丰台区 2020—2021 学年度第一学期期末练习

高二数学　　2021.01

第一部分 （选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1． 已知 $A(2,\sqrt{3})$，$B(1,0)$，则直线 AB 的倾斜角为

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{2\pi}{3}$　　（D）$\frac{5\pi}{6}$

2． 过点 $(1,2)$ 且与直线 $x+2y-9=0$ 平行的直线方程是

（A）$2x-y=0$　　（B）$2x-y-3=0$

（C）$x+2y-5=0$　　（D）$x+2y-4=0$

3． 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-1$，$a_4=8$，则 a_7 等于

(A) 32　　(B) -32　　(C) 64　　(D) -64

4． 抛掷两枚质地均匀的硬币，设事件 A= “第一枚硬币正面朝上”，事件 B= “第二枚硬币反面朝上”，则 A 与 B 的关系为

(A) 互斥　　(B) 相互对立　　(C) 相互独立　　(D) 相等

5． 已知平面 α，β 的法向量分别为 $\boldsymbol{a}=(-1,2,4)$，$\boldsymbol{b}=(x,-1,-2)$，若 $\alpha\perp\beta$，则 x 的值为

(A) 10　　(B) -10　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $-\frac{1}{2}$

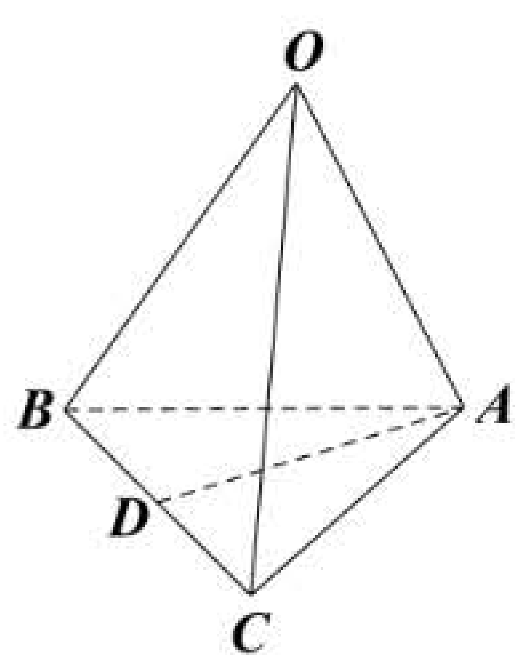
6． 已知圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-8y+7=0$，则圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系是

(A) 相离　　(B) 相交　　(C) 内切　　(D) 外切

7． 如图，在三棱锥 $O-ABC$ 中，D 是 BC 的中点，若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{AD}$ 等于

(A) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　(B) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

(C) $-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　　(D) $-\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$



8． 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，点 M 在抛物线 C 上，点 N 在准线 l 上，且 $MN\perp l$．若 $|MF|=8$，$\angle MFN=60°$，则 p 的值为

(A) 8　　(B) 4　　(C) 2　　(D) 1

9．已知等差数列$\{a_n\}$是无穷数列，若$a_1<a_2<0$，则数列$\{a_n\}$的前n项和S_n

(A) 无最大值，有最小值　(B) 有最大值，无最小值
(C) 有最大值，有最小值　(D) 无最大值，无最小值

10．已知点M在椭圆$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$上运动，点$N$在圆$x^2+(y-1)^2=1$上运动，则$|MN|$的最大值为

(A) $1+\sqrt{19}$　(B) $1+2\sqrt{5}$　(C) 5　(D) $\frac{11}{2}$

第二部分（非选择题　共60分）

二、填空题共6小题，每小题4分，共24分．

11．椭圆$\frac{x^2}{9}+y^2=1$的离心率是__．

12．已知圆$(x+3)^2+(y-1)^2=r^2\ (r>0)$与$x$轴相切，则$r=$__．

13．已知直线$x-y+2=0$与圆$x^2+y^2=3$交于A，B两点，则$|AB|=$__．

14．对于数列$\{a_n\}$，若点$(n,a_n)\ (n\in\mathbf{N}^*)$都在函数$f(x)=2^x$的图象上，则数列$\{a_n\}$的前4项和$S_4=$__．

15．已知双曲线$C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$，则C的右焦点的坐标为__；C的焦点到其渐近线的距离为__．

16．如果数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$（$k$为常数），那么数列$\{a_n\}$叫做等比差数列，$k$叫做公比差．给出下列四个结论：

①若数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2n$，则该数列是等比差数列；

②数列$\{n\cdot 2^n\}$是等比差数列；

③所有的等比数列都是等比差数列；

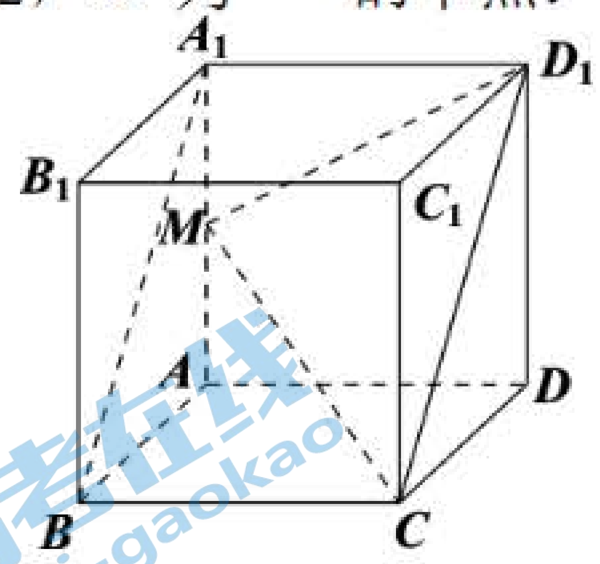
④存在等差数列是等比差数列．

其中所有正确结论的序号是__．

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求．全部选对得4分，不选或错选得0分，其他得2分．

三、解答题共 4 小题，共 36 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

17.（本小题共 9 分）如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为 AA_1 的中点．



（Ⅰ）求证：A_1B // 平面 MCD_1；

（Ⅱ）求平面 MCD_1 与平面 C_1CD_1 夹角的余弦值．

18.（本小题共 9 分）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=4$，$a_3+a_4=17$．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$， 再从① $b_{n+1}=2b_n$；② $2b_{n+1}=b_n$；③ $b_{n+1}=-b_n$ 这三个条件中任选一个作为已知，求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

19.（本小题共 8 分） 2020 年是我国 5G 网络建设的加速之年. 截至 2020 年底，中国已建成全球最大的 5G 网络. 为了切实推动移动网络质量提升，不断改善用户体验，中国信通院受工信部委托，定期在全国范围内开展重点场所移动网络质量专项测评. 其中一项测评内容是在每座受测城市中挑选一条典型路段，以评估当地 5G 网络发展水平. 其中 5 座受测城市的 5G 综合下载速率（单位：Mbps）数据如下表：

城市	**路段**	**5G 综合下载速率（单位：Mbps）**
福州	五四路	708.92
广州	大学城外/中/内环	817.13
哈尔滨	红军街	630.34
杭州	环城东路	882.60
成都	二环高架	916.02

（Ⅰ）从以上 5 座城市中随机选取 2 座城市进行分析，求选取的 2 座城市“5G 综合下载速率”都大于 800 Mbps 的概率；

（Ⅱ）甲、乙两家 5G 网络运营商分别从以上 5 座城市中随机选取 1 座城市考察（甲、乙的选取互不影响），求甲、乙两家运营商中恰有 1 家选取的城市“5G 综合下载速率”大于 800 Mbps 的概率.

20.（本小题共 10 分） 已知椭圆 $\omega:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(-2,0)$，且 $a=2b$.

（Ⅰ）求椭圆 ω 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，过点 $C(1,0)$ 的直线 l 与椭圆 ω 交于 P，Q 两点，且直线 l 与 x 轴不重合，直线 AP，AQ 分别与 y 轴交于 M，N 两点. 求证：$|OM|\cdot|ON|$ 为定值.

丰台区 2020—2021 学年度第一学期期末练习

高二数学 2021.01

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知 $A(2,\sqrt{3})$，$B(1,0)$，则直线 AB 的倾斜角为

（A）$\frac{\pi}{6}$ （B）$\frac{\pi}{3}$ （C）$\frac{2\pi}{3}$ （D）$\frac{5\pi}{6}$

解析：$\tan\alpha=k=\frac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$，又 $\alpha\in[0,\pi)$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，选 B.

2．过点 $(1,2)$ 且与直线 $x+2y-9=0$ 平行的直线方程是

（A）$2x-y=0$ （B）$2x-y-3=0$

（C）$x+2y-5=0$ （D）$x+2y-4=0$

解析：直线斜率 $-\frac{1}{2}$，故 $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$，整理得 $x+2y-5=0$，选 C.

3．已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-1$，$a_4=8$，则 a_7 等于

(A) 32 (B) -32 (C) 64 (D) -64

解析：$a_4^2=a_1\cdot a_7$，$a_7=\frac{64}{-1}=-64$，选 D.

4．抛掷两枚质地均匀的硬币，设事件 A=“第一枚硬币正面朝上”，事件 B=“第二枚硬币反面朝上”，则 A 与 B 的关系为

(A) 互斥 (B) 相互对立 (C) 相互独立 (D) 相等

解析：选 C.

5．已知平面 α，β 的法向量分别为 $\boldsymbol{a}=(-1,2,4)$，$\boldsymbol{b}=(x,-1,-2)$，若 $\alpha\perp\beta$，则 x 的值为

(A) 10 (B) -10 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

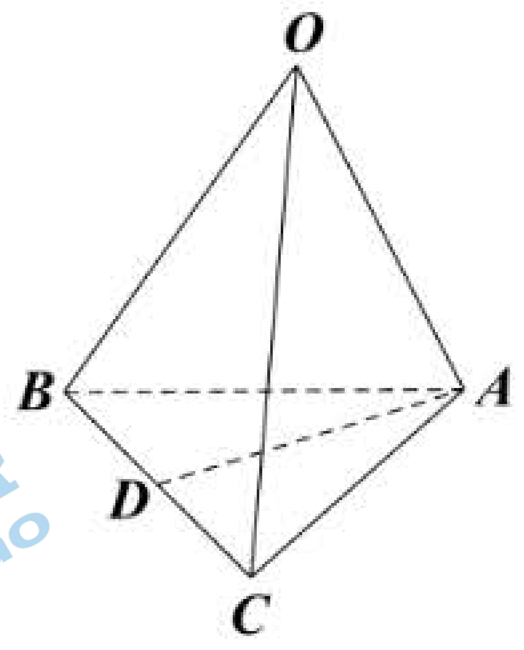
解析：由题，两个法向量垂直，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-x-2-8=0$，故 $x=-10$，选 B.

6．已知圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-8y+7=0$，则圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系是

(A) 相离 (B) 相交 (C) 内切 (D) 外切

解析：圆 $C_2: x^2+(y-4)^2=3^2$ 圆心 $(0,4)$，半径 3，故圆心距 4，半径之和 4，选 D.

7. 如图，在三棱锥 $O-ABC$ 中，D 是 BC 的中点，若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{AD}$ 等于



(A) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　(B) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

(C) $-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　　(D) $-\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

解析：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$，选 C.

8. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，点 M 在抛物线 C 上，点 N 在准线 l 上，且 $MN\perp l$. 若 $|MF|=8$，$\angle MFN=60^\circ$，则 p 的值为

(A) 8　　(B) 4　　(C) 2　　(D) 1

解析：抛物线定义，ΔMFN 为正三角形，可得 $p=\frac{1}{2}\times 8=4$，选 B.

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 是无穷数列，若 $a_1<a_2<0$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n

(A) 无最大值，有最小值　　(B) 有最大值，无最小值

(C) 有最大值，有最小值　　(D) 无最大值，无最小值

解析：首项小于 0，递增的等差数列，选 A.

10. 已知点 M 在椭圆 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ 上运动，点 N 在圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上运动，则 $|MN|$ 的最大值为

(A) $1+\sqrt{19}$　　(B) $1+2\sqrt{5}$　　(C) 5　　(D) $\frac{11}{2}$

解析：过圆心 $(0,1)$ 的圆 $x^2+(y-1)^2=r^2$，联立 $\begin{cases}x^2+2y^2=18\\x^2+(y-1)^2=r^2\end{cases}$，整理得 $y^2+2y+r^2-19=0$，

由 $\Delta\geq 0$ 可得 $r\leq 2\sqrt{5}$，故 $|MN|$ 的最大值为 $2\sqrt{5}+1$，选 B.

第二部分　（非选择题　共 60 分）

二、填空题共 **6** 小题，每小题 **4** 分，共 **24** 分.

11. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 的离心率是__.

解析：$a=3$，$b=1$，$c=2\sqrt{2}$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

12．已知圆 $(x+3)^2+(y-1)^2=r^2\ (r>0)$ 与 x 轴相切，则 $r=$__.

解析：数形结合，圆心 $(-3,1)$，很容易看出，$r=1$.

13．已知直线 $x-y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2=3$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$__.

解析：圆心到直线距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3-2}=2$.

14．对于数列 $\{a_n\}$，若点 $(n,a_n)\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 都在函数 $f(x)=2^x$ 的图象上，则数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和 $S_4=$__.

解析：$a_n=2^n$，$S_4=2+4+8+16=30$.

15．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，则 C 的右焦点的坐标为__；C 的焦点到其渐近线的距离为__.

解析：$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=2$，故 C 的右焦点的坐标为 $(2,0)$；

渐近线 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，一般式 $\pm\sqrt{3}x+3y=0$，距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}}=1$.

16. 如果数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=k$（$k$为常数），那么数列$\{a_n\}$ 叫做等比差数列，k叫做公比差．给出下列四个结论：

①若数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2n$，则该数列是等比差数列；

②数列$\{n\cdot 2^n\}$是等比差数列；

③所有的等比数列都是等比差数列；

④存在等差数列是等比差数列.

其中所有正确结论的序号是__.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求. 全部选对得 4 分，不选或错选得 0 分，其他得 2 分.

解析：对于①，若数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2n$，则$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，①正确；

对于②，若$a_n=n\cdot 2^n$，$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{-2}{n(n+1)}\neq$常数，②错误；

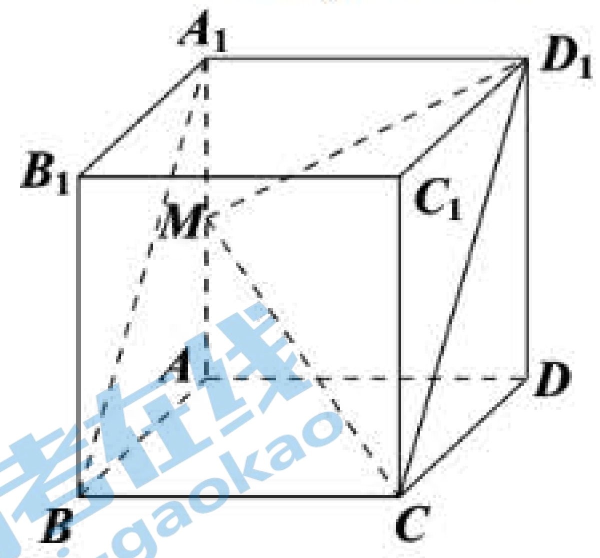
对于③，等比数列$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q-q=0$，③正确；

对于④，取等差数列$a_n=1$，$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1-1=0$，符合题意，④正确.

综上，填①③④.

三、解答题共 4 小题，共 36 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

17.（本小题共 9 分）如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为 AA_1 的中点．



（Ⅰ）求证：A_1B // 平面 MCD_1；

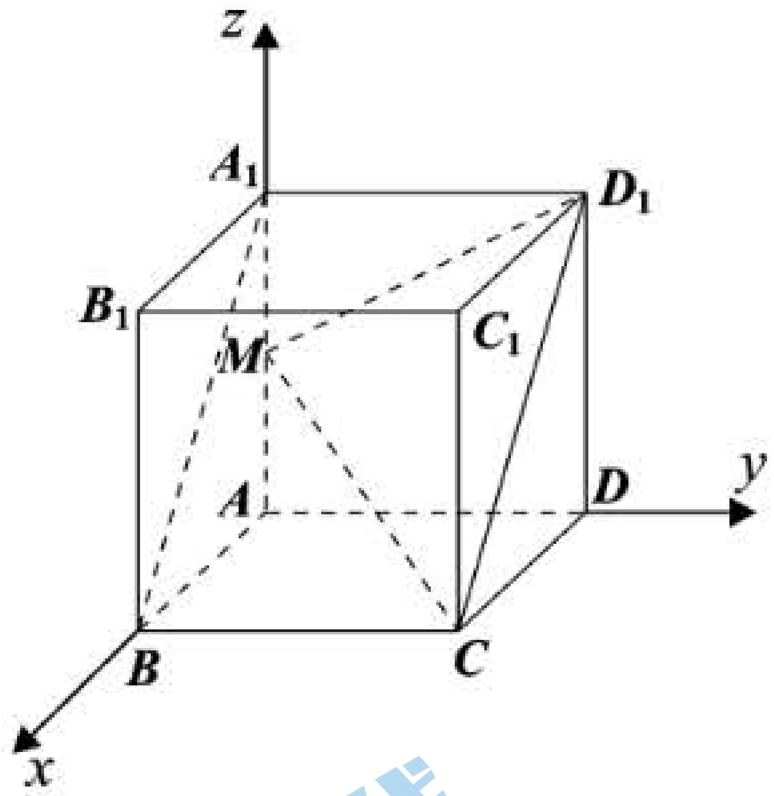
（Ⅱ）求平面 MCD_1 与平面 C_1CD_1 夹角的余弦值．

解：（Ⅰ）如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$．

因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 是 AA_1 的中点，

所以 $A(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$M(0,0,1)$，$D_1(0,2,2)$，

$A_1(0,0,2)$，$B(2,0,0)$．



$\overrightarrow{MD_1}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{MC}=(2,2,-1)$．

设平面 MCD_1 的法向量为 $\boldsymbol{u}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{MD_1}=0,\\ \boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{MC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y+z=0\\ 2x+2y-z=0\end{cases}$．

令 $y=1$，则 $z=-2$，$x=-2$，所以 $\boldsymbol{u}=(-2,1,-2)$．

因为 $\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2)$，

所以 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\boldsymbol{u}=2\times(-2)+0\times1+(-2)\times(-2)=0$．

因为 $A_1B\not\subset$ 平面 MCD_1，

所以 A_1B // 平面 MCD_1． ………………… 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，平面 MCD_1 的法向量 $\boldsymbol{u}=(-2,1,-2)$，

又平面 C_1CD_1 的法向量为 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$．

设平面 MCD_1 与平面 C_1CD_1 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{u},\overrightarrow{AD}>|=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{2}{3\times2}=\dfrac{1}{3}$，

所以平面 MCD_1 与平面 C_1CD_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$． ………………… 9 分

18.（本小题共 9 分） 已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_2=4$，$a_3+a_4=17$．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$， 再从①$b_{n+1}=2b_n$；②$2b_{n+1}=b_n$；③$b_{n+1}=-b_n$这三个条件中任选一个作为已知，求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和T_n．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d．

由$\begin{cases}a_2=4\\ a_3+a_4=17\end{cases}$，可得$\begin{cases}a_1+d=4\\ 2a_1+5d=17\end{cases}$．解得$a_1=1$，$d=3$．

所以$a_n=a_1+(n-1)d=3n-2$． ………………… 4 分

（Ⅱ）

选①：

由$b_1=2$，$b_{n+1}=2b_n$可得$b_n\neq 0$，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，所以$\{b_n\}$是等比数列，公比$q=2$．

所以$b_n=b_1q^{n-1}=2^n$．

所以$T_n=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)=\dfrac{n(1+3n-2)}{2}+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}$

$=\dfrac{3n^2-n}{2}+2^{n+1}-2$． ………………… 9 分

选②：

由$b_1=2$，$2b_{n+1}=b_n$可得$b_n\neq 0$，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{1}{2}$，所以$\{b_n\}$是等比数列，公比$q=\dfrac{1}{2}$．

所以$b_n=b_1q^{n-1}=2\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}=(\dfrac{1}{2})^{n-2}$．

所以$T_n=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)=\dfrac{n(1+3n-2)}{2}+\dfrac{2(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{3n^2-n}{2}-(\dfrac{1}{2})^{n-2}+4$．

选③：

由 $b_1=2$， $b_{n+1}=-b_n$ 可得 $b_n\neq 0$， $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=-1$， 所以 $\{b_n\}$ 是等比数列，公比 $q=-1$，

所以 $b_n=b_1q^{n-1}=2\cdot(-1)^{n-1}$.

所以 $T_n=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)\quad=\dfrac{n(1+3n-2)}{2}+\dfrac{2(1-(-1)^n)}{1-(-1)}$

$=\dfrac{3n^2-n+2}{2}-(-1)^n$.

19.（本小题共 8 分）2020 年是我国 5G 网络建设的加速之年. 截至 2020 年底，中国已建成全球最大的 5G 网络. 为了切实推动移动网络质量提升，不断改善用户体验，中国信通院受工信部委托，定期在全国范围内开展重点场所移动网络质量专项测评. 其中一项测评内容是在每座受测城市中挑选一条典型路段，以评估当地 5G 网络发展水平. 其中 5 座受测城市的 5G 综合下载速率（单位：Mbps）数据如下表：

城市	路段	5G 综合下载速率（单位：Mbps）
福州	五四路	708.92
广州	大学城外/中/内环	817.13
哈尔滨	红军街	630.34
杭州	环城东路	882.60
成都	二环高架	916.02

（Ⅰ）从以上 5 座城市中随机选取 2 座城市进行分析，求选取的 2 座城市“5G 综合下载速率”都大于 800 Mbps 的概率；

（Ⅱ）甲、乙两家 5G 网络运营商分别从以上 5 座城市中随机选取 1 座城市考察（甲、乙的选取互不影响），求甲、乙两家运营商中恰有 1 家选取的城市“5G 综合下载速率”大于 800 Mbps 的概率.

解：（Ⅰ）5 座城市中“5G 综合下载速率”大于 800 Mbps 的有 3 座，设为 A_1,A_2,A_3，

“5G 综合下载速率”不大于 800 Mbps 的有 2 座，设为 B_1,B_2 .

随机选取 2 座城市所有可能为：A_1A_2，A_1A_3，A_1B_1，A_1B_2，A_2A_3，A_2B_1，A_2B_2，A_3B_1，A_3B_2，B_1B_2

共 10 种.

其中 2 座城市“5G 综合下载速率”都大于 800 Mbps 的有 A_1A_2，A_1A_3，A_2A_3 共 3 种.

设两个城市“5G 综合下载速率”都大于 800 Mbps 为事件 M，

所以 $P(M)=\dfrac{3}{10}$. ………………… 4 分

（Ⅱ）设甲选取的城市“5G 综合下载速率”大于 800 Mbps 为事件 C，乙选取的城市“5G 综合下载速率”大于 800 Mbps 为事件 D，恰有 1 家运营商选取的城市“5G 综合下载速率”大于 800 Mbps 为事件 N.

依题意，事件 $P(C)=P(D)=\dfrac{3}{5}$，

所以 $P(N)=P(C\overline{D}\cup\overline{C}D) =P(C\overline{D})+P(\overline{C}D)=P(C)P(\overline{D})+P(\overline{C})P(D)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}$

$=\dfrac{12}{25}$. ………………… 8 分

20.（本小题共 10 分）已知椭圆 $\omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(-2,0)$，且 $a=2b$.

（Ⅰ）求椭圆 ω 的方程;

（Ⅱ）设 O 为原点，过点 $C(1,0)$ 的直线 l 与椭圆 ω 交于 P，Q 两点，且直线 l 与 x 轴不重合，直线 AP，AQ 分别与 y 轴交于 M，N 两点. 求证：$|OM|\cdot|ON|$ 为定值.

解:（Ⅰ）因为椭圆 ω 过点 $A(-2,0)$，所以 $a=2$. 因为 $a=2b$，所以 $b=1$.

所以椭圆 ω 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………… 3 分

（Ⅱ）当直线 l 斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$. 不妨设此时 $P(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$Q(1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$，

所以直线 AP 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)$，即 $M(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$.

直线 AQ 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)$，即 $N(0,-\frac{\sqrt{3}}{3})$.

所以 $|OM|\cdot|ON|=\frac{1}{3}$.

当直线 l 斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$. 依题意，$\Delta>0$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-4}{4k^2+1}$.

又直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

令 $x=0$，得点 M 的纵坐标为 $y_M=\frac{2y_1}{x_1+2}$，即 $M(0,\frac{2y_1}{x_1+2})$. 同理，得 $N(0,\frac{2y_2}{x_2+2})$.

所以 $|OM|\cdot|ON|=\left|\frac{4y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}\right|=\left|\frac{4k^2(x_1-1)(x_2-1)}{(x_1+2)(x_2+2)}\right|=\left|\frac{4k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}\right|$

$$=\left|\frac{4k^2(\frac{4k^2-4}{4k^2+1}-\frac{8k^2}{4k^2+1}+1)}{\frac{4k^2-4}{4k^2+1}+\frac{16k^2}{4k^2+1}+4}\right|=\left|\frac{4k^2(4k^2-4-8k^2+4k^2+1)}{4k^2-4+16k^2+16k^2+4}\right|=\left|\frac{12k^2}{36k^2}\right|=\frac{1}{3}.$$

综上，$|OM|\cdot|ON|$ 为定值，定值为 $\frac{1}{3}$. ………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。