房山区 2020-2021 学年第一学期期中考试

高一数学试卷

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$，$B=\{0,1\}$，则

（A）$B\in A$　　（B）$A\subsetneqq B$

（C）$B\subsetneqq A$　　（D）$A=B$

（2）已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sqrt{x}>1$，则 $\neg p$ 为

（A）$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sqrt{x}\geqslant 1$　　（B）$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sqrt{x}\leqslant 1$

（C）$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sqrt{x}\geqslant 1$　　（D）$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sqrt{x}\leqslant 1$

（3）下列函数既是奇函数又在区间 $(0,1)$ 上单调递减的是

（A）$y=\dfrac{1}{x}$　　（B）$y=-|x|$

（C）$y=x^3$　　（D）$y=-x^2+1$

（4）函数 $f(x)=x^3-x+5$ 的零点所在的区间为

（A）$(-3,-2)$　　（B）$(-2,-1)$

（C）$(-1,0)$　　（D）$(0,1)$

（5）已知 $b<a<0$，则下列不等式成立的是

（A）$-a>-b$　　（B）$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$

（C）$ab > a^2$

（D）$\frac{b}{a} < 1$

（6）若 $x < 0$，$M = 5x^2 + x + 2$，$N = 4x(x+1)$，则 M 与 N 的大小关系为

（A）$M > N$

（B）$M = N$

（C）$M < N$

（D）无法确定

（7）函数 $y = 2x^2 - 2x - 1$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最小值为

（A）$-\frac{1}{2}$

（B）-1

（C）$-\frac{3}{2}$

（D）-2

（8）已知函数 $f(x) = \begin{cases} x,\ x \geqslant a, \\ x^2, 0 < x < a. \end{cases}$ 其中 $(a > 0)$．若对任意的 $0 < x_1 < x_2$ 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$，则实数 a 的取值范围是

（A）$(0, +\infty)$

（B）$(0, 1]$

（C）$(1, +\infty)$

（D）$[1, +\infty)$

（9）设 $x \in \mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则“$[x] \geqslant [y]$”是“$x \geqslant y$”的

（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件

（D）既不充分也不必要条件

（10）运动员推出铅球后铅球在空中的飞行路线可以看作是抛物线的一部分，铅球在空中飞行的竖直高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）近似地满足函数关系 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$．下表记录了铅球飞行中的 x 与 y 的三组数据，根据上述函数模型和数据，可推断出该铅球飞行到最高点时，水平距离为

x（单位：m）	0	3	6
y（单位：m）	1.8	3	2.7

（A）2.5 m　　　　（B）3 m

（C）3.9 m　　　　（D）5 m

第二部分（非选择题共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（11）方程组 $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ 的解集为__________.

（12）已知函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x}$，$f(x)$ 的定义域是__________，$f(1)=$__________.

（13）已知函数 $f(x)=x^2+x-1$的两个零点分别为 x_1 和 x_2，则 $x_1^2x_2+x_1x_2^2$ 的值为__________.

（14）为了引导居民节约用电，某城市对居民生活用电实行“阶梯电价”，按月用电量计算，将居民家庭

每月用电量划分为三个阶梯，电价按阶梯递增．第一阶梯：月用电量不超过 240 千瓦时的部分，电价为 0.5 元/千瓦时；第二阶梯：月用电量超过 240 千瓦时但不超过 400 千瓦时的部分，电价为 0.6 元/千瓦时；第三阶梯：月用电量超过 400 千瓦时的部分，电价为 0.8 元/千瓦时．若某户居民 10 月份交纳的电费为 360 元，则此户居民 10 月份的用电量为__________千瓦时.

（15）能够说明“若 a，b，c 是任意正实数，则 $\dfrac{a+c}{b+c}>\dfrac{a}{b}$”是假命题的一组整数 a，b，c 的值依次为__________.

（16）几位同学在研究函数 $f(x)=\dfrac{|x|+2}{x^2-4}$ 时给出了下列四个结论：

① $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

② $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减；

③ $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$；

④当 $x\in(-2,2)$ 时，$f(x)$ 有最大值；

其中所有正确结论的序号是__________　　.

三、解答题共 5 题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题 15 分）

已知集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$，集合 $B=\{x\mid \dfrac{x-1}{x+3}>0\}$.

（Ⅰ）分别用区间表示集合 A 和 B，求 $\complement_{\mathbf{R}}A$；

（Ⅱ）求 $A\bigcap B$，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\bigcup B$.

（18）（本小题 15 分）

已知关于 x 的不等式 $x^2-(a+2)x<-2a$ 的解集为 M .

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，求 M；

（Ⅱ）当 $a\in\mathbf{R}$ 时，求 M .

（19）（本小题 13 分）

已知 $x>3$，求 $y=x+\dfrac{4}{x-3}$ 的最小值，并说明 x 为何值时 y 取得最小值．下面是某位同学的解答过程：

> 解：因为 $x>3$，所以 $\dfrac{4}{x-3}>0$，根据均值不等式有
>
> $y=x+\dfrac{4}{x-3}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x-3}}$
>
> 其中等号成立当且仅当 $x=\dfrac{4}{x-3}$，即 $x(x-3)=4$，解得 $x=4$ 或 $x=-1$（舍），
>
> 所以 $y=x+\dfrac{4}{x-3}$ 的最小值为 $2\sqrt{\dfrac{4\times 4}{4-3}}=8$，
>
> 因此，当 $x=4$ 时，$y=x+\dfrac{4}{x-3}$ 取得最小值 8 .

该同学的解答过程是否有错误？如果有，请指出错误的原因，并给出正确的解答过程.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x^2+|x-a|$.

（Ⅰ）若 $a=0$，求证：函数 $f(x)$ 是偶函数；

（Ⅱ）若 $a>0$，用定义证明函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增；

（Ⅲ）是否存在实数 a，使得 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上的最小值为 1？若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由.

（21）（本小题 12 分）

定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，如果存在函数 $g(x)=Ax+B$（A，B 为常数），使得 $f(x)\geqslant g(x)$ 对一切实数 x 都成立，那么称 $g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一个承托函数.

（Ⅰ）判断 $g(x)=x$ 是否为函数 $f(x)=2x^2$ 的一个承托函数？说明理由；

（Ⅱ）请写出函数 $f(x)=|x|$ 的一个承托函数；

（Ⅲ）若函数 $g(x)=2x-a$ 为函数 $f(x)=ax^2$ 的一个承托函数，求 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	A	B	C	A	C	B	B	C

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分，有两空的第一空 3 分，第二空 2 分）

（11）$\{(2,1)\}$

（12）$[-1,0)\cup(0,+\infty)$；$\sqrt{2}+1$

（13）1

（14）580

（15）2，1，1（答案不唯一）

（16）①，②，④

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）（本小题 15 分）

解：

（Ⅰ）集合 A 可表示为 $[0,3]$，

由 $\dfrac{x-1}{x+3}>0$ 解得 $x<-3$ 或 $x>1$，所以集合 B 可表示为 $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

$\complement_{\mathbf{R}}A=(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

（Ⅱ）$A\cap B=(1,3]$

$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

（18）（本小题 15 分）

解：

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，不等式为 $x^2-x<2$，整理得 $x^2-x-2<0$

等价于 $(x-2)(x+1)<0$，

所以解集 $M=(-1,2)$

（Ⅱ）当 $a\in\mathbf{R}$ 时，$x^2-(a+2)x<-2a$ 整理得 $x^2-(a+2)x+2a<0$

等价于 $(x-2)(x-a)<0$

当 $a=2$ 时，$(x-2)^2<0$，解集为 $\varnothing$

当 $a>2$ 时，解集为 $(2,a)$

当 $a<2$ 时，解集为 $(a,2)$

（19）（本小题 13 分）

解：

错误原因表述为：$x\cdot\dfrac{4}{x-3}$ 不是定值，所以取得最小值不一定在 $x=\dfrac{4}{x-3}$ 处取得，或举反例当 $x=5$ 时，

$y=x+\dfrac{4}{x-3}=7$，说明 8 是最小值是错误的都可以.

正确解答为：

因为 $x>3$，所以 $\dfrac{4}{x-3}>0$，

由均值不等式有

$$y=x+\frac{4}{x-3}=x-3+\frac{4}{x-3}+3$$

$$\geq 2\sqrt{(x-3)\cdot\frac{4}{x-3}}+3=7$$

其中等号成立当且仅当 $x-3=\dfrac{4}{x-3}$，解得 $x=5$ 或 $x=1$（舍），

因此，当 $x=5$ 时，$y=x+\dfrac{4}{x-3}$ 取得最小值 7.

（20）（本小题 15 分）

（Ⅰ）若 $a=0$，$f(x)=x^2+|x|$，

因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$，

$f(-x)=(-x)^2+|-x|=x^2+|x|=f(x)$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

（Ⅱ）任取 $x_1,x_2\in(a,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，由 $a>0$，则 $0<x_1<x_2$ 且 $x_2-x_1>0$

则 $f(x_2)-f(x_1)=x_2^2+|x_2-a|-(x_1^2+|x_1-a|)$

$=x_2^2-x_1^2+x_2-a-(x_1-a)$

$=(x_2+x_1)(x_2-x_1)+x_2-x_1$

由 $0<x_1<x_2$， $x_2-x_1>0$，得 $f(x_2)-f(x_1)>0$

所以，若 $a>0$，函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增

（III） $f(x)=x^2+|x-a|=\begin{cases}x^2+x-a,x\ge a\\x^2-x+a,x<a\end{cases}$

当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上， $f(x)=x^2-x+a$， $f(x)$ 的最小值在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得，

令 $(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+a=1$，解得 $a=\frac{5}{4}$，符合条件

当 $a\le-\frac{1}{2}$ 时，在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上， $f(x)=x^2+x-a$， $f(x)$ 的最小值在 $x=-\frac{1}{2}$ 处取得，

令 $(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-a=1$，解得 $a=-\frac{5}{4}$，符合条件

当 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2},a]$ 上单调递减，在 $[a,\frac{1}{2}]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 的最小值在

$x=a$ 处取得， $f(a)=a^2<1$，所以此时最小值不可能是1

综上，存在 $a=\pm\frac{5}{4}$，使得 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上的最小值为1

（21）（本小题 12 分）

（Ⅰ） $g(x)=x$ 不是函数 $f(x)=2x^2$ 的一个承托函数

当 $x=\frac{1}{4}$ 时， $g(x)=\frac{1}{4}$， $f(x)=\frac{1}{8}$，此时 $f(x)<g(x)$，不满足承托函数的条件

（Ⅱ） $g(x)=\frac{1}{2}x$ （答案不唯一）

（III）若函数 $g(x)=2x-a$ 为函数 $f(x)=ax^2$ 的一个承托函数，

则 $ax^2\ge 2x-a$ 对一切实数 x 都成立

即 $ax^2-2x+a\ge 0$ 对一切实数 x 都成立，

当 $a=0$ 时， $g(x)=2x$， $f(x)=0$，此时 $g(x)$ 不是 $f(x)$ 的承托函数

当 $a \neq 0$，则有 $\begin{cases} a > 0 \\ 4 - 4a^2 \leq 0 \end{cases}$，

解得 $a \geq 1$