

## 广州市 2020 届高三年级阶段训练题

## 文科数学

本试卷共 5 页，23 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上，并用 2B 铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号，并将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。写在本试卷上无效。

3. 作答填空题和解答题时，必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z = i(1+i)$ ，则  $|z| =$

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C. 1      D.  $\sqrt{2}$

2. 已知集合  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{-1, 0, 1\}$ ， $P = A \cap B$ ，则  $P$  的子集共有

- A. 2 个      B. 4 个      C. 6 个      D. 8 个

3. 设向量  $\mathbf{a} = (m, 1)$ ， $\mathbf{b} = (2, -1)$ ，且  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ，则  $m =$

- A. -2      B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D. 2

4. 已知  $\{a_n\}$  是等差数列， $a_3 = 5$ ， $a_2 - a_4 + a_6 = 7$ ，则数列  $\{a_n\}$  的公差为

- A. -2      B. -1      C. 1      D. 2

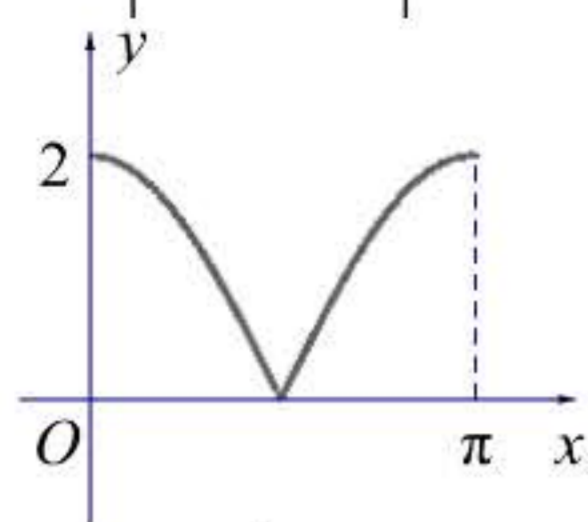
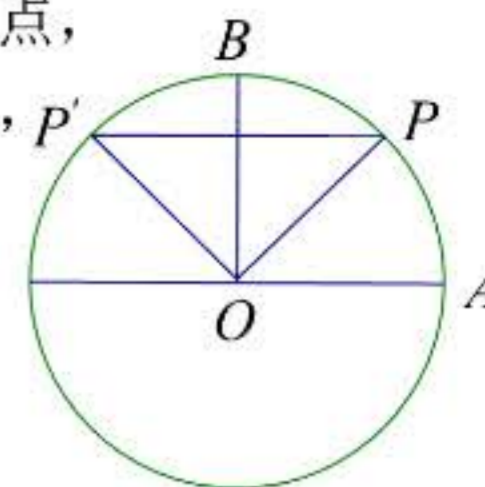
5. 已知命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 < 0$ ；命题  $q: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 > x^3$ ，则下列命题中为真命题的是

- A.  $p \wedge q$       B.  $\neg p \wedge q$       C.  $p \wedge \neg q$       D.  $\neg p \wedge \neg q$

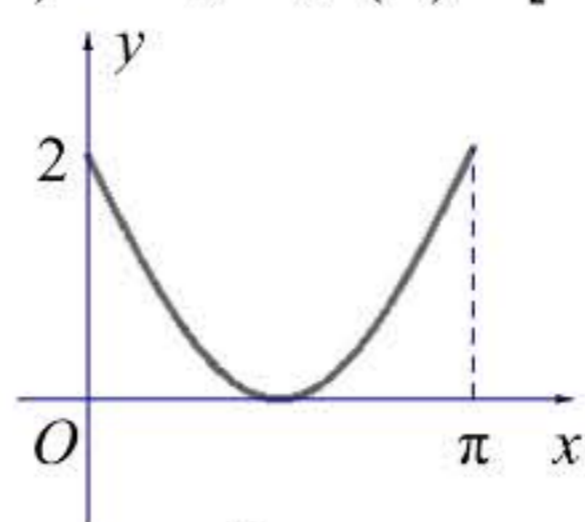
6. 已知偶函数  $f(x)$  满足  $f(x) = x - \frac{2}{x} (x > 0)$ ，则  $\{x | f(x+2) > 1\} =$

- A.  $\{x | x < -4 \text{ 或 } x > 0\}$       B.  $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$   
 C.  $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$       D.  $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$

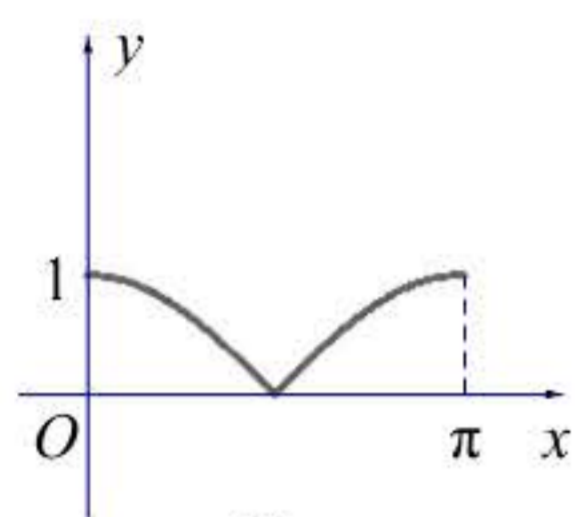
7. 如图, 圆  $O$  的半径为 1,  $A, B$  是圆上的定点,  $OB \perp OA$ ,  $P$  是圆上的动点, 点  $P$  关于直线  $OB$  的对称点为  $P'$ , 角  $x$  的始边为射线  $OA$ , 终边为射线  $OP$ , 将  $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP}'|$  表示为  $x$  的函数  $f(x)$ , 则  $y = f(x)$  在  $[0, \pi]$  上的图像大致为



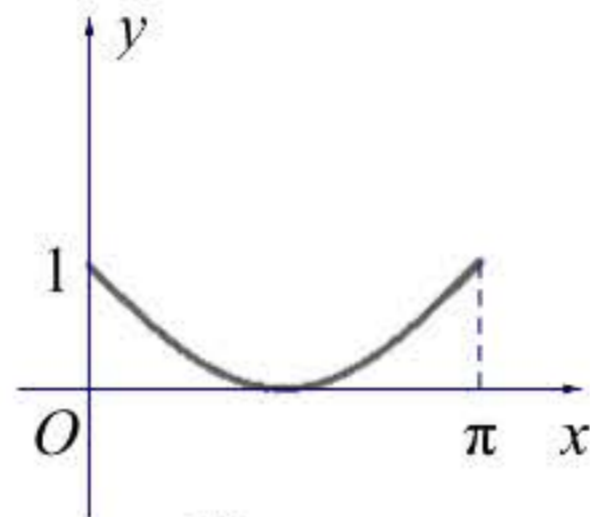
A.



B.



C.



D.

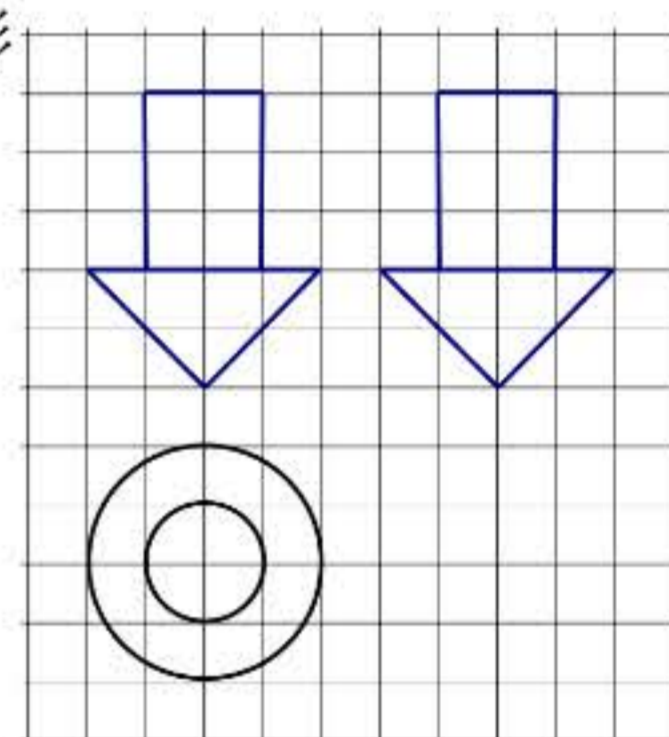
8. 陀螺是中国民间最早的娱乐工具, 也称陀罗. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某个陀螺的三视图, 则该陀螺的表面积为

A.  $(7 + 2\sqrt{2})\pi$

B.  $(10 + 2\sqrt{2})\pi$

C.  $(10 + 4\sqrt{2})\pi$

D.  $(11 + 4\sqrt{2})\pi$



9. 某人造地球卫星的运行轨道是以地心为一个焦点的椭圆, 其轨道的离心率为  $e$ , 设地球半径为  $R$ , 该卫星近地点离地面的距离为  $r$ , 则该卫星远地点离地面的距离为

A.  $\frac{1+e}{1-e}r + \frac{2e}{1-e}R$

B.  $\frac{1+e}{1-e}r + \frac{e}{1-e}R$

C.  $\frac{1-e}{1+e}r + \frac{2e}{1+e}R$

D.  $\frac{1-e}{1+e}r + \frac{e}{1+e}R$

10. 已知函数  $f(x) = x - a \ln x - 1$  存在极值点, 且  $f(x) \leq 0$  恰好有唯一整数解, 则实数  $a$  的取值范围是

A.  $(-\infty, 1)$

B.  $(0, 1)$

C.  $\left(0, \frac{1}{\ln 2}\right)$

D.  $\left(\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right)$

11. 已知  $F_1, F_2$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$  的两个焦点, 过点  $F_1$  且垂直于  $x$  轴的直线

与  $C$  相交于  $A, B$  两点, 若  $|AB| = \sqrt{2}$ , 则  $\triangle ABF_2$  的内切圆的半径为

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       D.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

12. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2,  $E, F, G$  分别是棱  $AD, CC_1, C_1D_1$  的中点, 给出下列四个命题:

- ①  $EF \perp B_1C$ ;  
 ② 直线  $FG$  与直线  $A_1D$  所成角为  $60^\circ$ ;  
 ③ 过  $E, F, G$  三点的平面截该正方体所得的截面为六边形;  
 ④ 三棱锥  $B - EFG$  的体积为  $\frac{5}{6}$ .

其中, 正确命题的个数为

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数  $y = f(x)$  的图像与  $y = 2^x$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 则  $f(4) =$  \_\_\_\_\_.

14. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq x + y \leq 2, \end{cases}$  则  $z = x - 2y$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

15. 羽毛球混合双打比赛每队由一男一女两名运动员组成. 某班级从 3 名男生  $A_1, A_2, A_3$  和 3 名女生  $B_1, B_2, B_3$  中各随机选出两名, 把选出的 4 人随机分成两队进行羽毛球混合双打比赛, 则  $A_1$  和  $B_1$  两人组成一队参加比赛的概率为 \_\_\_\_\_.

16. 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $2S_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ , 则  $a_3 + a_4 =$  \_\_\_\_\_,

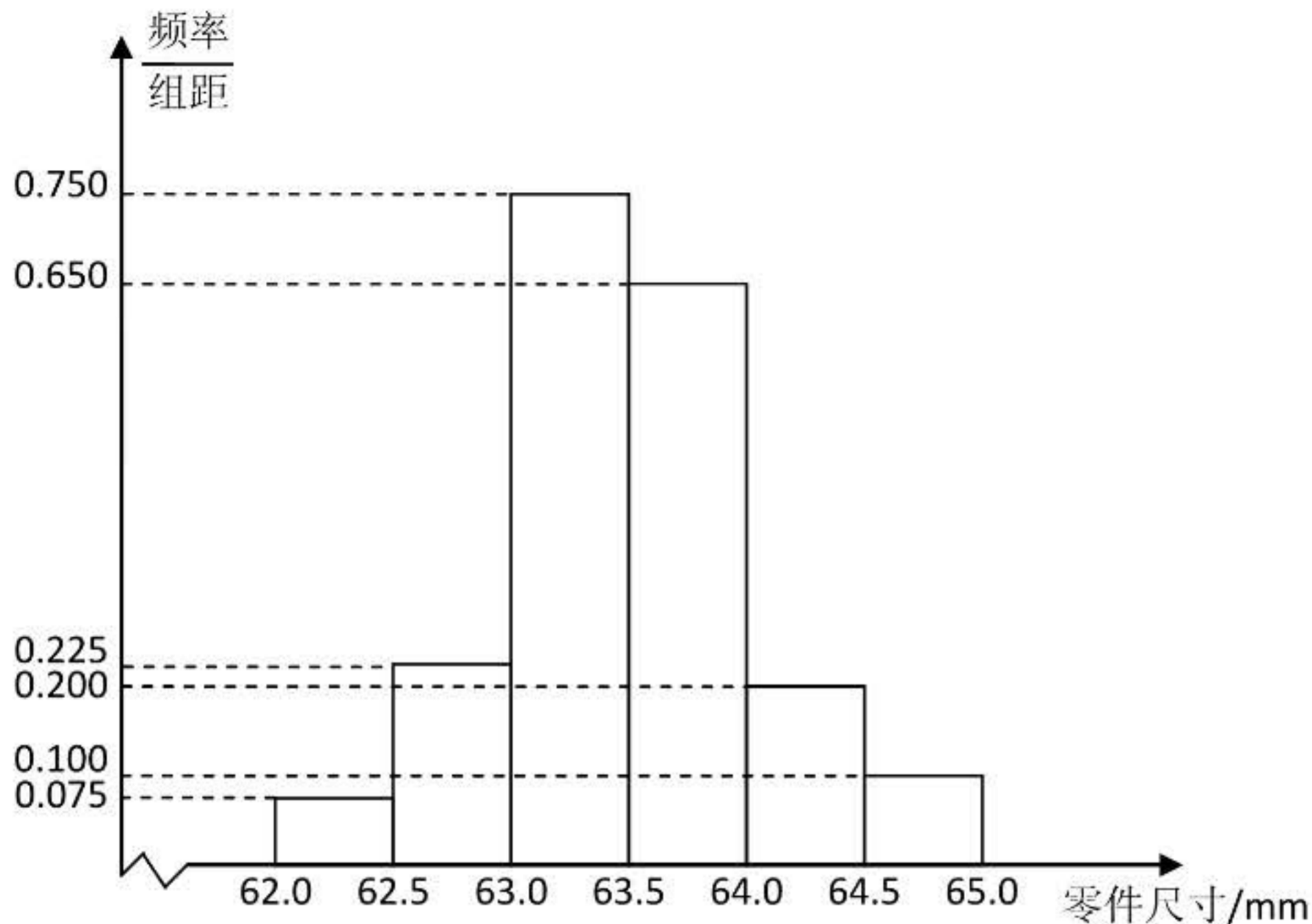
数列  $\{a_{n+2} - a_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n =$  \_\_\_\_\_. (第 1 空 2 分, 第 2 空 3 分)

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须做答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求做答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

某企业质量检验员为了检测生产线上零件的情况，从生产线上随机抽取了 80 个零件进行测量，根据所测量的零件尺寸（单位：mm），得到如下的频率分布直方图：



- 根据频率分布直方图，求这 80 个零件尺寸的中位数（结果精确到 0.01）；
- 已知尺寸在  $[63.0, 64.5)$  上的零件为一等品，否则为二等品。将这 80 个零件尺寸的样本频率视为概率，从生产线上随机抽取 1 个零件，试估计所抽取的零件是二等品的概率。

18. (12 分)

已知  $a, b, c$  分别是  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边， $\sin^2 A + \sin^2 C - \frac{2}{3} \sin A \sin C = \sin^2 B$ 。

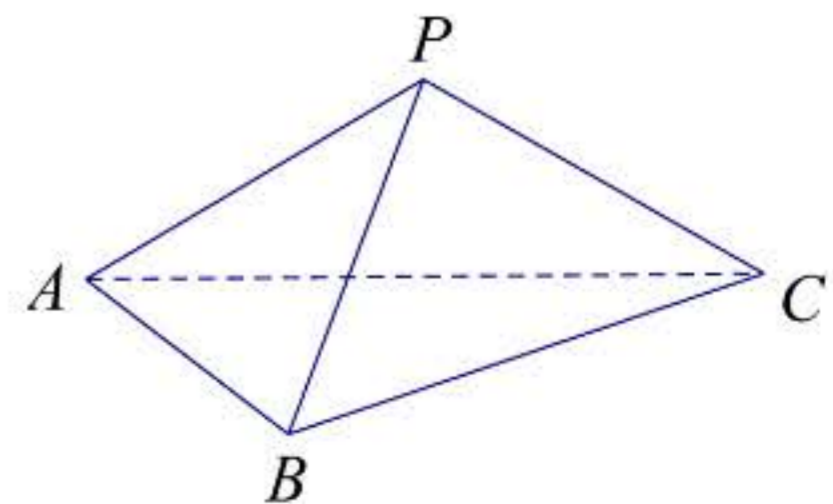
- 求  $\sin B$  的值；
- 若  $b = 2$ ， $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{2}$ ，求  $\triangle ABC$  的周长。

19. (12 分)

如图，三棱锥  $P-ABC$  中， $PA = PC$ ， $AB = BC$ ， $\angle APC = 120^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$$AC = \sqrt{3}PB = 2.$$

- 求证： $AC \perp PB$ ；
- 求点  $C$  到平面  $PAB$  的距离。



20. (12分)

已知点  $P$  是抛物线  $C: y = \frac{1}{4}x^2 - 3$  的顶点,  $A, B$  是  $C$  上的两个动点, 且  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = -4$ .

- (1) 判断点  $D(0, -1)$  是否在直线  $AB$  上? 说明理由;
- (2) 设点  $M$  是  $\triangle PAB$  的外接圆的圆心, 求点  $M$  的轨迹方程.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = a \ln x - \frac{be^x}{x}$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为

$$2x - y - 2 - e = 0.$$

- (1) 求  $a, b$  的值;
- (2) 证明函数  $f(x)$  存在唯一的极大值点  $x_0$ , 且  $f(x_0) < 2 \ln 2 - 2$ .

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

已知曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = 1 + t \sin \alpha, \end{cases}$  ( $t$  为参数), 曲线  $C_2$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sin \theta, \\ y = \sqrt{1 + \cos 2\theta}, \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}).$$

- (1) 求  $C_1$  与  $C_2$  的普通方程;
- (2) 若  $C_1$  与  $C_2$  相交于  $A, B$  两点, 且  $|AB| = \sqrt{2}$ , 求  $\sin \alpha$  的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知  $a > 0, b > 0$ , 且  $a + b = 1$ .

- (1) 求  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$  的最小值;
- (2) 证明:  $\frac{ab + 2b}{a^2 + b^2 + 1} < \frac{\sqrt{5}}{2}$ .