

高三数学

注意事项:

- 1.答题前,考生务必将自己的姓名,为生号,考场号,座位号填写在答题卡上.
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题号的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.
- 4.本试卷主要考试内容:高考全部内容.

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid |x-1| > 1\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{0\}$ B. $\{-1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. $(3+2i)(2-2i) = (\quad)$

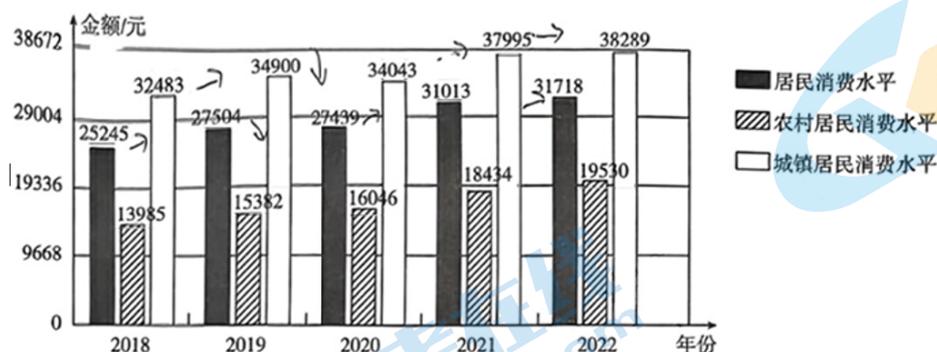
- A. $-10+2i$ B. $-10-2i$ C. $10+2i$ D. $10-2i$

3.已知 $f(2^x) = x$, 则 $f(3) = (\quad)$

- A. 8 B. 9 C. $\log_2 3$ D. $\log_3 2$

4.国家统计局发布的2018年至2022年我国居民消费水平情况如图所示,则下列说法正确的是()

(居民消费水平: $\frac{\text{农村居民消费水平} \times \text{农村人口数} + \text{城镇居民消费水平} \times \text{城镇人口数}}{\text{农村人口数} + \text{城镇人口数}}$)

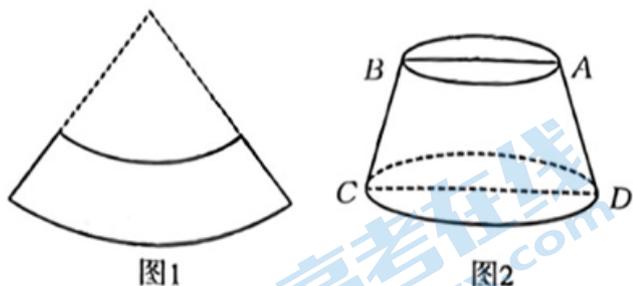


- A. 2018年至2022年我国居民消费水平逐年提高
- B. 2018年至2022年我国城镇居民消费水平逐年提高
- C. 2018年至2022年我国居民消费水平数据的60%分位数为27504元
- D. 2022年我国城镇人口数比农村人口数的1.5倍还要多

5.已知 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$

- A.0 B.1 C.-1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.某班级举行“变废为宝”手工活动，某学生用扇形纸壳裁成扇环（如图1）后，制成了简易笔筒（如图2）的侧面，在它的轴截面 $ABCD$ 中， $AB = AD = 10\text{cm}$, $CD = 15\text{cm}$ ，则原扇形纸壳中扇形的圆心角为（ ）



- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

7.过原点 O 的直线 $l: y = kx$ 与圆 $M: x^2 - 6x + y^2 - 6y + 16 = 0$ 交于 A, B 两点，且 $|OA| = |AB|$ ，则 $k =$ （ ）

- A.1 B.2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{2}$

8.已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$)，若任意 $\varphi \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有零点，则 ω 的取值范围为（ ）

- A. $(0, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$

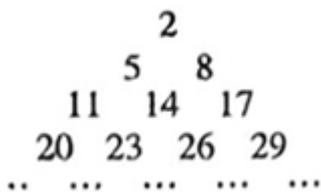
二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点，直线 $y = b$ 与双曲线 C

的渐近线交于点 A, B (A 在第二象限， B 在第一象限)，下列结论正确的是（ ）

- A. $BF_1 \perp BF_2$
 B. $BF_2 \parallel AO$
 C. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 2，则双曲线 C 的焦距的最小值为 4
 D. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 2，则双曲线 C 的焦距的最小值为 8

10.如图,三角形数阵由一个等差数列2,5,8,11,14,⋯排列而成,按照此规律,下列结论正确的是()



- A.数阵中前7行所有数的和为1190
- B.数阵中第8行从左至右的第4个数是101
- C.数阵中第10行的第1个数是137
- D.数阵中第10行从左至右的第4个数是146

11.已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)[f(x)-f(x-y)]=f(xy)$,当 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,时,

$f(x) \neq 0$.下列结论正确的是()

- A. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
- B. $f(10) = 1$
- C. $f(x)$ 是奇函数
- D. $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增

三、填空题: 本题共3小题, 每小题5分, 共15分.

12.已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $P\left(\frac{p}{4}, a\right)$ 在抛物线 C 上, 且 $|PF| = 3$, 则 $p =$

_____.

13.甲、乙两位同学进行羽毛球比赛, 约定赛制如下: 累计赢2局者胜, 分出胜负即停止比赛.已知甲每局赢的

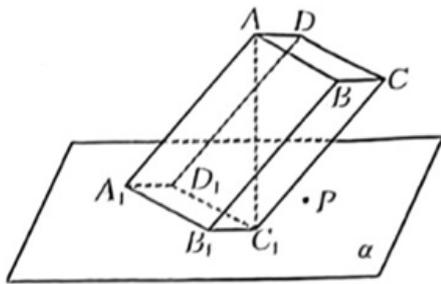
概率为 $\frac{3}{5}$, 每局比赛的结果相互独立.本次比赛到第3局才分出胜负的概率为_____ , 本次比赛甲获胜的

概率为_____.

14.如图, 将正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 斜立在平面 α 上, 顶点 C_1 在平面 α 内, $AC_1 \perp$ 平面

α , $AA_1 = 2AB = 6$.点 P 在平面 α 内, 且 $PC_1 = \sqrt{3}$.若将该正四棱柱绕 AC_1 旋转, PC 的最大值为

_____.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 6, a_1 a_3 = a_1$.

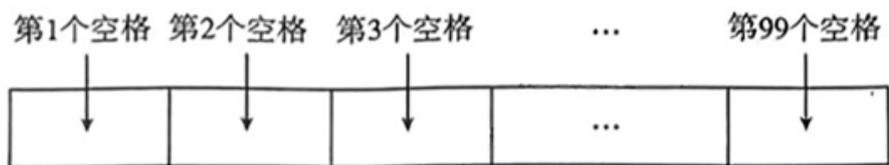
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项中最大值为 M_n , 最小值为 m_n (规定: $M_1 = m_1 = a_1$), 令 $b_n = \frac{M_n + m_n}{2}$, 求数列

$\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

16. (15 分)

将 3 个数字 1, 2, 3 随机填入如下 99 个空格中, 每个空格中最多填一个数字, 且填入的 3 个数字从左到右依次变大.

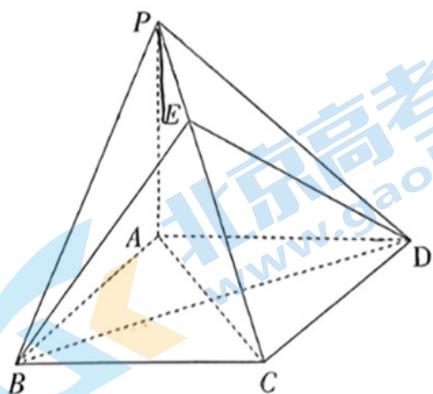


(1) 求数字 2 填在第 2 个空格中的概率;

(2) 记数字 2 填在第 x 个空格中的概率为 $P(x)$, 求 $P(x)$ 的最大值.

17. (15 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $PA \perp AC, BD \perp PC, PA = AB$.



(1) 证明: $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 若 $\overline{PC} = 4\overline{PE}$, $\angle ABC = 60^\circ$, 求二面角 $A-BD-E$ 的余弦值.

18. (17分)

已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 右焦点为 $F(1, 0)$, 且离心率为 $\frac{1}{2}$

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 证明, 圆 $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ 恒与以弦 AB 为直径的圆相切.

19. (17分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{2x - a}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处的切线过点 $(4, 2)$, 求 a 的值;

(2) 若 $f(x) \geq ae^{x-1}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.