2011 年全国高中数学联合竞赛

第一试

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分. 把答案填在横线上.

1．设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，若中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1,3,5,8\}$，则集合____________.

解 显然，在 A 的所有三元子集中，每个元素均出现了 3 次，所以

$3(a_1+a_2+a_3+a_4)=(-1)+3+5+8=15$，

故 $a_1+a_2+a_3+a_4=5$，于是集合 A 的四个元素分别为 5－（－1）＝6，5－3＝2，5－5＝0，5－8＝－3，因此，集合 $A=\{-3,0,2,6\}$.

2．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域为______________.

解 设 $x=\tan\theta,-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\theta\neq\dfrac{\pi}{4}$，则

$$f(x)=\frac{\dfrac{1}{\cos\theta}}{\tan\theta-1}=\frac{1}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})}.$$

设 $u=\sqrt{2}\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})$，则 $-\sqrt{2}\le u<1$，且 $u\neq 0$，

所以 $f(x)=\dfrac{1}{u}\in(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}]\cup(1,+\infty)$.

3．设为正实数，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$，$(a-b)^2=4(ab)^3$，则____________.

解 由 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$，得 $a+b\le 2\sqrt{2}ab$.

又 $(a+b)^2=4ab+(a-b)^2=4ab+4(ab)^3\ge 4\cdot 2\sqrt{ab\cdot(ab)^3}=8(ab)^2$，

即 $a+b\ge 2\sqrt{2}ab$.　　①

于是 $a+b=2\sqrt{2}ab$.　　②

再由不等式①中等号成立的条件，得 $ab=1$. 与②联立解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}-1,\\ b=\sqrt{2}+1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\sqrt{2}+1,\\ b=\sqrt{2}-1,\end{cases}$

故 $\log_a b=-1$.

4．如果$\cos^5\theta-\sin^5\theta<7\left(\sin^3\theta-\cos^3\theta\right)$，$\theta\in\left[0,2\pi\right)$，那么的取值范围是________.

解 不等式$\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$等价于$\sin^3\theta+\frac{1}{7}\sin^5\theta>\cos^3\theta+\frac{1}{7}\cos^5\theta$，

又$f(x)=x^3+\frac{1}{7}x^5$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数，所以$\sin\theta>\cos\theta$，

故$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{4}\ (k\in\mathbf{Z})$.

因为$\theta\in[0,2\pi)$，所以θ的取值范围是$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

5．现安排7名同学去参加5个运动项目，要求甲、乙两同学不能参加同一个项目，每个项目都有人参加，每人只参加一个项目，则满足上述要求的不同安排方案数为__________.（用数字作答）

解 由题设条件可知，满足条件的方案有两种情形：

（1）有一个项目有3人参加，共有$C_7^3\cdot5!-C_5^1\cdot5!=3600$种方案；

（2）有两个项目各有2人参加，共有$\frac{1}{2}(C_7^2\cdot C_5^2)\cdot5!-C_5^2\cdot5!=11400$种方案；

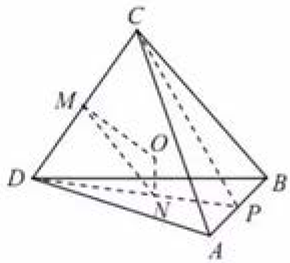
所以满足题设要求的方案数为$3600+11400=15000$.

6．在四面体中，已知$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=60^\circ$，$AD=BD=3$，$CD=2$，则四面体的外接球的半径为__________.

解 设四面体$ABCD$的外接球球心为O，则O在过$\triangle ABD$的外心N且垂直于平面ABD的垂线上．由题设知，$\triangle ABD$是正三角形，则点N为$\triangle ABD$的中心．设P,M分别为AB,CD的中点，则N在DP上，且$ON\perp DP$，$OM\perp CD$．

因为$\angle CDA=\angle CDB=\angle ADB=60^\circ$，设$CD$与平面$ABD$所成角为$\theta$，可求得

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}},\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.



在$\triangle DMN$中，$DM=\frac{1}{2}CD=1,DN=\frac{2}{3}\cdot DP=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot3=\sqrt{3}$.

由余弦定理得 $MN^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=2$，

故$MN=\sqrt{2}$.

四边形$DMON$的外接圆的直径 $OD=\frac{MN}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$.

故球O的半径$R=\sqrt{3}$.

7．直线 $x-2y-1=0$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A,B 两点，C 为抛物线上的一点，$\angle ACB=90^\circ$，则点 C 的坐标为________．

解　设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(t^2,2t)$，由 $\begin{cases}x-2y-1=0,\\ y^2=4x,\end{cases}$

得　$y^2-8y-4=0$，则 $y_1+y_2=8$，$y_1\cdot y_2=-4$．

又 $x_1=2y_1+1,x_2=2y_2+1$，所以
$x_1+x_2=2(y_1+y_2)+2=18$，$x_1\cdot x_2=4y_1\cdot y_2+2(y_1+y_2)+1=1$．

因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，即有

$(t^2-x_1)(t^2-x_2)+(2t-y_1)(2t-y_2)=0$，

即 $t^4-(x_1+x_2)t^2+x_1\cdot x_2+4t^2-2(y_1+y_2)t+y_1\cdot y_2=0$，

即 $t^4-14t^2-16t-3=0$，

即 $(t^2+4t+3)(t^2-4t-1)=0$．

显然 $t^2-4t-1\neq 0$，否则 $t^2-2\cdot 2t-1=0$，则点 C 在直线 $x-2y-1=0$ 上，从而点 C 与点 A 或点 B 重合．

所以 $t^2+4t+3=0$，解得 $t_1=-1,t_2=-3$．

故所求点 C 的坐标为 $(1,-2)$ 或 $(9,-6)$．

8．已知 $a_n=C_{200}^{n}\cdot\left(\sqrt[3]{6}\right)^{200-n}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}(n=1,2,\cdots,95)$，则数列 $\{a_n\}$ 中整数项的个数为________．

解　$a_n=\mathrm{C}_{200}^{n}\cdot 3^{\frac{200-n}{3}}\cdot 2^{\frac{400-5n}{6}}$．

要使 $a_n(1\le n\le 95)$ 为整数，必有 $\dfrac{200-n}{3},\dfrac{400-5n}{6}$ 均为整数，从而 $6\mid n+4$．

当 $n=2,8,14,20,26,32,38,44,50,56,62,68,74,80$ 时，$\dfrac{200-n}{3}$ 和 $\dfrac{400-5n}{6}$ 均为非负整数，所以 a_n 为整数，共有 14 个．

当 $n=86$ 时，$a_{86}=\mathrm{C}_{200}^{86}\cdot 3^{38}\cdot 2^{-5}$，在 $\mathrm{C}_{200}^{86}=\dfrac{200!}{86!\cdot 114!}$ 中，

$200!$ 中因数 2 的个数为 $\left[\dfrac{200}{2}\right]+\left[\dfrac{200}{2^2}\right]+\left[\dfrac{200}{2^3}\right]+\left[\dfrac{200}{2^4}\right]+\left[\dfrac{200}{2^5}\right]+\left[\dfrac{200}{2^6}\right]+\left[\dfrac{200}{2^7}\right]=197$，

同理可计算得 $86!$ 中因数 2 的个数为 82，$114!$ 中因数 2 的个数为 110，

所以 C_{200}^{86} 中因数 2 的个数为 $197-82-110=5$，故 a_{86} 是整数．

当 $n=92$ 时，$a_{92}=\mathrm{C}_{200}^{92}\cdot 3^{36}\cdot 2^{-10}$，在 $\mathrm{C}_{200}^{92}=\dfrac{200!}{92!\cdot 108!}$ 中，同样可求得 $92!$ 中因数 2 的个数为

88,108! 中因数 2 的个数为 105,故 C_{200}^{88} 中因数 2 的个数为 $197-88-105=4$，故 a_{92} 不是整数.

因此，整数项的个数为 $14+1=15$.

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9. 设函数 $f(x)=\left|\lg(x+1)\right|$，实数 $a,b(a<b)$ 满足 $f(a)=f\left(-\dfrac{b+1}{b+2}\right)$，$f(10a+6b+21)=4\lg 2$，求 a,b 的值.

解 ∵ $f(a)=f(-\dfrac{b+1}{b+2})$，∴ $|\lg(a+1)|=|\lg(-\dfrac{b+1}{b+2}+1)|=|\lg(\dfrac{1}{b+2})|=|\lg(b+2)|$，

∴ $a+1=b+2$ 或 $(a+1)(b+2)=1$，

又∵ $a<b$，∴ $a+1\neq b+2$，∴ $(a+1)(b+2)=1$. ……………………4 分

又由 $f(a)=|\lg(a+1)|$ 有意义知 $0<a+1$，从而 $0<a+1<b+1<b+2$，

于是 $0<a+1<1<b+2$.

所以 $(10a+6b+21)+1=10(a+1)+6(b+2)=6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}>1$. ……………………8 分

从而 $f(10a+6b+21)=|\lg[6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}]|=\lg[6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}]$.

又 $f(10a+6b+21)=4\lg 2$，所以 $\lg[6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}]=4\lg 2$，

故 $6(b+2)+\dfrac{10}{b+2}=16$. ……………………12 分

解得 $b=-\dfrac{1}{3}$ 或 $b=-1$（舍去）.

把 $b=-\dfrac{1}{3}$ 代入 $(a+1)(b+2)=1$ 解得 $a=-\dfrac{2}{5}$.

所以 $a=-\dfrac{2}{5}$，$b=-\dfrac{1}{3}$. ……………………16 分

10．已知数列满足：$a_1=2t-3\left(t\in\mathbf{R}且t\neq\pm1\right)$，$a_{n+1}=\dfrac{\left(2t^{n+1}-3\right)a_n+2\left(t-1\right)t^n-1}{a_n+2t^n-1}\left(n\in\mathbf{N}\right)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $t>0$，试比较与的大小.

解 （1）由原式变形得 $a_{n+1}=\dfrac{2(t^{n+1}-1)(a_n+1)}{a_n+2t^n-1}-1$，

则 $\frac{a_{n+1}+1}{t^{n+1}-1}=\frac{2(a_n+1)}{a_n+2t^n-1}=\frac{\frac{2(a_n+1)}{t^n-1}}{\frac{a_n+1}{t^n-1}+2}$.

记 $\frac{a_n+1}{t^n-1}=b_n$，则 $b_{n+1}=\frac{2b_n}{b_n+2}$，$b_1=\frac{a_1+1}{t-1}=\frac{2t-2}{t-1}=2$. ……………………5 分

又 $\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2},\frac{1}{b_1}=\frac{1}{2}$，从而有 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_1}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$，

故 $\frac{a_n+1}{t^n-1}=\frac{2}{n}$，于是有 $a_n=\frac{2(t^n-1)}{n}-1$. ……………………10 分

（2）$a_{n+1}-a_n=\frac{2(t^{n+1}-1)}{n+1}-\frac{2(t^n-1)}{n}$

$$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[n(1+t+\cdots+t^{n-1}+t^n)-(n+1)(1+t+\cdots+t^{n-1})\right]$$

$$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[nt^n-(1+t+\cdots+t^{n-1})\right]=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[(t^n-1)+(t^n-t)+\cdots+(t^n-t^{n-1})\right]$$

$$=\frac{2(t-1)^2}{n(n+1)}\left[(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1)+t(t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+1)+\cdots+t^{n-1}\right],$$

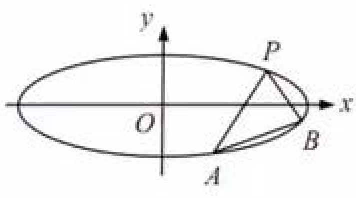
显然在 $t>0\ (t\neq 1)$ 时恒有 $a_{n+1}-a_n>0$，故 $a_{n+1}>a_n$. ……………………20 分

11. 作斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l 与椭圆 C：$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 交于 A、B 两点（如图所示），且 $P\left(3\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 在直线 l 的左上方.

（1）证明：$\triangle PAB$ 的内切圆的圆心在一条定直线上；

（2）若 $\angle APB=60^\circ$，求 $\triangle PAB$ 的面积.

解 （1）设直线 l：$y=\frac{1}{3}x+m$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.



将 $y=\frac{1}{3}x+m$ 代入 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 中，化简整理得

$2x^2+6mx+9m^2-36=0$.

于是有 $x_1+x_2=-3m,\quad x_1x_2=\frac{9m^2-36}{2}$，

$k_{PA}=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}},k_{PB}=\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}$. ……………………5 分

则 $k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}}+\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}=\frac{(y_1-\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})+(y_2-\sqrt{2})(x_1-3\sqrt{2})}{(x_1-3\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})}$，

上式中，分子 $=(\frac{1}{3}x_1+m-\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})+(\frac{1}{3}x_2+m-\sqrt{2})(x_1-3\sqrt{2})$

$$=\frac{2}{3}x_1x_2+(m-2\sqrt{2})(x_1+x_2)-6\sqrt{2}(m-\sqrt{2})$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{9m^2-36}{2}+(m-2\sqrt{2})(-3m)-6\sqrt{2}(m-\sqrt{2})$$

$$=3m^2-12-3m^2+6\sqrt{2}m-6\sqrt{2}m+12=0,$$

从而，$k_{PA}+k_{PB}=0$.

又P在直线l的左上方，因此，$\angle APB$的角平分线是平行于y轴的直线，所以$\triangle PAB$的内切圆的圆心在直线$x=3\sqrt{2}$上.　……………………10分

（2）若$\angle APB=60^\circ$时，结合（1）的结论可知$k_{PA}=\sqrt{3},k_{PB}=-\sqrt{3}$.

直线PA的方程为：$y-\sqrt{2}=\sqrt{3}(x-3\sqrt{2})$，代入$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$中，消去$y$得

$14x^2+9\sqrt{6}(1-3\sqrt{3})x+18(13-3\sqrt{3})=0$.

它的两根分别是x_1和$3\sqrt{2}$，所以$x_1\cdot 3\sqrt{2}=\frac{18(13-3\sqrt{3})}{14}$，即$x_1=\frac{3\sqrt{2}(13-3\sqrt{3})}{14}$.

所以$|PA|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\cdot|x_1-3\sqrt{2}|=\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}+1)}{7}$.　……………………15分

同理可求得$|PB|=\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)}{7}$.

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot|PA|\cdot|PB|\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}+1)}{7}\cdot\frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{117\sqrt{3}}{49}$.　…20分