北师大附属实验中学

2019—2020 学年度高一年级第一学期数学期中练习试卷（二卷）

班级________ 分层班级 __________姓名__________ 学号__________ 分数__________

四、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，将正确答案的序号填在答题纸上）

18. 函数 $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$ 的定义域为__________

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(\dfrac{1}{2})+f(\dfrac{1}{3})+f(\dfrac{1}{4})=$ ________.

20. 设 $x>0$，$y>0$，$x+2y=5$，则 $\dfrac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为____.

21. 李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到 120 元，顾客就少付 x 元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的 80%．

①当 $x=10$ 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，需要支付____元；

②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为____.

22. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正实数 m，使得对任意 $x\in D$，都有 $f(x+m)>f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的"m 型增函数"．已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=|x-a|-a$（$a\in\mathbf{R}$）．若 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的"20 型增函数"，则实数 a 的取值范围是__________.

五、解答题（本大题共 3 小题，共 30 分，写出必要的解答过程,将答案写在答题纸上）

23. （本小题满分 10 分）

已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+2k=0$.

（1）若方程有实数根，求实数 k 的取值范围；

（2）如果 k 是满足（1）的最大整数，且方程 $x^2-4x+2k=0$ 的根是一元二次方程 $x^2-2mx+3m-1=0$ 的一个根，求 m 的值及这个方程的另一个根.

24.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)(x+a)$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，求 a 的值;

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值.

25. （本小题满分 10 分）

对于区间$[a,b]$ $(a<b)$，若函数$y=f(x)$同时满足：① $f(x)$在$[a,b]$上是单调函数；

② 函数$y=f(x)$，$x\in[a,b]$的值域是$[a,b]$，则称区间$[a,b]$为函数$f(x)$的“保值”区间.

(Ⅰ)求函数$y=x^2$的所有“保值”区间；

(Ⅱ)函数$y=x^2+m$ $(m\neq 0)$是否存在“保值”区间？若存在，求出m的取值范围；若不存在，说明理由.

北师大附属实验中学

2019—2020学年度高一年级第一学期数学期中练习试卷（二卷）

四、填空题

18. $[-1,3]$

19. $\frac{7}{2}$

20. $4\sqrt{3}$

21. 130，15

22. $a<5$

五、解答题

23. （本小题满分 10 分）

（1）由题意得 $\Delta\geq 0$，所以 $16-8k\geq 0$，解得 $k\leq 2$． ………3 分

（2）由（1）可知 $k=2$． ………4 分

所以方程 $x^2-4x+2k=0$ 的根 $x_1=x_2=2$． ………5 分

$\therefore$ 方程 $x^2-2mx+3m-1=0$ 的一个根为 2，

$\therefore 4-4m+3m-1=0$，解得 $m=3$． ………7 分

$\therefore$ 方程 $x^2-2mx+3m-1=0=x^2-6x+8=0$，解得 $x=2$ 或 $x=4$． ………9 分

所以方程 $x^2-2mx+3m-1=0$ 的另一根为 4． ………10 分

24.（本小题满分 10 分）

（Ⅰ）解法一：因为 $f(x)=(x-2)(x+a)=x^2+(a-2)x-2a$，

所以，$f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=\frac{2-a}{2}$． ………1 分

由 $\frac{2-a}{2}=1$，得 $a=0$． ………3 分

解法二：因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

所以必有 $f(0)=f(2)$ 成立，

所以 $-2a=0$，得 $a=0$． ………3 分

（Ⅱ）解：函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=\dfrac{2-a}{2}$.

① 当 $\dfrac{2-a}{2}\le 0$，即 $a\ge 2$ 时，

因为 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(0)=-2a$． ………5 分

当 $0<\dfrac{2-a}{2}<1$，即 $0<a<2$ 时，

因为 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{2-a}{2})$ 上单调递减，在区间 $(\dfrac{2-a}{2},1)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(\dfrac{2-a}{2})=-(\dfrac{2+a}{2})^2$． ………7 分

② 当 $\dfrac{2-a}{2}\ge 1$，即 $a\le 0$ 时，

因为 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(1)=-(1+a)$． ………9 分

综上：$f(x)_{\min}=\begin{cases}-2a, a\ge 2\\ -\left(\dfrac{a+2}{2}\right)^2, 0<a<2\\ -1-a, a\le 0\end{cases}$ ………10 分

25. （本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）因为函数 $y=x^2$ 的值域是 $[0,+\infty)$，且 $y=x^2$ 在 $[a,b]$ 的值域是 $[a,b]$，

所以 $[a,b]\subseteq[0,+\infty)$，所以 $a\ge 0$，从而函数 $y=x^2$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，

故有 $\begin{cases}a^2=a,\\ b^2=b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0, \text{或 } a=1,\\ b=0, \text{或 } b=1.\end{cases}$

又 $a<b$，所以 $\begin{cases}a=0,\\ b=1.\end{cases}$

所以函数 $y=x^2$ 的“保值”区间为 $[0,1]$． ………………4 分

（Ⅱ）若函数 $y=x^2+m$ $(m\ne 0)$ 存在“保值”区间，则有：

① 若 $a<b\le 0$，此时函数 $y=x^2+m$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，

所以 $\begin{cases} a^2+m=b, \\ b^2+m=a. \end{cases}$ 消去 m 得 $a^2-b^2=b-a$， 整理得 $(a-b)(a+b+1)=0$.

因为 $a<b$， 所以 $a+b+1=0$， 即 $a=-b-1$.

又 $\begin{cases} b\le 0, \\ -b-1<b, \end{cases}$ 所以 $-\dfrac{1}{2}<b\le 0$.

因为 $m=-b^2+a=-b^2-b-1=-\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}\quad\left(-\dfrac{1}{2}<b\le 0\right)$，

所以 $-1\le m<-\dfrac{3}{4}$.

② 若 $b>a\ge 0$，此时函数 $y=x^2+m$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，

所以 $\begin{cases} a^2+m=a, \\ b^2+m=b. \end{cases}$ 消去 m 得 $a^2-b^2=a-b$， 整理得 $(a-b)(a+b-1)=0$.

因为 $a<b$， 所以 $a+b-1=0$， 即 $b=1-a$.

又 $\begin{cases} a\ge 0, \\ a<1-a, \end{cases}$ 所以 $0\le a<\dfrac{1}{2}$.

因为 $m=-a^2+a=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\quad\left(0\le a<\dfrac{1}{2}\right)$，

所以 $0\le m<\dfrac{1}{4}$.

综合 ①、② 得，函数 $y=x^2+m\quad(m\ne 0)$ 存在“保值”区间，此时 m 的取值范围是

$\left[-1,-\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$. ····················10 分