(n-3)+1] + \dots + 2 \times (2+1) + 2 \\ &= 2(2n-1) + 2(2n-3) + 2(2n-5) + \dots + 2 \times 3 + 2 \times 1 \end{aligned}$$

关注北京高考在线官方微信: **北京高考资讯(微信号:bjgkzx)**, 获取更多试题资料及排名分析信息。
 $= 2 \times \frac{[1+(2n-1)]n}{2} = 2n^2 = \frac{(2n)^2}{2}$ 6分

所以当 n 为偶数时, $a_n = \frac{n^2}{2}$.

当 n 为奇数时, $n+1$ 为偶数, 由 $a_{n+1} = a_n + n + 1$, 得

$$a_n = a_{n+1} - n - 1 = \frac{(n+1)^2}{2} - n - 1 = \frac{n^2 - 1}{2}. \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

下面统一求 S_n .

$$\text{因为 } 2n \text{ 为偶数, 所以 } a_{2n} - a_{2n-1} = \frac{(2n)^2}{2} - \frac{(2n-1)^2 - 1}{2} = 2n,$$

$$\text{所以 } S_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots - a_{2n-1} + a_{2n} + n = 2 + 4 + \dots + 2n + n = \frac{n(2+2n)}{2} + n = n(n+2). \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\frac{1}{S_{2n-1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{故 } T_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{n}{2n+1}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

21. (1) 证明: 法一: 由余弦定理, 得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + ab}{2bc} = \frac{a+b}{2c} = \frac{c}{2a}$,

$$\text{所以 } c = 2a \cos A, \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

由正弦定理, 得 $\sin C = 2 \sin A \cos A$, 即 $\sin C = \sin 2A$,

又 $0 < C < \pi, 0 < 2A < 2\pi$, 所以 $C = 2A$ 或 $C + 2A = \pi$. $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

若 $C + 2A = \pi$, 因为 $A + B + C = \pi$, 可得 $A = B$, 所以 $a = b$,

$$\text{又 } c^2 = a(a+b), \text{ 所以 } c^2 = a^2 + b^2, \text{ 此时 } C = \frac{\pi}{2}, A = B = \frac{\pi}{4},$$

满足 $C = 2A$, 故 $C = 2A$ 得证. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

$$\text{法二: 由余弦定理, 得 } \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{b^2 - ab}{2ab} = \frac{b-a}{2a},$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + ab}{2bc} = \frac{a+b}{2c}, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{则 } \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2 \times \frac{(a+b)^2}{4c^2} - 1 = \frac{(a+b)^2 - 2c^2}{2c^2} = \frac{(a+b)^2 - 2a(a+b)}{2a(a+b)} = \frac{b-a}{2a}.$$

所以 $\cos C = \cos 2A$. $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

由 $\cos A = \frac{a+b}{2c} > 0$, 得 A 为锐角, 所以 $0 < C, 2A < \pi$, 故 $C = 2A$ 得证. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

$$(2) \text{解: 因为 } \triangle ABC \text{ 为锐角三角形, 所以 } \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < C < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \pi - 3A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < 2A < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} < \sin A < \frac{\sqrt{2}}{2}. \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\text{法一: 而 } \sin B + 3 \sin A = \sin(A+C) + 3 \sin A = \sin 3A + 3 \sin A = \sin A \cos 2A + \cos A \sin 2A + 3 \sin A$$

$$= \sin A (1 - 2 \sin^2 A) + 2 \sin A \cos^2 A + 3 \sin A$$

$$= \sin A (1 - 2 \sin^2 A) + 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + 3 \sin A = 6 \sin A - 4 \sin^3 A. \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{令 } f(x) = 6x - 4x^3, x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{ 则 } f'(x) = 6 - 12x^2,$$

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。
当 $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 上单调递增,

又 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$, 故 $f(x)$ 的值域为 $\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{2}\right)$,

所以 $\sin B+3\sin A$ 的取值范围为 $\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{2}\right)$ 12 分

法二: 因为 $C=2A$, 所以 $\sin B+3\sin A=\sin(A+C)+3\sin A=\sin 3A+3\sin A$,

设 $f(A)=\sin 3A+3\sin A$, 则 $f'(A)=3\cos 3A+3\cos A$ 8 分

当 $A\in\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $3A\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos 3A<0$,

此时 $f'(A)=3\cos 3A+3\cos A>0$. 所以 $f(A)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 10 分

而 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)+3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5}{2}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3\times\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$,

所以 $A\in\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 时 $f(A)\in\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{2}\right)$, 即 $\sin B+3\sin A$ 的取值范围为 $\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{2}\right)$ 12 分

22. (1) 解: 当 $a=2$ 时, $f(x)=x^2-2x^{\frac{1}{2}}$, 则 $f'(x)=2x-x^{\frac{1}{2}}$, 1 分

$f'(1)=2-1=1, f(1)=-1$,

所以 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-(-1)=x-1$, 即 $y=x-2$ 4 分

(2) 证明: 当 $a=1$ 时, $f(x)=-x, 0\leq x\leq 1$ 时, $f(x)_{\min}=f(1)=-1$;

当 $0<a<1$ 时, $f'(x)=a(a-1)x^{a-1}-x^{\frac{1}{a}-1}=x^{\frac{1}{a}-1}[a(a-1)x^{\frac{1}{a}}-1]$, 5 分

$a(a-1)<0, a-\frac{1}{a}<0, y=a(a-1)x^{\frac{1}{a}}-1$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增,

所以 $a(a-1)x^{\frac{1}{a}}-1\leq a(a-1)-1=a^2-a-1<0$,

又 $x^{\frac{1}{a}-1}\geq 0$, 所以 $f'(x)=x^{\frac{1}{a}-1}[a(a-1)x^{\frac{1}{a}}-1]\leq 0$,

从而 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=a-1-a=-1$ 6 分

要证 $e^{\frac{1}{a}}f(e)+f(x)\geq -2$, 只需证 $e^{\frac{1}{a}}f(e)-1\geq -2$, 即 $e^{\frac{1}{a}}f(e)\geq -1$,

亦即 $e^{\frac{1}{a}}f(e)=(a-1)e^{\frac{1}{a}}-a\geq -1$.

令 $g(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}-x(0<x\leq 1)$, 8 分

$g'(x)=e^{\frac{1}{x}}+(x-1)e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+x^2}{x^2}-1$ 9 分

因为 $0<x\leq 1$, 所以 $e^{\frac{1}{x}}-1\leq 0, (x-1)e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+x^2}{x^2}\leq 0$,

所以 $g'(x)=e^{\frac{1}{x}}+(x-1)e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+x^2}{x^2}-1\leq 0$ (当且仅当 $x=1$ 时取等号),

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 10 分

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-1$, 即 $e^{\frac{1}{a}}f(e)\geq -1$.

综上, 当 $0\leq x\leq 1$ 且 $0<a\leq 1$ 时, $e^{\frac{1}{a}}f(e)+f(x)\geq -2$ 12 分

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯