

## 第 39 届全国中学生物理竞赛决赛理论试题与参考解答

一、(40 分) 如图 1a, 一段抛物线形状的刚性金属丝固定在竖直平面内, 抛物线方程为  $y = ax^2$  ( $y$  轴竖直向上,  $a$  为待定常量); 一长度为  $2l$  的匀质刚性细杆的两端 A、B 各有一个小圆孔, 两圆孔都套在金属丝上。圆孔和金属丝之间非常光滑, 摩擦力非常小, 在问题 (1)、(2) 和 (3) 中可忽略。若给细杆一个冲量, 使其运动; 经过足够长的时间, 细杆静止于平衡位置, 此时细杆和水平方向之间的夹角  $\theta = 30^\circ$ 。已知重力加速度大小为  $g$ 。

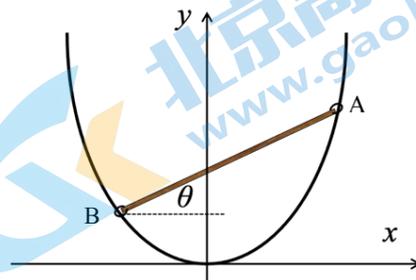


图 1a

- (1) 求待定常量  $a$ ;
- (2) 若杆在上述平衡位置附近小幅振动, 求振动的频率;
- (3) 细杆静止在上述平衡位置。现有一只小白鼠, 从静止开始由杆底端沿杆往上爬。在爬杆的过程中, 细杆始终保持静止; 假设小白鼠可视为质点, 且小白鼠在杆端不接触金属丝。求小白鼠在时刻  $t$  (以小白鼠开始爬杆的时刻为时刻零点) 沿细杆的位移  $s(t)$ , 小白鼠是否可以爬到细杆顶端? 如果可以, 小白鼠爬到细杆顶端, 最少用时多少?

解答:

(1) 设细杆的质心的坐标为  $(x_c, y_c)$ , 细杆的长度为  $2l$ , 则杆的 A 和 B 端的坐标为:

$$\begin{cases} x_A = x_c + l \cos \theta & x_B = x_c - l \cos \theta \\ y_A = y_c + l \sin \theta & y_B = y_c - l \sin \theta \end{cases} \quad \text{① 2 分}$$

代入抛物线方程得:

$$y_c + l \sin \theta = a(x_c + l \cos \theta)^2 \quad \text{②}$$

$$y_c - l \sin \theta = a(x_c - l \cos \theta)^2 \quad \text{③}$$

联立②③式得:

$$x_c = \frac{\sin \theta}{2a \cos \theta} \quad \text{④ 1 分}$$

$$y_c = \frac{\sin^2 \theta}{4a \cos^2 \theta} + al^2 \cos^2 \theta \quad \text{⑤ 1 分}$$

细杆重力势能为:

$$E_p = mgy_c = mg \frac{\sin^2 \theta}{4a \cos^2 \theta} + mgal^2 \cos^2 \theta \quad \text{⑥ 2 分}$$

平衡点为势能极值点:

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{d\theta} &= mg \frac{\cos^3 \theta \sin \theta + \cos \theta \sin^3 \theta}{2a \cos^4 \theta} - 2mgal^2 \cos \theta \sin \theta \\ &= mg \sin \theta \left( \frac{1}{2a \cos^3 \theta} - 2al^2 \cos \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad \text{⑦ 2 分}$$

解为:

$$\text{I、 } \sin \theta = 0, \text{ 即 } \theta = 0, \text{ 不符题意, 舍去。} \quad \text{⑧}$$

II、

$$\frac{1}{2a \cos^3 \theta} - 2al^2 \cos \theta = 0 \quad \text{⑨}$$

得:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{2al}} \quad \text{⑩}$$

已知  $\theta = 30^\circ$ , 所以:

$$\sqrt{\frac{1}{2al}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (11)$$

即:

$$a = \frac{2}{3l} \quad (12) \text{ 2分}$$

(2) 细杆在平衡位置附近小幅振动, 由机械能守恒得:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 + mg\frac{\sin^2\theta}{4a\cos^2\theta} + mgal^2\cos^2\theta = \text{常量} \quad (13) \text{ 4分}$$

即:

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{1}{2a\cos^2\theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{2a\cos^3\theta} - 2al^2\sin\theta\cos\theta\right)^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + mg\frac{\sin^2\theta}{4a\cos^2\theta} + mgal^2\cos^2\theta = \text{常量} \quad (14) \text{ 2分}$$

令:  $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$  ( $|\Delta\theta| \ll \theta_0$ ),  $\theta_0 = 30^\circ$  为平衡位置, 于是(14)式在  $\theta_0$  附近做小量  $\Delta\theta$  展开, 并且质心动能、相对质心转动动能和势能三部分都保留至(不是常量的)最大一项, 得到近似式:

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{1}{2a\cos^2\theta_0}\right)^2\right]\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ml^2\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{mg}{2}\sin^2\theta_0\left(\frac{3}{2a\cos^4\theta_0} + 2al^2\right)\Delta\theta^2 = \text{常量} \quad (15) \text{ 6分}$$

两边对时间求导得:

$$\left\{\left[\left(\frac{1}{2a\cos^2\theta_0}\right)^2\right] + \frac{1}{3}l^2\right\}\Delta\ddot{\theta} + g\sin^2\theta_0\left(\frac{3}{2a\cos^4\theta_0} + 2al^2\right)\Delta\theta = 0 \quad (16) \text{ 2分}$$

或

$$\Delta\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\Delta\theta = 0$$

小幅振动可以近似为简谐运动, 角频率为:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (17)$$

振动频率:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad (18) \text{ 2分}$$

(3) 设白鼠的质量为  $m_s$ , 沿细杆的位移为  $s$ , B 点  $s=0$ , 加速度为  $d^2s/dt^2$ , 则白鼠对细杆的作用力:

$$F_1 = m_s g, \text{ 竖直向下}; F_2 = m_s \frac{d^2s}{dt^2}, \text{ 沿细杆.} \quad (19) \text{ 4分}$$

细杆保持平衡要求细杆所受合力矩为零。为了避免分析约束力的力矩, 我们选择一个特定的参考点, 在 A 和 B 点处, 分别做抛物线的切线和法线, 两条法线相交于 D 点, 选择 D 点为参考点, 如解题图 1a 所示。下面求 D 点坐标。所述的两个法线方程为:

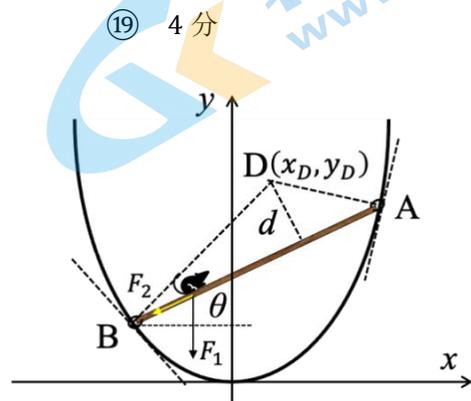
$$y - y_B = -\frac{1}{2ax_B}(x - x_B) \quad (20)$$

$$y - y_A = -\frac{1}{2ax_A}(x - x_A) \quad (21)$$

求解得两个法线的交点 D 的坐标:

$$x_D = x_c = \frac{\sqrt{3}}{4}l \quad (22) \text{ 1分}$$

$$y_D = \frac{13}{8}l \quad (23) \text{ 1分}$$



解题图 1a

细杆的直线方程:

$$y - y_A = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_A) \quad (24)$$

即:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{3}{8}l \quad (25)$$

D 点到细杆 ( $Ay + By + C = 0$ ) 的距离为

$$d = \frac{|Ax_D + By_D + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

由上式与②⑤式得

$$d = \frac{\left| \frac{1}{\sqrt{3}}x_D - y_D + \frac{3}{8}l \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}l - \frac{13}{8}l + \frac{3}{8}l \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l \quad (26) \quad 2 \text{分}$$

【或:

由②式知 D 点和杆的质心 C 在同一竖直线上。设从 D 点到杆的垂线与杆的交于 E 点, 则

$$\angle CDE = \theta \quad (25')$$

从而有

$$d = (y_D - y_C) \cos \theta = \left(\frac{13}{8}l - \frac{5}{8}l\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l \quad (26') \quad 2 \text{分}$$

】

以 D 点为参考点, 因为细杆的重力过 D 点, 抛物线对 A 和 B 点的支撑力沿其法线方向, 即过 D 点, 这样它们的力矩为零, 因而细杆的力矩平衡条件可写为:

$$L = m_s \frac{d^2 s}{dt^2} d - m_s g (l - s) \cos \theta_0 = 0 \quad (27) \quad 2 \text{分}$$

由②⑦式得:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l}(s - l) = 0 \quad (28)$$

解为:

$$s = l + A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0\right) \quad (29) \quad 2 \text{分}$$

式中 A 和  $\varphi_0$  是待定常量。由初始条件,  $t=0$  时,  $s=0$  和  $\dot{s}=0$ ; 知

$$l + A \cos \varphi_0 = 0 \quad (30)$$

$$-\sqrt{\frac{g}{l}} \sin \varphi_0 = 0 \quad (31)$$

由此得:

$$\varphi_0 = 0, A = -l \quad (32)$$

或

$$\varphi_0 = \pi, A = l \quad (33)$$

于是得到:

$$s = l - l \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad (34) \quad 2 \text{分}$$

值得注意的是, 解③④式在  $0 \leq s \leq 2l$  的范围内都满足平衡条件②⑦。这说明白鼠可以一直爬到细

杆的顶端。

当  $s = 2l$  时，白鼠爬到细杆的顶端，设全程所用时间为  $t$ ，由③④式得：

$$\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) = -1 \quad \text{③⑤}$$

即

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{③⑥ 2分}$$

值得注意的是：解③④是一个周期函数，其周期为

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2T$$

振幅为  $l$ ，白鼠在  $s=0$  与  $s=2l$  之间往复运动。白鼠到达细杆顶端的时间  $t$  为

$$t = T, 3T, 5T, \dots \quad \text{③⑦}$$

因此，白鼠爬到细杆顶端，最少用时为  $T$ 。

评分标准：总 40 分

(1) 10 分

①2 分，④1 分，⑤1 分，⑥2 分，⑦2 分，⑫2 分

(2) 16 分

⑬4 分，⑭2 分（若无⑬，直接给出⑭得 6 分），⑮6 分，⑯2 分，⑰2 分

(3) 14 分

⑱2 分，⑳㉓各 1 分，㉔（或㉔'）2 分，㉕2 分，㉖2 分，㉗2 分，㉘2 分，㉙2 分

二、(60分) 动能为  $K_1$  的粒子 1 (入射粒子) 从无穷远处入射, 与静止的粒子 2 (靶粒子) 发生弹性碰撞, 碰撞后粒子 1 的动能和运动方向都发生了变化。不考虑重力。

(1) 散射后 (无穷远处) 粒子 1 的动能为  $K_1'$ ,  $k = \frac{K_1'}{K_1}$  称为运动学因子。试给出  $k$  的取值范围。

围。

(2) 本问采用牛顿力学理论。

(i) 将散射后粒子 1 的运动方向 (散射方向) 与入射方向之间的夹角 (散射角) 记为  $\theta$ 。将粒子 2 与粒子 1 的质量之比记为  $R$ 。对于任意给定的  $R$ ,  $k$  是  $\theta$  的函数。分别在  $R > 1$ 、 $R = 1$  和  $R < 1$  三种情形下, 导出  $k$  对  $\theta$  的依赖关系  $k(\theta)$ , 并给出  $\theta$  的取值范围。

(ii) 在某些  $R$  取值范围中,  $k$  可能是  $\theta$  的多值函数 (每种函数形式称为  $k$  函数的一个分支)。要确定  $k$  的值, 需要补充描述两粒子相互作用部分细节的参量。采用最简单的硬球模型, 即把发生碰撞的两个粒子都视为表面光滑的匀质刚球, 它们只在碰撞时有相互作用。设两粒子半径之和为  $A$ , 靶粒子 2 的质心到入射粒子 1 中心的速度所在直线的距离为  $b$  (瞄准距离), 如图 2a 所示。试求  $k$  (用  $R$ 、 $A$  和  $b$  表出), 并用“擦边而过”和“对心碰撞”这两种特殊情形来验证可由  $b$  的取值判断同一个  $\theta$  下  $k(\theta)$  所在的分支。求出  $k(\theta)$  各分支所对应的  $b$  的取值范围。

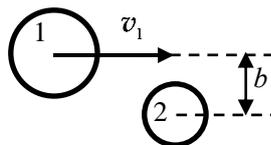


图 2a. 瞄准距离  $b$  的几何示意图

速度所在直线的距离为  $b$  (瞄准距离), 如图 2a 所示。试求  $k$  (用  $R$ 、 $A$  和  $b$  表出), 并用“擦边而过”和“对心碰撞”这两种特殊情形来验证可由  $b$  的取值判断同一个  $\theta$  下  $k(\theta)$  所在的分支。求出  $k(\theta)$  各分支所对应的  $b$  的取值范围。

(3) 设两粒子 (可视为质点) 的静止质量均为  $m_0$ 。粒子 1 的入射速度很快, 以至于需要考虑相对论效应。真空中的光速为  $c$ 。

(i) 求散射角为  $\theta$  时的运动学因子  $k(\theta)$ , 并与牛顿力学的结果进行比较。

(ii) 求碰后粒子 1、2 速度之间的夹角  $\alpha$  与  $K_1'$  的关系,  $\alpha$  在何种情况下取极值? 并判断极值的性质 (极大或极小), 给出该极值以及相应的  $\theta$  值。

(注: 解题涉及到需要进行区分的物理量时, 用脚标 1 和 2 区分粒子, 用不加“'”、加“'”分别表示碰撞前、后的物理量。最终表达式中涉及到的三角函数一律采用余弦函数, 且不含半角、倍角表示。)

解: (1) 弹性碰撞前后体系总动能不变, 即

$$K_1 = K_1' + K_2' \quad \text{①} \quad 2 \text{分}$$

由  $k$  的定义式可知

$$0 \leq k = \frac{K_1'}{K_1} \leq 1 \quad \text{②} \quad 2 \text{分}$$

(2) (i) 由于粒子 2 静止, 且有散射角, 可以处理成二维碰撞。将粒子动量表示为  $\mathbf{p}$ , 碰撞过程满足动量守恒定律:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \quad \text{③} \quad 2 \text{分}$$

$\mathbf{p}_1'$  与  $\mathbf{p}_1$  的夹角即为散射角  $\theta$ 。故③式可以写成

$$p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p_1' \cos \theta \quad \text{④} \quad 2 \text{分}$$

由动量和动能的定义可以给出二者的关系为

$$p^2 = 2mK \quad \text{⑤}$$

将⑤代入④，并联合①消去  $K_2'$ ，可得

$$K_1 - 2\sqrt{K_1 K_1'} \cos \theta + K_1' = R(K_1 - K_1')$$

$$\frac{K_1'}{K_1} (1+R) - 2\cos \theta \sqrt{\frac{K_1'}{K_1}} + 1 - R = 0$$

解出

$$\sqrt{k} = \frac{\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{1+R} \quad \text{⑥}$$

$$k = \left[ \frac{\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{R+1} \right]^2 \quad \text{⑦} \quad 2 \text{分}$$

显然，这里需要对⑥式或⑦式的多值问题及其相应的自变量  $\theta$  的定义域进行讨论。

由②式和⑥式得

$$0 \leq \frac{\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{1+R} \leq 1 \quad \text{⑧}$$

讨论：

a. 若  $R > 1$ ，靶粒子 2 质量比入射粒子 1 质量大，有

$$\sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)} > |\cos \theta|$$

必须舍掉⑥式或⑦式根号前为负号的结果，才能满足⑧式前半不等式，而⑧式后半不等式由于  $\cos \theta \leq 1$  自动满足，故有

$$\sqrt{k} = \frac{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{1+R} \quad \text{⑨}$$

$$k = \left[ \frac{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{R+1} \right]^2 \quad \text{⑩} \quad 2 \text{分}$$

从碰撞几何对称性和⑩式可以看出，在这种情况下，有

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{⑪} \quad 2 \text{分}$$

b. 若  $R=1$ ，靶粒子 2 与入射粒子 1 质量相等，代入⑦式，解出：

$$k = \cos^2 \theta \text{ 和 } 0 \quad \text{⑫} \quad 2 \text{分}$$

其中的  $k=0$  解意味着粒子 1 停在了碰撞处，没有散射出来，也就没有散射角。而第一个解需要  $\cos \theta > 0$ ， $\theta$  局限于第 I 象限，即

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{⑬} \quad 2 \text{分}$$

因此实际可以探测到的散射粒子的运动学因子只有一个分支，即  $k = \cos^2 \theta$ 。

c. 若  $R < 1$ ，靶粒子 2 的质量小于入射粒子 1 的质量，有

$$\sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)} < |\cos \theta|$$

由上式可知  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ 。当  $\theta > \frac{\pi}{2}$ ，不能满足⑧式；对于  $\theta < \frac{\pi}{2}$ ，则要求

$$\cos^2 \theta - (1-R^2) \geq 0$$

即

$$\cos \theta \geq \sqrt{1-R^2}$$

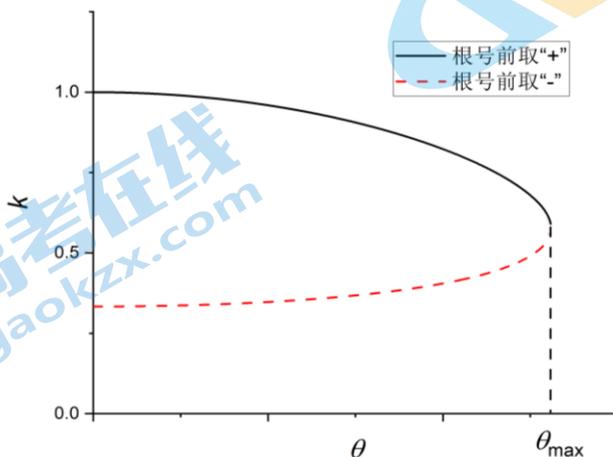
如此，则③式得以满足。故

$$k = \left[ \frac{\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{R+1} \right]^2 \quad (14) \quad 2 \text{分}$$

相应地有

$$0 \leq \theta \leq \arccos \sqrt{1-R^2} \quad (15) \quad 2 \text{分}$$

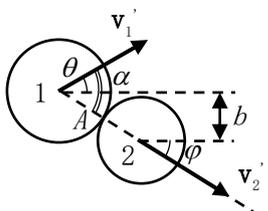
即存在最大散射角  $\theta_{\max} = \arccos \sqrt{1-R^2}$ 。



题解图 2a  $R < 1$  时的  $k - \theta$  关系图

(ii) 结论⑭意味着在  $R < 1$  时，在一个散射角上可能出现两个  $k$  值。仅靠能量和动量守恒无法确定  $k$  取哪一个值，需要考虑碰撞时相互作用的细节。这里采用硬球相互作用模型，已知两粒子半径之和  $A$ ，以瞄准距离  $b$  作为参量来确定  $k$  所处的分支。

由于  $b > A$  时没有散射，故只讨论  $0 \leq b \leq A$  的情形。



题解图 2b 硬球模型下的斜碰撞粒子出射方向示意图

设碰撞后粒子 2（反冲粒子）的动量  $\mathbf{p}_2'$  与入射粒子动量  $\mathbf{p}_1$  的夹角为  $\varphi$ 。有

$$b = A \sin \varphi \quad (16) \quad 1 \text{分}$$

由③式得

$$p_1'^2 = p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1 p_2' \cos \varphi \quad (17)$$

将①和⑤代入⑭式，得到

$$(1+R)\sqrt{1-k} = 2\sqrt{R} \cos \varphi \quad (18)$$

将⑬式代入⑱，整理得

$$k = 1 - \frac{4R \cos^2 \varphi}{(1+R)^2} = 1 - \frac{4R(1 - \sin^2 \varphi)}{(1+R)^2} = \frac{(1-R)^2 + 4R(\frac{b}{A})^2}{(1+R)^2} \quad (19) \quad 4 \text{分}$$

显然  $k$  随  $b$  的增加而单调增加。

对于硬球模型， $b = A$  时，为擦边过，此时有  $\theta = 0$ ，但二粒子并未真正发生相互作用，

散射粒子动能不变,  $k=1$ , 这对应着⑭式根号前取“+”号。

⑳ 1分

$b=0$  为对心碰, 此时也有  $\theta=0$ ,  $k = \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2$ , 对应于⑭式根号前取“-”号。㉑ 1分

由上述分析可知, 从擦边过到对心碰的变化过程对应着  $b$  从  $A$  单调减小至  $0$ , 相应地  $k$  从  $1$  单调减小至  $\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2$  的过程。

下面考察  $\theta$  随  $b$  的变化:

【解法一】: 由⑭式和⑮式可知,  $\theta = \theta_{\max} = \sqrt{1-R^2}$  是  $k(\theta)$  的分支点, 此处  $k(\theta)$  的两个分支合二为一。将  $k(\theta_{\max})$  记为  $k_c$ , 有

$$\sqrt{k_c} = \frac{\cos \theta_{\max}}{1+R} = \sqrt{\frac{1-R}{1+R}} \quad \text{㉒} \quad 1 \text{分}$$

对应的瞄准距离为

$$b_c = \sqrt{\frac{1-R}{2}} A \quad \text{㉓} \quad 2 \text{分}$$

考虑到  $\theta < \theta_{\max}$ , ⑭式的分子部分有

$$\begin{cases} \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)} > \cos \theta_{\max} \\ \cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)} < \sqrt{1-R^2} = \cos \theta_{\max} \end{cases} \quad \text{㉔} \quad 2 \text{分}$$

(将  $\cos \theta$ 、 $\sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}$  和  $\sqrt{1-R^2}$  分别看作为直角三角形的三个边长, 可得第二个不等式)

由㉒和㉓的分析可知, ㉔中第一式对应着  $A \geq b \geq b_c$ , 第二式对应着  $b_c > b \geq 0$ 。因此有

$$\begin{cases} \sqrt{k} = \frac{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{1+R} & A \geq b \geq \sqrt{\frac{1-R}{2}} A \\ \sqrt{k} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{1+R} & \sqrt{\frac{1-R}{2}} A > b \geq 0 \end{cases} \quad \text{㉕} \quad 4 \text{分}$$

【解法二】: 将⑥式对  $\cos \theta$  求导

$$\frac{d\sqrt{k}}{d(\cos \theta)} = \frac{1}{R+1} \left( 1 \pm \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}} \right)$$

代回⑥式, 整理得到

$$\frac{d(\cos \theta)}{dk} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{2k} > 0 & \text{⑥式根号前取“+”号} \\ 0 & \cos \theta = \cos \theta_{\max} = \sqrt{1-R^2} \quad \text{㉖}' \quad 2 \text{分} \\ \frac{\sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{2k} < 0 & \text{⑥式根号前取“-”号} \end{cases}$$

综合⑰以及⑳㉑和㉖'的分析, 可以得到,  $b=A$  时, ⑭式根号前 (⑥式同) 取“+”号, 散射角  $\theta$  从  $0$  开始先随  $b$  的下降而增加, 直至  $\theta = \theta_{\max}$ , 而后⑭式根号前 (⑥式同) 符号反转, 取“-”号,  $\theta$  随  $b$  的下降而减小, 直至  $b=0$  时  $\theta=0$ 。

当  $\theta = \theta_{\max} = \arccos \sqrt{1-R^2}$  时, 由⑭式得到在分支点

$$k_c = \frac{1-R}{1+R} \quad \text{⑳}' \quad 1 \text{分}$$

将⑳'代入⑰, 整理得到此时

$$b_c = \sqrt{\frac{1-R}{2}} A \quad \text{㉑}' \quad 2 \text{分}$$

因此在  $R < 1$  时, 运动学因子

$$k = \begin{cases} \left[ \frac{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{1+R} \right]^2 & A \geq b \geq \sqrt{\frac{1-R}{2}} A \\ \left[ \frac{\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - (1-R^2)}}{1+R} \right]^2 & \sqrt{\frac{1-R}{2}} A > b \geq 0 \end{cases} \quad \text{㉒}' \quad 4 \text{分}$$

(3) 用  $E$  表示运动粒子能量,  $E_0$  表示静止粒子能量。

$$E_0 = m_0 c^2 \quad \text{㉓}$$

粒子的动能为

$$K = E - E_0 \quad \text{㉔} \quad 2 \text{分}$$

在相对论情形下①~④式都是成立的。但能动量关系变为

$$p^2 c^2 = E^2 - E_0^2 \quad \text{㉕} \quad 2 \text{分}$$

将㉕式代入④, 得

$$E_2'^2 = E_1'^2 + E_1'^2 - E_0'^2 - 2\sqrt{(E_1'^2 - E_0'^2)(E_1'^2 - E_0'^2)} \cos \theta \quad \text{㉖} \quad 2 \text{分}$$

联立㉔㉖, 整理得:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{(E_1 + E_0)(E_1' - E_0)}}{\sqrt{(E_1 - E_0)(E_1' + E_0)}} = \frac{\sqrt{(K_1 + 2m_0 c^2)K_1'}}{\sqrt{K_1(K_1' + 2m_0 c^2)}} \quad \text{㉗} \quad 2 \text{分}$$

整理, 得

$$k = \frac{K_1'}{K_1} = \frac{\cos^2 \theta}{K_1(1 - \cos^2 \theta) + 2m_0 c^2} \quad \text{㉘} \quad 2 \text{分}$$

比较㉗式和㉘式, 可以看到它们的比值

$$\frac{2m_0 c^2}{K_1(1 - \cos^2 \theta) + 2m_0 c^2} \leq 1 \quad \text{㉙} \quad 1 \text{分}$$

即在高能粒子散射情况下, 经典模型会高估散射粒子的动能。

或: 比较㉗式和㉘式, 可以看到当  $K_1 \ll m_0 c^2$  时, ㉗式会退化成㉘式。 ㉚' 1分

(4) 由②式可得:

$$p_1'^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1' p_2' \cos \alpha \quad \text{㉛} \quad 2 \text{分}$$

将①⑦⑧代入③, 得:

$$(E_1' - E_0)(E_2' - E_0) = \sqrt{(E_1'^2 - E_0^2)(E_2'^2 - E_0^2)} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{(E_1' - E_0)(E_2' - E_0)}{(E_1' + E_0)(E_2' + E_0)}} = \sqrt{\frac{K_1'(K_1 - K_1')}{(K_1' + 2m_0c^2)(K_1 - K_1' + 2m_0c^2)}} \quad \textcircled{34} \quad 3 \text{分}$$

将③对  $K_1'$  求导，整理得

$$\frac{d(\cos \alpha)}{dK_1'} = \frac{(K_1 + 2m_0c^2)(K_1 - 2K_1')E_0}{\sqrt{(K_1' + 2m_0c^2)(K_1 - K_1' + 2m_0c^2)}^3}$$

若要  $\frac{d(\cos \alpha)}{dK_1'} = 0$ ，有

$$K_1' = \frac{1}{2}K_1 \quad \textcircled{35} \quad 2 \text{分}$$

此时  $\frac{d^2(\cos \alpha)}{dK_1'^2} < 0$ ， $\alpha$  取极小值。将③代入③，得

$$\cos \alpha_{\min} = \frac{K_1}{K_1 + 4m_0c^2}$$

$$\alpha_{\min} = \arccos \frac{K_1}{K_1 + 4m_0c^2} \quad \textcircled{36} \quad 2 \text{分}$$

将③代入③式，得

$$\cos^2 \theta = \frac{K_1 + 2m_0c^2}{K_1 + 4m_0c^2} = \frac{1}{2}(\cos \alpha_{\min} + 1)$$

$$\theta = \frac{\alpha_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \arccos \frac{K_1}{K_1 + 4m_0c^2} \quad \textcircled{37} \quad 2 \text{分}$$

说明散射粒子与反冲粒子均分入射粒子动能时，二者速度夹角最小，且两粒子出射方向对称。

【由③式可知，当  $K_1' = 0$  或  $K_1$  时，分别对应着对心碰和擦边过， $\cos \alpha = 0$ ， $\alpha$  有最大极限值

$$\alpha_{\max} = \frac{\pi}{2}$$

相应地，由③可知此时有  $\cos \theta = 0$  或  $1$ ，即  $\theta = \frac{\pi}{2}$  或  $0$ 】

评分标准：总 60 分

(1) (4 分)

①②各 2 分

(2) (34 分，其中 (i) 18 分，(ii) 16 分)

(i) ③④⑥ (或⑦) ⑩⑪⑫⑬ (如果写成  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，不扣分) ⑭⑮各 2 分

(ii) ⑯1 分，⑰4 分，⑱⑲各 1 分，【解法一】：⑳21 分，㉑㉒各 2 分；㉓4 分，【解法二】：

- ②'2分；③'1分，④'2分；⑤'4分，注：⑤'式中 $\frac{d(\cos\theta)}{dk}=0$ 的取值合并到上下任意一个分支都可以，只要将相应的不等式中加上等号)
- (3) (11分)
- ⑦⑧⑨⑩⑪各2分，⑫（或⑫'）1分
- (4) (11分)
- ⑬2分，⑭3分，⑮⑯⑰各2分（注：如果在⑰之外还写了【】中内容，即把最大极限值作为极值的，不扣分）

三、(60分)一匀质刚性细圆环半径为  $R$ ，质量为  $M$ ，在水平地面 ( $x$ - $y$  坐标平面) 上滚动。假定摩擦系数足够大，以至于圆环和地面之间始终无滑动。记  $t$  时刻圆环所在平面与竖直方向 ( $z$  方向) 之间的夹角为  $\theta(t)$ ，圆环所在平面与地面之间的交线相对于  $x$  方向的夹角为  $\phi(t)$ ，圆环与地面的瞬时接触点的直角坐标为  $(x(t), y(t), 0)$ ，如图 3a 所示。重力加速度大小为  $g$ 。

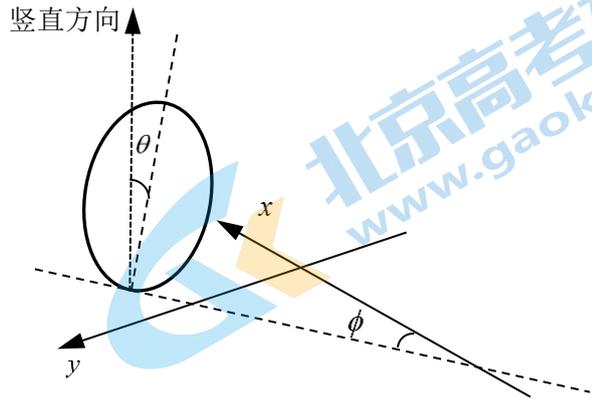


图 3a

(1) 描述任意  $t$  时刻圆环空间位置的  $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\phi(t)$  并非完全相互独立，试求出它们及其对时间的一阶导数之间的所有约束条件。

(2) 设圆环做“匀速圆周运动”，圆环与地面的接触点以恒定速率绕  $z$  轴画出一个半径为  $r$  的圆， $\theta(t) = \theta$  ( $\theta$  为常量)， $\phi(t)$  是时间  $t$  的线性函数。在实验室参考系  $\Sigma$  中，不失一般性可设

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

这里  $\omega$  是待求的角速度。在绕  $z$  轴以角速度  $\omega$  匀速旋转的转动参考系  $\Sigma'$  中， $\theta$  和  $\phi$  均为常量，圆环绕垂直于环面的中轴线做定轴转动。在参考系  $\Sigma'$  中，圆环上各质元会“感受”到离心力和科里奥利力的作用。将圆环视为许多微元的集合，求所有微元所受到的离心力的合力  $F_{\text{离心}}$ 、科里奥利力的合力  $F_{\text{科氏}}$  以及相对于圆环质心的离心力的合力矩  $\tau_{\text{离心}}$ 、科里奥利力的合力矩  $\tau_{\text{科氏}}$  (结果可包含尚未求出的  $\omega$ )。

(3) 求 (2) 问中的  $\omega$  以及地面对圆环施加的作用力 (结果不得包含  $\omega$ )。

(4) 圆环高速滚动时，圆环可在竖直平面附近摆动而不倒下，具有较好的稳定性，从而圆环质心可近似视为沿直线运动，设该直线沿  $x$  轴方向，质心速度大小约为常量  $V$ ，即质心位置坐标  $x(t) = Vt + \delta x(t)$ ，而  $\delta x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\phi(t)$  均为小量 (注意，它们可能并非是同阶小量)。导出保留到最低阶小量的圆环的运动方程。假设最低阶小量按余弦函数随时间变化，求变化的角频率  $\Omega$ ；并确定保持圆环运动稳定所需的常量  $V$  的最小值  $V_{\text{min}}$ 。

解答：

(1) 记瞬时接触点位置矢量为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{①}$$

圆环中心 (质心)  $O$  的位置矢量为

$$\mathbf{O} = \mathbf{A} + R \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{②}$$

质心  $O$  的速度为

$$\mathbf{v}_O = \dot{\mathbf{O}} = \begin{pmatrix} \dot{x} + R(\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi) \\ \dot{y} + R(-\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \\ -R\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{A}} + \frac{d}{dt}(\mathbf{O} - \mathbf{A}) \quad \text{③}$$

无滑动滚动的条件是  $\mathbf{v}_O$  与  $(\mathbf{O} - \mathbf{A})$  垂直，因为  $(\mathbf{O} - \mathbf{A})$  长度固定，所以  $(\mathbf{O} - \mathbf{A})$  和  $\frac{d}{dt}(\mathbf{O} - \mathbf{A})$  始终垂直，因而无滑动滚动的条件简化为  $\dot{\mathbf{A}}$  和  $(\mathbf{O} - \mathbf{A})$  垂直，

$$(\dot{x}, \dot{y}, 0) \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = 0 \quad \text{④}$$

即

$$\dot{x} \sin \theta \sin \phi - \dot{y} \sin \theta \cos \phi = 0 \quad (5)$$

一般情况下 $\theta$ 不为零, 故

$$\dot{x} \sin \phi - \dot{y} \cos \phi = 0$$

或

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (6)$$

即圆环应该在瞬时所在平面内滚动, 接触点的速度沿着瞬时所在平面和水平面的交线方向。

(2) 本问下面使用绕过坐标原点的 $z$ 轴以角速度 $\omega$ 匀速旋转的 $XY$ 坐标系, 在这个坐标系中, 圆环质心处于静止状态, 其质心动量始终为 $0$ ;

根据无滑动滚动的约束条件, 圆环绕自身中轴线转动的角速度大小为

$$\omega' = \omega \frac{r}{R} \quad (7)$$

角速度矢量为

$$\boldsymbol{\omega}' = \omega \frac{r}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

角动量始终为

$$\boldsymbol{L} = MR^2 \boldsymbol{\omega}' = MRr\omega \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

圆环与地面的接触点 $A$ 的位置矢量为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

质心 $O$ 的位置矢量为

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r - R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9)$$

则圆环上相对于矢径 $OA$ 成 $90^\circ$ 角的 $B$ 点的位置矢量为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

考虑圆环上任意点 $C$ , 令 $\angle COA \equiv \varphi$ , 则 $C$ 在 $XY$ 坐标系中的位置矢量为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \sin \theta \\ -R \cos \theta \end{pmatrix} \cos \varphi + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \varphi = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ r - R \sin \theta (1 - \cos \varphi) \\ R \cos \theta (1 - \cos \varphi) \end{pmatrix} \quad (10)$$

圆环 $C$ 点处 $d\varphi$ 弧元受到的离心力(在 $XY$ 坐标系中)为

$$d\boldsymbol{F}_{\text{离心力}} = M \frac{d\varphi}{2\pi} \omega^2 \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

总的离心力为

$$\boldsymbol{F}_{\text{离心力}} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\boldsymbol{F}_{\text{离心力}} = M\omega^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ 0 \end{pmatrix} = M\omega^2 \begin{pmatrix} X_O \\ Y_O \\ 0 \end{pmatrix} = M\omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ r - R \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

圆环 $C$ 点处 $d\varphi$ 弧元受到的科里奥里力(在 $XY$ 坐标系中)为

$$d\boldsymbol{F}_{\text{科氏力}} = M \frac{d\varphi}{2\pi} \left[ -2\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \boldsymbol{v}_C \right] \quad (13)$$

其中  $\boldsymbol{v}_C$  为  $C$  点在  $XY$  坐标系中绕圆环中心旋转的速度,

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) = \omega \frac{r}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \times (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) = \omega r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (14)$$

总的科里奥里力为

$$\boldsymbol{F}_{\text{科氏力}} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\boldsymbol{F}_{\text{科氏力}} = -2M\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \boldsymbol{v}_C = -2M\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \boldsymbol{v}_O = 0 \quad (15)$$

$d\varphi$  弧元受到的离心力的力矩为

$$d\boldsymbol{\tau}_{\text{离心力}} = (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) \times M \frac{d\varphi}{2\pi} \omega^2 \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ 0 \end{pmatrix} = M \frac{d\varphi}{2\pi} \omega^2 (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_C \end{pmatrix} \quad (16)$$

注意

$$(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) \times (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) + (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) \times \boldsymbol{O} = (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) \times \boldsymbol{O}$$

因此

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) \times \boldsymbol{C} = \left[ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) \right] \times \boldsymbol{O} = 0$$

离心力的总力矩  $\boldsymbol{\tau}_{\text{离心力}}$  为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{\text{离心力}} &= - \int_{\varphi=0}^{2\pi} M \frac{d\varphi}{2\pi} \omega^2 (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_C \end{pmatrix} = -M\omega^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} Z_C \begin{pmatrix} Y_C - Y_O \\ -(X_C - X_O) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -M\omega^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} R \cos \theta (1 - \cos \varphi) \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} M\omega^2 R^2 \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17) \end{aligned}$$

$d\varphi$  弧元受到的科里奥里力的力矩  $d\boldsymbol{\tau}_{\text{科氏力}}$  为

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\tau}_{\text{科氏力}} &= -M \frac{d\varphi}{2\pi} (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{O}) \times \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} \times \boldsymbol{v}_C \right] \\ &= -M \frac{d\varphi}{2\pi} \begin{pmatrix} -R \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & -R \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -2\omega^2 r \sin \theta \sin \varphi \\ 2\omega^2 r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18) \end{aligned}$$

科里奥里力的总力矩  $\boldsymbol{\tau}_{\text{科氏力}}$  为

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{科氏力}} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\boldsymbol{\tau}_{\text{科氏力}} = \begin{pmatrix} -M\omega^2 Rr \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

上述计算中已利用下列积分公式

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sin \varphi &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \cos \varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi = 0 \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} (\cos \varphi)^2 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} (\sin \varphi)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3)

解法（一）

在旋转参考系中，圆环质心位置不动，绕对称轴做匀速定轴转动，因此圆环受到的合力、合力矩都应该为零。除了（2）中考虑的离心力和科里奥利力，圆环还受到重力

$$\mathbf{F}_{\text{重力}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg \end{pmatrix}$$

以及地面对圆环的正压力 $\mathbf{N}$ （竖直方向）和摩擦力 $\mathbf{f}$ （水平方向），受力平衡条件是

$$\mathbf{F}_{\text{重力}} + \mathbf{F}_{\text{离心力}} + \mathbf{F}_{\text{科氏力}} + \mathbf{N} + \mathbf{f} = 0$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + M\omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ r - R\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + 0 + \mathbf{N} + \mathbf{f} = 0 \quad (20)$$

显然 $\mathbf{N}$ 应该沿 $z$ 方向， $\mathbf{f}$ 应该在 $xy$ 面内。所以在 $XY$ 坐标系中

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mg \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{f} = M\omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ R\sin\theta - r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

重力相对于质心的力矩为零，地面对圆环的压力与摩擦力的合力相对于质心 $O$ 的力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\text{地面}}$ （在 $XY$ 坐标系中）为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{\text{地面}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{O}) \times (\mathbf{N} + \mathbf{f}) = R(0, \sin\theta, -\cos\theta) \times \begin{pmatrix} 0 \\ M\omega^2(R\sin\theta - r) \\ Mg \end{pmatrix} \\ &= M \begin{pmatrix} gR\sin\theta + \omega^2 R(R\sin\theta - r)\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

力矩平衡条件为

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{离心力}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{科氏力}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{地面}} = 0$$

由此知

$$\frac{\omega^2 R^2}{2} \cos\theta \sin\theta - \omega^2 Rr \cos\theta + gR\sin\theta + \omega^2 R(R\sin\theta - r)\cos\theta = 0 \quad (24)$$

可得

$$\omega = \sqrt{\frac{g\sin\theta}{\cos\theta(2r - \frac{3}{2}R\sin\theta)}} \quad (25)$$

地面对圆环的摩擦力等于

$$\mathbf{f} = -\frac{2Mg\sin\theta}{(4r - 3R\sin\theta)\cos\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ r - R\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

地面对圆环施加的作用力由⑳和㉑表示。

解法（二）：利用刚体的主轴、惯量张量、角速度矢量等概念

本解法将在无旋转的 $xyz$ 坐标系内考虑圆环的运动方程，注意 $xyz$ 坐标系与旋转的 $XYZ$ 坐标系的关系为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\cos(\omega t) - Y\sin(\omega t) \\ X\sin(\omega t) + Y\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

为了方便起见，定义旋转的 $XYZ$ 坐标系中的单位向量

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{Y} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

圆环质心做半径为  $r - R \sin \theta$ 、角速度为  $\omega$  的匀速圆周运动，由质心运动定理，地面对圆环的压力和摩擦力分别为

$$N = Mg\hat{z} \quad (21)$$

$$f = -M\omega^2(r - R \sin \theta)\hat{Y} \quad (22)$$

圆环在旋转的  $XYZ$  坐标系中绕质心转动的角速度为

$$\omega'_{XYZ} = -\omega \frac{r}{R} (\sin \theta \hat{z} + \cos \theta \hat{Y})$$

因此圆环在  $xyz$  坐标系中绕质心转动的角速度为

$$\omega'_{xyz} = \omega'_{XYZ} + \omega \hat{z} = \omega \left(1 - \frac{r}{R} \sin \theta\right) \hat{z} - \omega \frac{r}{R} \cos \theta \hat{Y} \quad (23)$$

圆环的主轴方向单位矢量分别为

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \sin \theta \hat{z} + \cos \theta \hat{Y} \\ \hat{a}_2 &= \hat{X} \\ \hat{a}_3 &= -\cos \theta \hat{z} + \sin \theta \hat{Y} \end{aligned} \quad (24)$$

各主轴方向的转动惯量分别为

$$I_1 = MR^2, \quad I_2 = I_3 = \frac{1}{2}MR^2 \quad (25)$$

因此圆环相对于质心的角动量为

$$\begin{aligned} L &= (\omega'_{xyz} \cdot \hat{a}_1)\hat{a}_1 I_1 + (\omega'_{xyz} \cdot \hat{a}_2)\hat{a}_2 I_2 + (\omega'_{xyz} \cdot \hat{a}_3)\hat{a}_3 I_3 \\ &= MR^2 \omega \left(\sin \theta - \frac{r}{R}\right) \hat{a}_1 - \frac{1}{2}MR^2 \omega \cos \theta \hat{a}_3 \\ &= MR^2 \omega \left[\frac{1}{2}(1 + (\sin \theta)^2) - \frac{r}{R} \sin \theta\right] \hat{z} + MR^2 \omega \left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{r}{R}\right) \cos \theta \hat{Y} \end{aligned} \quad (26)$$

质心角动量的变化率等于不包括重力的外力力矩

$$\frac{d}{dt} L = \tau_{\text{地面}}$$

注意

$$\frac{d}{dt} \hat{X} = \omega \hat{Y}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{Y} = -\omega \hat{X}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{z} = 0$$

因此

$$\frac{d}{dt} L = -MR^2 \omega^2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{r}{R}\right) \cos \theta \hat{X} \quad (27)$$

而地面对圆环的合力相对于圆环质心的力矩  $\tau_{\text{地面}}$  为

$$\tau_{\text{地面}} = R\hat{a}_3 \times (N + f) = MgR \sin \theta \hat{X} - M\omega^2(r - R \sin \theta)R\hat{X} \quad (28)$$

因此

$$-MR^2 \omega^2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{r}{R}\right) \cos \theta = MgR \sin \theta - M\omega^2(r - R \sin \theta)R$$

$$M\omega^2 R \left(2r - \frac{3}{2}R \sin \theta\right) \cos \theta = MgR \sin \theta$$

可得

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sin \theta}{\cos \theta \left(2r - \frac{3}{2}R \sin \theta\right)}} \quad (29)$$

地面对圆环的摩擦力等于

$$f = -\frac{2Mg \sin \theta}{(4r - 3R \sin \theta) \cos \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ r - R \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

(4) 注意：下面的小量分析中始终认为一个变量和它的时间导数是同阶的小量，即假设运动中不包含振动频率趋于无穷大的成分。

(1) 问中的运动学约束保留到小量的最低阶为

$$\dot{y} \approx V\phi \quad (31)$$

由此可见 $y$ 和 $\phi$ 是同阶小量。

圆环质心 $O$ 的位置矢量在一阶小量近似下为

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} x + R \sin \theta \sin \phi \\ y - R \sin \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} Vt + \delta x \\ y - R\theta \\ R \end{pmatrix} \quad (32)$$

地面对圆环的摩擦力在一阶小量近似下为

$$\mathbf{f} = M \frac{d}{dt} \mathbf{v}_O = M \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x} + R(\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi) \\ \dot{y} + R(-\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \\ -R\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \approx M \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V + \dot{\delta x} \\ \dot{y} - R\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \ddot{\delta x} \\ \ddot{y} - R\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

地面对圆环的压力在一阶近似下为

$$\mathbf{N} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mg \end{pmatrix} \quad (34)$$

下面分两种方法近似计算圆环绕质心的角动量：

---

计算方法（一）：微元分析

类比(2)，考虑圆环上 $C$ 点，瞬时坐标近似为

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{O} + R \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \theta \cos \phi - \phi \sin \phi \\ -\cos \phi \end{pmatrix} \quad (35)$$

在一阶近似下，

$$\dot{\phi} \approx \frac{(x \cos \phi + y \sin \phi)}{R} \approx \frac{V}{R} + \frac{1}{R} \dot{\delta x} \quad (36)$$

因此 $C$ 点相对于质心 $O$ 点的速度近似为

$$\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_O \approx R \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} + (V + \dot{\delta x}) \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\theta \sin \phi - \phi \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (37)$$

$d\phi$ 弧元相对于质心的角动量为

$$\begin{aligned} d\mathbf{L} &= (\mathbf{C} - \mathbf{O}) \times M \frac{d\phi}{2\pi} (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_O) \\ &\approx \frac{d\phi}{2\pi} MR^2 \begin{pmatrix} \dot{\theta}(\cos \phi)^2 - \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi \\ 0 \\ -\dot{\theta} \sin \phi \cos \phi + \dot{\phi}(\sin \phi)^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{d\phi}{2\pi} MR(V + \dot{\delta x}) \begin{pmatrix} -\phi \\ 1 \\ \theta \end{pmatrix} \quad (38) \end{aligned}$$

总角动量为

$$\mathbf{L} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\mathbf{C} - \mathbf{O}) \times M \frac{d\varphi}{2\pi} (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_O) \approx MR^2 \begin{pmatrix} -\frac{V}{R}\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\theta} \\ \frac{V}{R} + \frac{1}{R}\dot{\delta x} \\ \frac{1}{2}\dot{\phi} + \frac{V}{R}\dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (39)$$

---

计算方法（二）：利用刚体的主轴、惯量张量、角速度矢量等概念  
圆环的三个主轴方向在一阶近似下分别为（见前面（2）的解法（二））：  
中轴线方向

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} -\cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\phi \\ 1 \\ \theta \end{pmatrix}$$

近似的 $\phi$ 角转轴

$$\hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\phi \\ -\sin\theta \cos\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ -\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\theta$ 角转轴

$$\hat{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

转动惯量分别为

$$I_1 = MR^2, \quad I_2 = I_3 = \frac{1}{2}MR^2 \quad (35)$$

绕三个主轴的角速度分别近似为：

绕中轴线方向角速度

$$\omega'_1 \approx \frac{1}{R}(V + \dot{\delta x}) \quad (36)$$

绕近似 $\phi$ 角转轴角速度

$$\omega'_2 \approx \dot{\phi} \quad (37)$$

绕 $\theta$ 角转轴角速度

$$\omega'_3 \approx \dot{\theta} \quad (38)$$

圆环绕质心的角动量近似为

$$\mathbf{L} \approx \frac{1}{R}(V + \dot{\delta x})MR^2 \begin{pmatrix} -\phi \\ 1 \\ \theta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ -\theta \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \phi \\ 0 \end{pmatrix} \approx MR^2 \begin{pmatrix} -\frac{V}{R}\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\theta} \\ \frac{V}{R} + \frac{1}{R}\dot{\delta x} \\ \frac{1}{2}\dot{\phi} + \frac{V}{R}\dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (39)$$

---

地面对圆环的压力和摩擦力的合力对圆环质心的力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\text{地面}}$ 在一阶近似下为

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{地面}} \approx R(0 \quad \theta \quad -1) \times M \begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{y} - R\ddot{\theta} \\ g \end{pmatrix} \approx MR \begin{pmatrix} g\theta + \dot{y} - R\ddot{\theta} \\ -\dot{\delta x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

由

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}_{\text{地面}}$$

得三个分量满足的方程，

$$-V\dot{\phi} + \frac{R}{2}\ddot{\theta} \approx g\theta + \dot{y} - R\ddot{\theta} \quad (41)$$

$$\dot{\delta x} \approx -\dot{\delta x} \quad (42)$$

$$\frac{R}{2}\ddot{\phi} + V\dot{\theta} \approx 0 \quad (43)$$

再考虑前面运动学约束  $\dot{y} \approx V\phi$ ，可知  $y(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\phi(t)$  为同阶小量。

将③代入④式中消去  $y$ ，得

$$\frac{3R}{2}\ddot{\theta} - g\theta \approx 2V\dot{\phi}$$

再取导数，代入③，得

$$\frac{3R}{2}\ddot{\theta} + \left(\frac{4V^2}{R} - g\right)\dot{\theta} = 0 \quad ④$$

设  $y(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\phi(t)$  均作角频率为  $\Omega$  的简谐振动，即均正比于  $\cos(\Omega t + \text{常数})$ ，则  $\Omega$  需要满足

$$-\frac{3R}{2}\Omega^2 + \left(\frac{4V^2}{R} - g\right) = 0$$

故

$$\Omega = \sqrt{\frac{8V^2}{3R^2} - \frac{2g}{3R}} \quad ⑤$$

圆环运动稳定需要  $\Omega$  为实数，故

$$\frac{8V^2}{3R^2} - \frac{2g}{3R} \geq 0$$

最小速率为

$$V_{\min} = \frac{\sqrt{gR}}{2} \quad ⑥$$

④说明在最低阶小量近似下  $\delta\ddot{x} \approx 0$ ，因此  $\delta x$  应该是相对于  $y$ 、 $\theta$ 、 $\phi$  的高阶小量。

评分标准：总 60 分

第(1)问 6 分，

②③⑤⑥各 1 分，④2 分

第(2)问 23 分，

⑦为 2 分，⑪为 2 分，⑫为 2 分，⑬为 2 分，⑮为 3 分，⑯为 2 分，⑰为 4 分，⑱为 2 分，⑲为 4 分；

第(3)问 12 分，

解法（一）：⑳1 分，㉑2 分，㉒1 分，㉓2 分，㉔1 分，㉕为 3 分，㉖为 2 分；

解法（二）：㉗为 2 分，㉘1 分，㉙1 分，㉚1 分，㉛为 2 分，㉜为 3 分，㉝为 2 分；

第(4)问 19 分，

①2 分，②2 分，③④各 1 分，⑤为 3 分，⑥⑦⑧⑨各 1 分，⑩⑪⑫各 2 分；

四、(60分)自由电子激光器是以自由电子束为工作物质,将相对论性电子束的动能转变成相干辐射能的装置,它在科研、生产等领域中都具有重大应用前景。如图4a,自由电子激

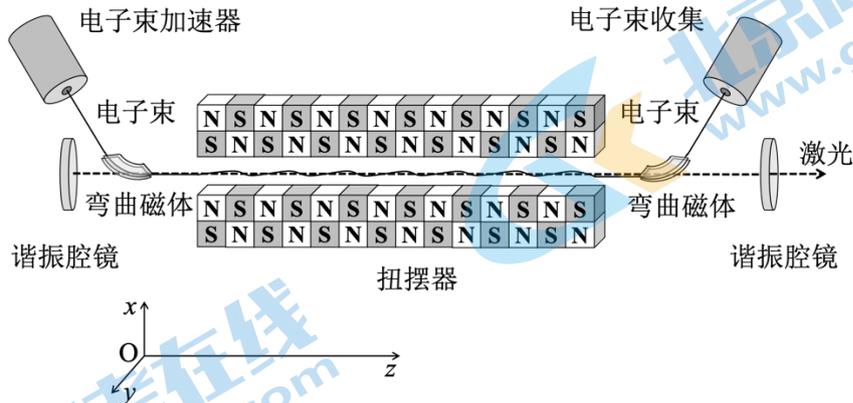


图4a

光器的基本结构有三个部分:电子束加速器、扭摆器和光学谐振腔;其中扭摆器是自由电子激光器的核心部分,它由沿 $z$ 方向按空间周期 $\Lambda$ 排列的永磁体组成,产生周期性横向静磁场,磁感应强度方向沿 $x$ 轴,大小为

$$B = B_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right)$$

电子束经过加速器加速到预定的速率 $v_0$ ,由弯曲磁体引导,沿 $z$ 轴正方向注入扭摆器,高速运动的电子在扭摆器中受到交变磁场的作用做扭摆运动,同时辐射相干电磁波。设 $B_0$ 不太强,磁场对电子运动速度的改变量的大小远小于 $v_0$ ,且电子束相干辐射电磁波对电子动能的损耗可忽略不计。电子的静止质量为 $m_e$ ,电子所带电量为 $-e$ 。不计重力。

(1)建立参考系 $S'(x',y',z')$ ,使 $S'$ 相对于实验室参考系 $S(x,y,z)$ 沿 $z$ 轴正方向以大小为 $v_0$ 的速度做匀速直线运动, $x'$ 轴和 $x$ 轴、 $y'$ 轴和 $y$ 轴两两相互平行, $z'$ 轴和 $z$ 轴重合。利用前述近似条件,在参考系 $S'$ 中求出电子在 $t'$ 时刻的位置坐标 $(x',y',z')$ ,并画出电子运动轨迹示意图。

(2)如果扭摆器磁场的空间变化周期 $\Lambda=1\text{mm}$ (可视为准确值),沿 $z$ 轴正方向辐射X激光的波长为 $4.00\text{\AA}$ ,求电子束加速器的加速电压。已知电子静止质量 $m_e=9.11\times 10^{-31}\text{kg}$ ,单位电荷量 $e=1.60\times 10^{-19}\text{C}$ 。

(3)用波长为 $4.00\text{\AA}$ 的激光作为入射光(可视为平面波),如图4b所示。在 $x-z$ 平面内有等边菱形组成的共面二维晶体,菱形的边长 $d=8.00\text{\AA}$ ,两顶角各为 $60^\circ$ 、 $120^\circ$ ,设二维晶体对入射波的散射较弱,可忽略散射波再次被散射的影响,试问在 $x-z$ 平面内远处可以观察到多少衍射主级峰?并求相应主级峰的方向(用图4b中的 $\theta$ 表示)。

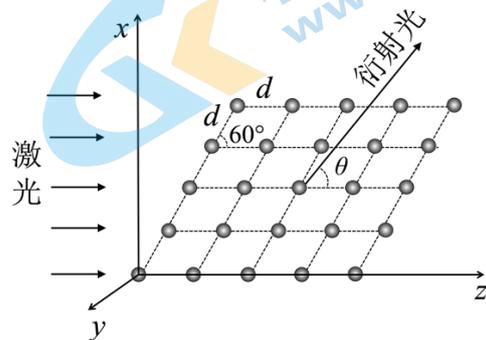


图4b

已知:在两惯性参考系 $S'(x',y',z')$ 、 $S(x,y,z)$ 中电磁场的变换关系为

$$\begin{cases} E_{x'} = \frac{E_x - v_0 B_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ E_{y'} = \frac{E_y + v_0 B_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ E_{z'} = E_z. \end{cases} \quad \begin{cases} B_{x'} = \frac{B_x + \frac{v_0}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ B_{y'} = \frac{B_y - \frac{v_0}{c^2} E_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ B_{z'} = B_z. \end{cases}$$

式中  $c = 3.00 \times 10^8$  m/s 是真空中光速。

解答： (1)

【解法一】:

在 S 参考系中求电子的运动：设电子在扭摆器中出发于坐标原点，其初速度为

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{k}$$

根据相对论性质点动量定理，有

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{①} \quad (2 \text{分})$$

其中电子的相对论性动量为

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \mathbf{v}$$

由①式，磁场力不做功，能量不变相应速率不变，故有

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2 \quad \text{②} \quad (2 \text{分})$$

因此也有

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}$$

为常量。将

$$\mathbf{B} = B_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right) \mathbf{i}$$

代入①，并考虑到  $m$  为常量，可得

$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{eB_0}{m} v_z \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right) \quad \text{③} \quad (1 \text{分})$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{eB_0}{m} v_y \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right) \quad \text{④} \quad (1 \text{分})$$

由  $\frac{dv_x}{dt} = 0$  及初值条件 ( $x_0 = 0, v_{x0} = 0$ ) 得

$$v_x \equiv 0, \quad x \equiv 0$$

由③式得

$$dv_y = -\frac{eB_0}{m} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right) dz$$

积分得 ( $v_{y0} = 0, z_0 = 0$ )

$$v_y = -\frac{eB_0 \Lambda}{2\pi m} \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right) \quad \text{⑤} \quad (2 \text{分})$$

将 $v_x \equiv 0$ 及⑤代入②，得

$$v_z = \sqrt{v_0^2 - \frac{e^2 B_0^2 \Lambda^2}{8\pi^2 m^2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{4\pi}{\Lambda} z\right) \right]} \quad \text{⑥} \quad (1 \text{分})$$

【附注：也可以利用微商恒等式 $\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv_z^2}{dz}$ ，由④式积分得到⑥式】

按题意，磁场不强，对电子速度的改变量大小远远小于 $v_0$ ，领头阶近似有

$$v_z \approx v_0, \quad z \approx v_0 t$$

将此近似条件带入到电子感受到的磁场分布函数（及相应的积分结果）中，由⑦式得

$$v_y = -\frac{eB_0\Lambda}{2\pi m} \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} v_0 t\right)$$

积分得（ $y_0 = 0$ ）

$$y = \frac{eB_0\Lambda^2}{4\pi^2 v_0 m} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} v_0 t\right) - 1 \right] \quad \text{⑦} \quad (1 \text{分})$$

此外，准确到小量 $B_0^2$ 阶，由⑥式得

$$v_z = v_0 \left( 1 - \frac{e^2 B_0^2 \Lambda^2}{16\pi^2 m^2 v_0^2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{4\pi}{\Lambda} v_0 t\right) \right] \right) \quad \text{⑧} \quad (1 \text{分})$$

对时间积分得（ $z_0 = 0$ ）

$$z = v_0 t - \frac{e^2 B_0^2 \Lambda^2}{16\pi^2 m^2 v_0} t + \frac{e^2 B_0^2 \Lambda^3}{64\pi^3 m^2 v_0} \sin\left(\frac{4\pi}{\Lambda} v_0 t\right) \quad \text{⑨} \quad (1 \text{分})$$

利用洛伦兹变换，变换到 $S'$ 系，得

$$\begin{aligned} x' &= x = 0 \\ y' &= y = \frac{eB_0\Lambda^2}{4\pi^2 v_0 m} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} v_0 \frac{t' + \frac{v_0}{c^2} z'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) - 1 \right] \quad \text{⑩} \quad (2 \text{分}) \\ z' &= \frac{-\frac{e^2 B_0^2 \Lambda^2}{16\pi^2 m^2 v_0} \frac{t' + \frac{v_0}{c^2} z'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e^2 B_0^2 \Lambda^3}{64\pi^3 m^2 v_0} \sin\left(\frac{4\pi}{\Lambda} v_0 \frac{t' + \frac{v_0}{c^2} z'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{⑪} \quad (2 \text{分}) \end{aligned}$$

容易判断， $z'$ 的领头阶正比于小量 $B_0^2$ 。对⑩⑪分别展开至各自的领头阶，得

$$y' = \frac{eB_0 v_0}{\omega'^2 m_e \sqrt{1-\beta^2}} [\cos(\omega' t') - 1] \quad \text{⑫} \quad (1 \text{分})$$

$$z' = \frac{e^2 v_0 B_0^2}{8\omega'^3 m_e^2 (1-\beta^2)} (\sin 2\omega' t' - 2\omega' t') \quad \text{⑬} \quad (1 \text{分})$$

其中

$$\omega' = \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{v_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

【解法二】：参考系 $S'(x', y', z')$ 中电磁场（只写出其非零分量）：

$$E_{y'} = \frac{v_0}{\sqrt{1-\beta^2}} B_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z'\right) \quad \text{①}' \quad (2 \text{分})$$

$$B_{x'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} B_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z'\right) \quad \text{②}' \quad (2 \text{分})$$

式中 $\beta = v_0/c$ 。

由洛伦兹变换得：

$$z = \frac{z' + v_0 t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{③}' \quad (2 \text{分})$$

于是:

$$E_{y'} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} B_0 \cos\left(\frac{2\pi z' + v_0 t'}{\Lambda \sqrt{1 - \beta^2}}\right) \quad \text{④}' \quad (1 \text{分})$$

$$B_{x'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} B_0 \cos\left(\frac{2\pi z' + v_0 t'}{\Lambda \sqrt{1 - \beta^2}}\right) \quad \text{⑤}' \quad (1 \text{分})$$

(注: 如果直接给出④'和⑤', 给8分)

在参考系  $S'(x', y', z')$  中, 因为磁感应强度  $B_0$  不太大, 磁场对电子运动速度的改变远远小于  $v_0$ , 所以在参考系  $S'(x', y', z')$  中, 电子在原点  $O'$  ( $x'=0, y'=0, z'=0$ ) 附近运动, 沿  $z'$  轴偏离  $O'$  的位移远远小于  $\Lambda$ , 因此, 电子感受的电磁场近似为  $O'$  处 ( $x'=0, y'=0, z'=0$ ) 的电磁场:

$$E_{y'} = \frac{v_0 B_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cos \omega' t' \quad \text{⑥}' \quad (1 \text{分})$$

$$B_{x'} = \frac{B_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cos \omega' t' \quad \text{⑦}' \quad (1 \text{分})$$

式中

$$\omega' = \frac{2\pi v_0}{\Lambda \sqrt{1 - \beta^2}}$$

{解法二(2)}:

设在实验室参考系  $S(x, y, z)$  中, 沿  $x$  轴方向的磁场的磁感应强度为  $B_x$ , 则在参考系  $S'(x', y', z')$  中, 电子所感受到的电磁场(只写出其非零分量)为:

$$E_{y'} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} B_x$$

$$B_{x'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} B_x$$

其中  $\beta = v_0 / c$ 。

参考系  $S(x, y, z)$  中的静磁场, 空间周期为  $\Lambda$ , 在参考系  $S'(x', y', z')$  观察到的空间周期为

$$\Lambda' = \Lambda \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{①}'' \quad (4 \text{分})$$

在参考系  $S'(x', y', z')$  中, 原点  $O'$  处测量的电场和磁场为交变场, 其角频率为

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{\frac{\Lambda'}{v_0}} = \frac{2\pi v_0}{\Lambda \sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{②}'' \quad (2 \text{分})$$

在参考系  $S'(x', y', z')$  中, 因为磁感应强度  $B_0$  不太大, 磁场对电子运动速度的改变远远小于  $v_0$ , 所以在参考系  $S'(x', y', z')$  中, 电子在  $O'$  附近运动, 沿  $z'$  轴偏离  $O'$  的位移远远小于  $\Lambda$ , 因此, 电子感受的电磁场近似为  $O'$  处的电磁场:

$$E_{y'} = \frac{v_0 B_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cos \omega' t' \quad \text{③}'' \quad (2 \text{分})$$

$$B_{x'} = \frac{B_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cos \omega' t' \quad \text{④}'' \quad (2 \text{分})$$

电子在参考系  $S'$  中的初始位置和初始速度(初始条件)分别为:

$$(x', y', z') = (0, 0, 0), (v_x(0), v_y(0), v_z(0)) = (0, 0, 0) \quad \textcircled{8}' \quad (1 \text{ 分})$$

在参考系  $S'$  中电子运动的速度远远小于光速，所以电子运动方程满足经典的牛顿力学定律

$$m_e \frac{d^2 y'}{dt'^2} = -e \frac{v_0 B_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos(\omega' t') - e \frac{B_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dz'}{dt'} \cos(\omega' t') \quad \textcircled{9}' \quad (2 \text{ 分})$$

$$m_e \frac{d^2 z'}{dt'^2} = e \frac{B_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dy'}{dt'} \cos(\omega' t') \quad \textcircled{10}' \quad (2 \text{ 分})$$

因为  $\frac{dz'}{dt'} \ll v_0$ ，所以  $\textcircled{9}'$  式右端第二项可忽略。于是

$$m_e \frac{d^2 y'}{dt'^2} = -e \frac{v_0 B_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos(\omega' t') \quad \textcircled{11}' \quad (1 \text{ 分})$$

积分得（同时考虑初始条件）

$$y' = \frac{e v_0 B_0}{\omega'^2 m_e \sqrt{1-\beta^2}} [\cos(\omega' t') - 1] \quad \textcircled{12}' \quad (1 \text{ 分})$$

将  $\textcircled{12}'$  式代入  $\textcircled{10}'$  式得：

$$z' = \frac{e^2 v_0 B_0^2}{8 \omega'^3 m_e^2 (1-\beta^2)} [\sin(2\omega' t') - 2\omega' t'] \quad \textcircled{13}' \quad (1 \text{ 分})$$

$$x' = 0$$

（如果初始位置没有选择在  $z'=0$ ， $\textcircled{13}'$  式出现一个常数项，不扣分）

即电子在  $y'z'$  平面内做“Z”字形运动，沿  $z'$  轴为直线匀速运动，如解题图 4a 所示。  $\textcircled{14}$  (2 分)

(2) 沿  $z'$  轴辐射的电磁波来自于沿  $y'$  轴振荡的电子，电磁波的频率等于电子沿  $y'$  轴的振动频率，所以在参考系  $S'$  中

$$\omega_0 = \omega' = \frac{2\pi v_0}{\Lambda \sqrt{1-\beta^2}} \quad \textcircled{15} \quad (2 \text{ 分})$$

根据多普勒效应得，在实验室参考系  $S$  中测量辐射电磁波的频率为

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \omega_0 = \frac{2\pi v_0}{\Lambda \sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{2\pi v_0}{\Lambda(1-\beta)} \quad \textcircled{16} \quad (5 \text{ 分})$$

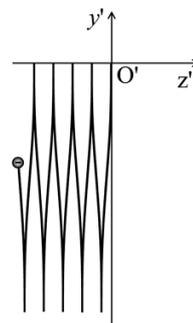
由  $\textcircled{16}$  式和题给数据得

$$v_0 = \frac{\Lambda}{\Lambda + \lambda} c \approx \frac{0.1}{0.1 + 4 \times 10^{-8}} c = (1 - 4.00 \times 10^{-7}) c \quad \textcircled{17} \quad (2 \text{ 分})$$

电子加速器的加速电压满足

$$eU = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} - m_e c^2 \quad \textcircled{18} \quad (5 \text{ 分})$$

由  $\textcircled{17}$ 、 $\textcircled{18}$  式和题给数据得



题解图 4a

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{m_e c^2}{e} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} - 1 \right] \\
 &\approx \frac{m_e c^2}{e} \frac{1}{\sqrt{2 \times 4.00 \times 10^{-7}}} \\
 &= \frac{9.11 \times 10^{-31} (3.00 \times 10^8)^2}{1.60 \times 10^{-19} \sqrt{2 \times 4.00 \times 10^{-7}}} \text{ V} \\
 &\approx 5.73 \times 10^8 \text{ V}
 \end{aligned}$$

⑲ (2分)

(3) 由图 4b 可知, 平行光 (X 激光) 入射到二维晶面上每一格点, 每一个格点都可以看成次波源, 向四周发出次波, 在  $xz$  平面上远处观察与  $z$  方向成  $\theta$  角的衍射光。二维晶面对 X 激光的衍射为夫琅禾费衍射。入射光波矢为  $\vec{k}$ , 衍射光波矢  $\vec{k}'$ , 设位于坐标原点的格点  $(0,0)$  的夫琅禾费衍射场为  $\tilde{U}_0(\theta)$ , 格点  $(0,0)$  衍射场和格点  $(m,n)$  衍射场的相位差

$$\Delta\varphi = \vec{k}' \cdot \vec{r} - \vec{k} \cdot \vec{r} \quad \text{⑳ (2分)}$$

于是  $(m,n)$  格点的夫琅禾费衍射场为

$$\tilde{U}_{mn}(\theta) = \tilde{U}_0(\theta) e^{-i\Delta\varphi} = \tilde{U}_0(\theta) e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \quad \text{㉑ (2分)}$$

其中  $\vec{r}$  为格点  $(m,n)$  的位置矢量:  $\vec{r} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}md, 0, nd + \frac{1}{2}md\right)$ ,  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(0,0,1)$ ,  $\vec{k}' = \frac{2\pi}{\lambda}(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ , 于是由以上各式得, 格点  $(m,n)$  的衍射场为

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_{mn}(\theta) &= \tilde{U}_0(\theta) \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2}md \sin\theta + \left(n + \frac{m}{2}\right)d(\cos\theta - 1) \right] \right\} \\
 &= \tilde{U}_0(\theta) \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda} \left[ md \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta + \frac{1}{2} \cos\theta - \frac{1}{2} \right) + nd(\cos\theta - 1) \right] \right\} \quad \text{㉒ (2分)} \\
 &= \tilde{U}_0(\theta) \exp(-i2m\beta_1 - i2n\beta_2)
 \end{aligned}$$

式中

$$\beta_1 = \frac{\pi}{\lambda} d \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta + \frac{1}{2} \cos\theta - \frac{1}{2} \right), \quad \beta_2 = \frac{\pi}{\lambda} d (\cos\theta - 1)$$

二维晶面的总的衍射场为各个格点发出次波的相干叠加, 即:

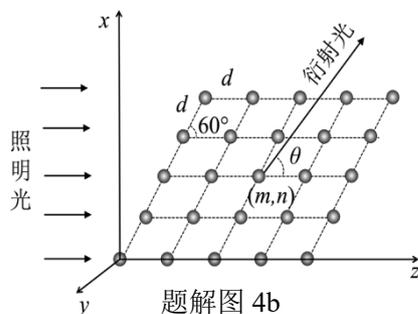
$$\begin{aligned}
 \tilde{U}(\theta) &= \sum_{m=0}^{N_1-1} \sum_{n=0}^{N_2-1} \tilde{U}_{mn}(\theta) = \tilde{U}_0(\theta) \sum_{m=0}^{N_1-1} \exp(-i2m\beta_1) \sum_{n=0}^{N_2-1} \exp(-i2n\beta_2) \\
 &= \tilde{U}_0(\theta) e^{-i(N_1-1)\beta_1} e^{-i(N_2-1)\beta_2} \left( \frac{\sin N_1\beta_1}{\sin \beta_1} \right) \left( \frac{\sin N_2\beta_2}{\sin \beta_2} \right) \quad \text{㉓ (4分)}
 \end{aligned}$$

「这里, 利用了等比级数求和公式  $\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2n\beta} = \frac{1 - e^{-i2N\beta}}{1 - e^{-i2\beta}}$ , 以及  $(1 - e^{i\beta}) = -2i \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\beta}{2}}$ 」

由㉓式知, 衍射光强分布为

$$I(\theta) = |\tilde{U}(\theta)|^2 = |\tilde{U}_0(\theta)|^2 \left( \frac{\sin N_1\beta_1}{\sin \beta_1} \right)^2 \left( \frac{\sin N_2\beta_2}{\sin \beta_2} \right)^2 \quad \text{㉔ (2分)}$$

于是主级峰位置:



题解图 4b



$$k_1 = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \right) = \pm \sqrt{3 - 3\cos^2 \theta} + \cos \theta - 1 \quad \textcircled{30}$$

要求上式为  $k_1$  为整数，于是：

$$k_2 = 0, \cos \theta = 1, \text{得 } k_1 = 0, \theta = 0, \text{出现零级主级峰。} \quad \textcircled{31}$$

$$k_2 = -1, \cos \theta = \frac{1}{2}, \text{得 } k_1 = 1, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = 60^\circ; \text{或 } k_1 = -2, \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = -60^\circ;$$

即在  $\theta = \pm 60^\circ$  各出现一个主级峰，共两个主级峰。  $\textcircled{32}$  (4分)

(注：两结果各 2 分)

$$k_2 = -2, \cos \theta = 0, \text{得 } k_1 = \pm \sqrt{3} - 1, \text{非整数，无主级峰出现。} \quad \textcircled{33}$$

$$k_2 = -3, \cos \theta = -\frac{1}{2}, \text{得 } k_1 = 0, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = 120^\circ; \text{或 } k_1 = -3, \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = -120^\circ;$$

即在  $\theta = \pm 120^\circ$  各出现一个主级峰，共两个主级峰。  $\textcircled{34}$  (4分)

(注：两结果各 2 分)

$$k_2 = -4, \cos \theta = 1, \text{得 } k_1 = -2, \sin \theta = 0, \theta = 180^\circ, \text{出现一个主级峰。} \quad \textcircled{35}$$

结论：可以观察到 6 个主级峰，分别出现在： $\theta = 0, \pm 60^\circ, \pm 120^\circ, 180^\circ$

(注： $\theta = 0^\circ$ 或  $180^\circ$ 对应的主级峰无法观测，故不采分。)

评分标准：总 60 分

(1) 20 分

【解法一】：①②⑤⑩⑪各 2 分，③④⑥⑦⑧⑨⑫⑬各 1 分

【解法二】：

①'②'③'各 2 分，④'⑤'各 1 分 (注：如果直接给出④'和⑤'，给 8 分)，⑥'⑦'各 1 分

{解法二 (2)}：①"4 分，②"2 分，③"2 分，④"2 分 (解法二和解法二 (2) 不重复给分)

⑧'1 分，⑨'⑩'各 2 分，⑪'⑫'⑬'各 1 分

⑭ 2 分

(2) 16 分

⑮ 2 分，⑯ 5 分，⑰ 2 分，⑱ 5 分，⑲ 2 分

(3) 24 分

⑳ 2 分，㉑ 2 分，㉒ 2 分，㉓ 4 分，㉔ 2 分，㉕ 2 分，(注：㉕中每式 1 分；如果直接给出㉖、

㉗，每式各 1 分；如果㉕、㉖、㉗都给出一共 2 分)

「解法二、㉔'7 分，㉕'7 分，两种方法不重复给分。」

㉘ (或㉙) 2 分 (注：㉘、㉙写出其一，得 2 分；两式不重复给分)，㉚ 4 分，㉛ 4 分

五、(50分) 光在单轴晶体内传播呈现各向异性, 按照偏振状态, 可分为  $o$  光 (寻常光) 和  $e$  光 (非常光)。单轴晶体内有一特定取向, 光沿此方向传播时  $o$  光和  $e$  光的传播速度相同, 传播方向不发生分离, 该方向称为晶体光轴。 $o$  光在晶体内感受到的折射率各向同性, 为  $n_o$ , 波速各向同性为  $v_o = c/n_o$  ( $c$  为真空中的光速);  $e$  光在垂直于光轴的方向传播感受到的折射率为  $n_e$ , 波速为  $v_e = c/n_e$ 。当  $e$  光的传播方向介于平行于和垂直于光轴之间时, 其感受到的折射率随其与光轴的夹角单调变化。对于晶体内点源或惠更斯原理中的次波源, 其发出的光的波前是以光轴为对称轴的旋转椭球面。如图 5a, 建立  $y$  轴与光轴取向重合的直角坐标系, 以下对  $o$  光和  $e$  光传播过程的分析仅限于在  $y$ - $x$  截面内的情形。

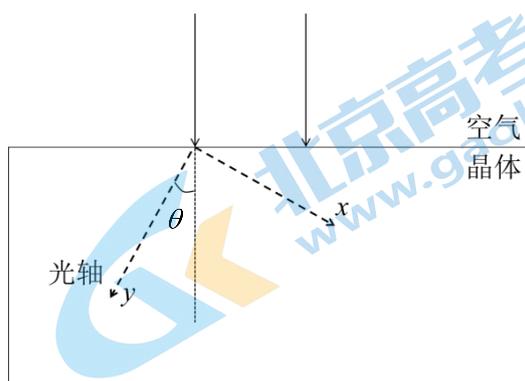


图 5a

(1) 根据惠更斯原理作图。

在图 5a 中, 真空波长为  $\lambda$  的平面光波从空气正入射到晶体表面, 晶体表面法线方向与光轴的夹角为  $\theta$ 。画出在晶体内传播的  $o$  光与  $e$  光的波前。标出分别与  $o$  光、 $e$  光对应的波矢  $\vec{k}_o$ 、 $\vec{k}_e$  的方向 (次波等相位面的包络面的法线方向, 即等相位面的传播方向), 以及由惠更斯原理确定的对应光线的传播方向  $\vec{N}_o$ 、 $\vec{N}_e$ 。取  $n_o > n_e$ , 将  $o$  光和  $e$  光的传播情况示于同一图中。

(2) 记  $e$  光的光线传播方向  $\vec{N}_e$  与光轴之间的夹角为  $\xi$ , 导出  $\xi$  和  $\theta$  两个角度的正切之间的关系。

(3) 一种名为 BBO 的单轴晶体的折射率色散曲线方程为 ( $\lambda$  为真空波长, 以  $\mu\text{m}$  为单位):

$$\begin{cases} n_o^2(\lambda) = 2.7359 + \frac{0.01878}{\lambda^2 - 0.01822} - 0.01354\lambda^2 \\ n_e^2(\lambda) = 2.3753 + \frac{0.01224}{\lambda^2 - 0.01667} - 0.01516\lambda^2 \end{cases}$$

分别求真空波长为 800.0 nm 和 400.0 nm 时, BBO 单轴晶体中的  $n_o$  和  $n_e$ 。

(4) 光学晶体的重要作用之一是实现频率转换, 例如光学倍频过程, 它是指两个同频率的基频光子转换为一个频率加倍的倍频光子, 这个过程须满足能量守恒和动量守恒。在晶体中, 波矢为  $\vec{k}$  的光子的动量也可表示为  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ , 其中  $\hbar$  为约化普朗克常量。

(4.1) 试表出倍频过程中基频光子波矢  $\vec{k}_1$  与倍频光子波矢  $\vec{k}_2$  之间的关系。

(4.2) 利用 BBO 晶体, 将真空波长为 800.0 nm 的光波倍频为真空波长为 400.0 nm 的光波, 基频光和倍频光可各自选为  $o$  光或  $e$  光, 试给出实现此倍频过程的选择方案。

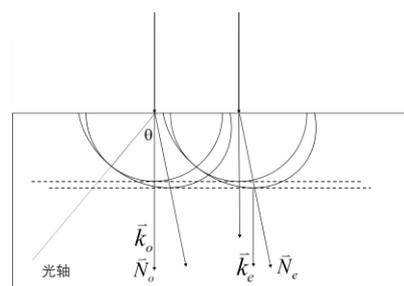
(5) 按照图 5a 的方式设置 BBO 晶体, 使晶体表面法线与光轴夹角为  $\theta$ , 让真空波长为 800.0 nm 的基频光以平面波形式垂直入射到此晶体, 角度  $\theta$  取值多大可以满足动量守恒条件, 从而产生真空波长为 400.0 nm 的倍频光?

(6) 计算 (5) 中  $e$  光波矢  $\vec{k}_e$  和传播方向  $\vec{N}_e$  之间的夹角  $\alpha$ 。

解答:

(1) (10分)

作图说明:

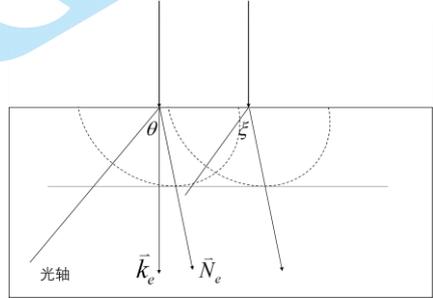


题解图 5a

- 1)  $o$  光分别以两个入射点为圆心做圆，两个圆的公切面（包络面）平行于表面
- 2)  $e$  光以光轴为短轴，垂直光轴方向为长轴作椭圆。由两个椭圆获得其公切面（包络面）
- 3)  $e$  光的椭圆在光轴上外切于  $o$  光的圆
- 4)  $\vec{k}_o, \vec{k}_e, \vec{N}_o$  三者具有相同的方向， $\vec{N}_e$  的方向为入射点和椭圆包络面切点的连线方向

(2) (9 分)

根据题解 (1) 中惠更斯原理所作的图， $\xi$  是  $e$  光传播方向  $\vec{N}_e$  与光轴的夹角， $\theta$  是  $e$  光椭圆上的包络面法向  $\vec{k}_e$  与光轴的夹角（题解图 6b）。因此，本问求解椭圆上某一点的  $\vec{N}_e$  与  $y$  轴夹角和  $\vec{k}_e$  与  $y$  轴夹角的关系。



题解图 5b

$t$  时刻，点源  $e$  光等相面（等时面）的椭圆方程为：

$$\frac{v_y^2 t^2}{v_o^2 t^2} + \frac{v_x^2 t^2}{v_e^2 t^2} = 1 \quad \text{①}$$

其中  $v_x$  和  $v_y$  分别为  $e$  光波速的两个直角坐标分量，上式中若约掉  $t^2$  因子，则得  $e$  光的速度椭圆（三维情形称为速度椭球）。

在①式所表示的椭圆（或速度椭圆）上，由几何关系得

$$\tan \xi = \frac{v_x}{v_y} \quad \text{②}$$

$$\tan \theta = -\frac{dv_y}{dv_x} \quad \text{③}$$

对①式椭圆方程取微分：

$$2v_y \frac{dv_y}{v_o^2} + 2v_x \frac{dv_x}{v_e^2} = 0 \quad \text{④}$$

化简得

$$\frac{v_x}{v_y} = -\frac{v_e^2}{v_o^2} \frac{dv_y}{dv_x} \quad \text{⑤}$$

即有

$$\therefore \tan \xi = \frac{v_e^2}{v_o^2} \tan \theta = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta \quad \text{⑥}$$

(3) (4 分)

对于真空波长为 800.0 nm 的光

$$n_o(800) = n_{o,800} = 1.661 \quad \text{⑦}$$

$$n_e(800) = n_{e,800} = 1.544 \quad \text{⑧}$$

对于真空波长为 400.0 nm 的光

$$n_o(400) = n_{o,400} = 1.693 \quad \text{⑨}$$

$$n_e(400) = n_{e,400} = 1.568 \quad (10)$$

(4) (6分)

(4.1) 动量守恒要求转换前两个光子的动量等于转换后光子的动量，因此得到

$$2\vec{k}_1 = \vec{k}_2 \quad (11)$$

(4.2) 倍频关系中，要满足能量守恒，需要保证倍频过程中基频光子的真空波长为倍频光子真空波长的两倍。根据介质中波矢大小的定义  $k = \frac{2\pi n}{\lambda}$ ，要使得动量守恒，需要使得基频和倍频的折射率一致。该折射率为相速度折射率，这个要求意味着基频光和倍频光在材料中具有相同的相速度。

根据(3)问中计算出的折射率数值，当基频和倍频都为  $o$  光或者  $e$  光时，由于色散，他们都无法具有相同的折射率。这种方案需要被排除，因此需要其中一束光为  $o$  光，另外一束光为  $e$  光。

取 800 nm 的光为  $o$  光，其折射率为 1.661，400 nm 的光为  $e$  光，其折射率介于 1.544 和 1.693 之间，随角度变化。因此，可以找到一个角度，使得基频光和倍频光具有相同的折射率，方案可行。

取 400 nm 的光为  $o$  光，其折射率为 1.693，800 nm 的光为  $e$  光，其折射率介于 1.544 和 1.661 之间，随角度变化。因此，无法找到一个角度，使得基频光和倍频光具有相同的折射率，方案不可行。

结论：该倍频方案取 800 nm 的基频光为  $o$  光，400 nm 的倍频光为  $e$  光。 (12)

(附注：写出结论即可，不要求分析过程)

(5) (18分)

在真空波长为 400 nm 的  $e$  光的速度椭圆上，按(2)问约定，取  $e$  光的传播方向  $\vec{N}_e$  与光轴夹角为  $\xi$ ，将该方向的速度记为  $v(400, \xi)$ 。考虑  $e$  光光束在晶体内的传播， $v(400, \xi)$  在波矢方向的投影即为相速度  $v_p(400)$ ，即有

$$v_p(400) = v(400, \xi) \cos(\xi - \theta) \quad (13)$$

按照(4.2)中的分析，此相速度应等于真空波长为 800 nm 的  $o$  光的相速度  $v_o(800)$ 。即

$$v(400, \xi) \cos(\xi - \theta) = v_o(800) = \frac{c}{n_{o,800}} \quad (14)$$

对于真空波长为 400 nm 的  $e$  光，将  $v_x = v(400, \xi) \sin \xi$ ， $v_y = v(400, \xi) \cos \xi$  代入椭圆方程(1)式中，得

$$\frac{v(400, \xi)^2 \cos^2 \xi}{v_o(400)^2} + \frac{v(400, \xi)^2 \sin^2 \xi}{v_e(400)^2} = 1 \quad (15)$$

由此得

$$v(400, \xi)^2 = \frac{c^2}{n_{o,400}^2 \cos^2 \xi + n_{e,400}^2 \sin^2 \xi} \quad (15')$$

利用三角函数公式得

$$\begin{aligned} \cos^2(\xi - \theta) &= (\cos \xi \cos \theta + \sin \xi \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \xi \cos^2 \theta (1 + \tan \xi \tan \theta)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

因此，联立(14)(15')(16)得

$$\frac{c^2}{n_{o,800}^2} = \frac{c^2}{n_{o,400}^2 \cos^2 \xi + n_{e,400}^2 \sin^2 \xi} \cos^2 \xi \cos^2 \theta (1 + \tan \xi \tan \theta)^2 \quad (17)$$

将⑥式代入，化简得，

$$\frac{1}{n_{o,800}^2} = \frac{\cos^2 \theta (1 + \tan \xi \tan \theta)^2}{n_{o,400}^2 \left(1 + \frac{n_{e,400}^2}{n_{o,400}^2} \tan^2 \xi\right)}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta}{n_{o,400}^2} \left(1 + \frac{n_{o,400}^2}{n_{e,400}^2} \tan^2 \theta\right)$$

$$\therefore \frac{1}{n_{o,800}^2} = \frac{1}{n_{o,400}^2} \left(\cos^2 \theta + \frac{n_{o,400}^2}{n_{e,400}^2} (1 - \cos^2 \theta)\right) \quad (18)$$

代入  $n_o(800) = 1.661$ ； $n_o(400) = 1.693$  和  $n_e(400) = 1.568$  得

$$\cos \theta = 0.8749$$

得  $\theta$  角度为  $29.0$  度或者  $0.506$  弧度。 (19)

(6) (3分)

根据

$$\tan(\xi) = \frac{v_e^2}{v_o^2} \tan(\theta) = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan(\theta)$$

求得：

$$\tan(\xi) = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan(\theta) = \frac{1.693^2}{1.568^2} \tan(29.0^\circ) = 0.646 \quad (20)$$

$$\xi = 32.9^\circ$$

得到  $e$  光波矢  $\vec{k}_e$  和传播方向  $\vec{N}_e$  之间的夹角：

$$\alpha = \xi - \theta = 3.9^\circ \quad (21)$$

评分标准：总 50 分

(1) 问 10 分

1) 正确作图，由图中得到四个矢量方向，并正确标注，每个标注 2 分。

2) 图中  $e$  光的椭圆在光轴上外切于  $o$  光的圆，得到 2 分。

(2) 问 9 分

①式 2 分，②2 分，③2 分，⑥3 分

(3) 问 4 分

⑦⑧⑨⑩各 1 分

(4) 问 6 分

⑪式 2 分。⑫结果 4 分。结论正确即可，不要求分析。

(5) 问 18 分

⑬4 分，⑭4 分，⑮（或⑮'）4 分，⑯式 4 分，⑰式 2 分

(6) 问 3 分

⑳式 2 分，㉑式 1 分

六、(50分) 仅考虑单一组分、单原子分子组成的非相对论性气体。

对上述气体, 若忽略分子的大小以及除碰撞瞬间外分子间的相互作用, 则可用理想气体模型描述; 若考虑到分子的实际大小及其间的非碰撞相互作用, 则理想气体模型不再适用。对此, 范德瓦尔斯构建了范德瓦尔斯模型, 该模型下, 1 mol 气体的状态方程(称为范德瓦尔斯方程)为

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

其中  $T$ 、 $p$  和  $v$  分别表示气体的温度、压强和体积(即容器容积),  $R$  是理想气体普适常量,  $a$  和  $b$  是大于零的常量。在稀疏极限(对于任意给定的  $T$ ,  $v \rightarrow \infty$ ) 下, 该模型退化为理想气体模型。

(1) 试直接给出  $b$  的物理含义(不必给出分析过程)。设气体分子可视为半径为  $r$  的刚性小球(按范德瓦尔斯模型, 小球间有微弱的引力), 试估计  $b$  的取值。已知阿伏伽德罗常数为  $N_A$ 。

(2) 直接写出  $N$  mol、体积为  $V$  的范德瓦尔斯气体的状态方程(表达式中不可出现摩尔体积  $v$ )。

(3) 设气体的定容摩尔热容为  $C_v$ ,  $C_v$  满足

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$$

式中  $\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T$  表示当  $T$  视为常量时  $C_v$  对  $v$  的一阶导数,  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$  表示当  $v$  视为常量时  $p$  对  $T$

的二阶导数, 余类推。试证明范德瓦尔斯气体的定容摩尔热容  $C_v$  为常量, 并确定此常量。

(此常量的具体形式不必代入后续计算)

(4) 已知 1 mol 范德瓦尔斯气体的内能  $u$  为

$$u = C_v T - \frac{a}{v},$$

试导出其摩尔熵  $s(T, v)$  的表达式, 其中可含有待定常量。试给出该气体经历准静态绝热过程的方程(用  $T$  和  $v$  表出, 表达式中可含有待定常量)。

(5) 1 mol 范德瓦尔斯气体经历如下可逆卡诺循环过程:

过程 I——等温膨胀: 温度为  $T_1$ , 体积由  $v_1$  变为  $v_2$

过程 II——绝热降温: 温度由  $T_1$  降为  $T_2$ , 体积由  $v_2$  变为  $v_3$

过程 III——等温压缩: 温度为  $T_2$ , 体积由  $v_3$  变为  $v_4$

过程 IV——绝热升温: 温度由  $T_2$  升为  $T_1$ , 体积由  $v_4$  变为  $v_1$

试计算该循环过程的吸热量  $Q_1$ 、放热量  $Q_2$  和循环效率  $\eta$  (最终将  $\eta$  表示为仅依赖于  $T_1$  和  $T_2$  的函数)。

(6) 定义等温压缩系数为

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

试推出范德瓦尔斯气体的等温压缩系数  $\kappa_T(T, v)$  的表达式; 以满足条件  $a \ll pv^2$  的范德瓦尔斯气体为例, 求  $\kappa_T$  的取值范围, 并说明其直观物理意义。

提示: 对于二元函数  $y = y(x_1, x_2)$ , 当  $x_1$ 、 $x_2$  各自独立的微小变化分别为  $dx_1$ 、 $dx_2$  时,  $y$  的全微分 ( $y$  的微小变化) 为

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_{x_2} dx_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)_{x_1} dx_2$$

解答:

(1)  $b$  的物理含义: 因为气体分子有大小, 使得 1 mol 气体分子在容器中运动而不能自由达到的体积的总和。①

【附注: 可以令  $a=0$ , 然后对照  $p(v-b)=RT$  和理想气体方程  $p v=RT$  可知,  $(v-b)$  是 1mol 范德瓦尔斯气体在体积为  $v$  的容器中可以自由活动的区域体积, 由此可以分析出  $b$  的物理含义】

考虑单个气体分子的存在, 记其半径为  $r$ , 使得另一个气体分子不能自由达到的体积则为  $V_0 = \frac{4}{3}\pi(2r)^3$ . 由于这一不能自由达到的区域体积为一对分子所共有, 故

$$b = \frac{1}{2}N_A V_0 = \frac{16}{3}N_A \pi r^3 \quad (2)$$

(2) 因为  $T$  和  $p$  为强度量, 故  $N$  mol、体积为  $V$  的题设种类气体的范德瓦尔斯方程

$$\left(p + \frac{N^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{N} - b\right) = RT. \quad (3)$$

亦即有

$$\left(p + \frac{N^2 a}{V^2}\right)(V - Nb) = NRT.$$

(3) 将 1mol 该气体的范德瓦尔斯方程改写为

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}, \quad (4)$$

则有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b}, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v = 0 \quad (5)$$

因此

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v = 0. \quad (6)$$

即范德瓦尔斯气体的  $C_v$  不依赖于  $v$  (仅可能依赖于  $T$ )。

考虑  $v \rightarrow \infty$  (或  $v \gg b, vRT \gg a$ ) 的极限, 范德瓦尔斯方程④将回到理想气体状态方程的形式, 故范德瓦尔斯气体的  $C_v$  与对应的理想气体的  $C_v$  相同, 对题设非相对论性单原子分子组成的气体,  $C_v$  为常量, 并有

$$C_v = \frac{3}{2}R \quad (7)$$

(4) 由题设关系式  $u = C_v T - \frac{a}{v}$ , 可得

$$du = C_v dT + \frac{a}{v^2} dv \quad (8)$$

对于可逆准静态过程, 由热力学第一定律

$$du = dQ + dW$$

(式中  $dQ$  是气体在微小的可逆准静态过程中所吸收的热量, 而  $dW = p(-dv)$  是微小的可逆准静态过程中外界对气体所做的功) 和热力学第二定律

$$ds = \frac{dQ}{T}$$

可得, 1 mol 气体的热力学基本微分方程为

$$du = Tds - pdv \quad (9)$$

因此

$$ds = \frac{1}{T} du + \frac{p}{T} dv \quad (10)$$

将④式和⑧式代入⑩式得

$$ds = \frac{1}{T} \left( C_V dT + \frac{a}{v^2} dv \right) + \frac{1}{T} \left( \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \right) dv = C_V \frac{dT}{T} + \frac{R}{v-b} dv \quad (11)$$

积分得

$$s(T, v) = C_V \ln T + R \ln(v-b) + s_0 \quad (12)$$

其中  $s_0$  为待定的积分常量。或

$$s(T, v) = C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \left( \frac{v-b}{v_0-b} \right) \quad (\text{其中 } T_0, v_0 \text{ 为常量}) \quad (12')$$

可逆绝热过程为等熵过程，由(12)式知，对于 1mol 上述范德瓦尔斯气体的绝热过程

$$C_V \ln T + R \ln(v-b) = \text{常量} \quad (13)$$

或者

$$T^{(C_V/R)}(v-b) = T^{3/2}(v-b) = \text{常量} \quad (13')$$

即为所求的绝热过程方程。(13)中的常量可以记为  $T_0^{(C_V/R)}(v_0-b)$

(5) 等温膨胀过程为吸热分过程，吸热量

$$Q_1 = T_1 \Delta s_1 \quad (14)$$

其中， $\Delta s_1$  为该过程的熵变。由(12)式得

$$\Delta s_1 = [C_V \ln T_1 + R \ln(v_2-b) + s_0] - [C_V \ln T_1 + R \ln(v_1-b) + s_0] = R \ln \frac{v_2-b}{v_1-b} \quad (15)$$

将(15)式代入(14)式，得

$$Q_1 = T_1 R \ln \frac{v_2-b}{v_1-b} \quad (16)$$

等温压缩过程为放热分过程，放热量

$$Q_2 = T_2 |\Delta s_2| \quad (17)$$

其中， $\Delta s_2 (<0)$  为该过程的熵变。由(12)式得

$$\Delta s_2 = [C_V \ln T_2 + R \ln(v_4-b) + s_0] - [C_V \ln T_2 + R \ln(v_3-b) + s_0] = R \ln \frac{v_4-b}{v_3-b} \quad (18)$$

将(18)式代入(17)式，得

$$Q_2 = T_2 R \ln \frac{v_3-b}{v_4-b} \quad (19)$$

所以，循环效率

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{v_3-b}{v_4-b}}{T_1 \ln \frac{v_2-b}{v_1-b}} \quad (20)$$

对于两个绝热过程，由(13)式得

$$T_1^{(C_V/R)}(v_2-b) = T_2^{(C_V/R)}(v_3-b), \quad T_1^{(C_V/R)}(v_1-b) = T_2^{(C_V/R)}(v_4-b) \quad (21)$$

因此，

$$\frac{v_2-b}{v_1-b} = \frac{v_3-b}{v_4-b} \quad (22)$$

将(22)式代入(20)式，得

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (23)$$

即为所求  $\eta$  作为  $T_1$  和  $T_2$  的函数。

(6) 由 1mol 气体范德瓦尔斯状态方程  $\left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v-b) = RT$  得

$$RdT = (v-b)dp + \left(p + \frac{a}{v^2}\right)dv - (v-b)\frac{2a}{v^3}dv = (v-b)dp + \left[\frac{RT}{v-b} - (v-b)\frac{2a}{v^3}\right]dv \quad (24)$$

等温时,  $dT=0$ , 则由(24)得

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = \left[\frac{2a}{v^3} - \frac{RT}{(v-b)^2}\right]^{-1} = \frac{v^3(v-b)^2}{2a(v-b)^2 - RTv^3} \quad (25)$$

对于范德瓦尔斯模型, 可得

$$\kappa_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = \frac{v^2(v-b)^2}{RTv^3 - 2a(v-b)^2} \quad (26)$$

对上式改写

$$\kappa_T^{-1} = \frac{RTv}{(v-b)^2} - \frac{2a}{v^2}$$

代入范德瓦尔斯方程

$$\frac{RT}{v-b} = p + \frac{a}{v^2}$$

则

$$\kappa_T^{-1} = \frac{v}{v-b} \left[ p + \frac{a}{v^2} - \frac{2a(v-b)}{v^3} \right]$$

由(1)问的结果知  $v > b$ , 结合题给条件  $a \ll pv^2$ , 可得

$$\kappa_T^{-1} > \frac{v}{v-b} \left( p + \frac{a}{v^2} - \frac{2a}{v^2} \right) = \frac{v}{v-b} \left( p - \frac{a}{v^2} \right) > 0 \quad (27)$$

故对于范德瓦尔斯气体,  $\kappa_T$  的取值范围为

$$\kappa_T > 0 \quad (28)$$

其直观的物理意义为: 等温压缩时, 物质的体积随压强增大而减小。

我们知道范德瓦尔斯气体是一种稳定物质状态, 根据日常经验推而广之, 稳定物质系统都有  $\kappa_T > 0$ ,

评分标准: 总 50 分

(1) 问 6 分, ①②式各 3 分

(2) 问 2 分, ③式 2 分

(3) 问 8 分, ⑤式 3 分, ⑥式 1 分, ⑦式 4 分 (需论述过程或方程, 直接写出给 2 分)

(4) 问 10 分, ⑧式 2 分, ⑨式 2 分, ⑪式 2 分, ⑫式 2 分, ⑬ (或⑬') 式 2 分

(5) 问 12 分, ⑭⑯⑰⑱⑲⑳式各 2 分, ㉑㉒式各 1 分

(6) 问 12 分, ㉓式 4 分, ㉔式 2 分, ㉕式 4 分, ㉖式 2 分

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯