通州区 2022—2023 学年第一学期高一年级期末质量检测

数学参考答案及评分标准

2023 年 1 月

第一部分

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	C	B	C	B	A	C	D	B

第二部分

二、填空题

11. $\frac{1}{2}$

12. -2

13. $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

14. $\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$（第 1 空 3 分，第 2 空 2 分）

15. $(-4,3]$

三、解答题

16. 解：（Ⅰ）由已知可得 $\begin{cases}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.\end{cases}$ ………………………… 2 分

所以 $\begin{cases}\sin^2\alpha=\frac{9}{25},\\ \cos^2\alpha=\frac{16}{25}.\end{cases}$ ………………………… 4 分

又 α 是第四象限角，

所以 $\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{3}{5},\\ \cos\alpha=\frac{4}{5}.\end{cases}$ ………………………… 6 分

所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{7}{5}$. ………………………… 7 分

（Ⅱ）$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha$ ………………………… 9 分

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$, ………………………… 10 分

$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}$ ………………………… 12 分

$=\dfrac{-\frac{3}{4}+1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{7}$. ………………………… 13 分

17. 解：(Ⅰ)自变量 x 的取值应满足

$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, ………………………… 3 分

即 $x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$. ………………………… 4 分

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}\right\}$. ………………………… 5 分

(Ⅱ) $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$. ………………………… 8 分

(Ⅲ)由 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$ 解得 ………………………… 11 分

$-\frac{5\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$. ………………………… 12 分

因此，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{5\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right), k\in\mathbf{Z}$. ………………………… 13 分

18. 解：(Ⅰ)因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$. ………………………… 2 分

(Ⅱ)方案一：选择条件①③.

因为 $f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$，所以 $A=2$. ………………………… 4 分

所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

因为 $f(x)$ 的图象经过点 $(0,1)$，

所以 $2\sin\varphi=1$，即 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$. ………………………… 5 分

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. ………………………… 7 分

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. ………………………… 8 分

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$. ………………………… 10 分

当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，

$f(x)$ 取得最小值 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$； ………………………… 12 分

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，

$f(x)$ 取得最大值 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$. ………………………… 14 分

方案二：选择条件①④.

因为 $f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$，所以 $A=2$. ………………………… 4 分

所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{3}$ 对称，

所以 $2\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$， ………………………………………………………… 5 分

所以 $\varphi=k\pi+\frac{7\pi}{6}$.

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. ……………………………………………………………………… 7 分

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. ………………………………………………… 8 分

以下同方案一.

方案三：选择条件③④.

因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{3}$ 对称，

所以 $2\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$， ………………………………………………………… 3 分

所以 $\varphi=k\pi+\frac{7\pi}{6}$.

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. ……………………………………………………………………… 5 分

因为 $f(x)$ 的图象经过点 $(0,1)$，

所以 $A\sin\frac{\pi}{6}=1$，即 $A=2$. …………………………………………………………………… 7 分

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. ………………………………………………… 8 分

以下同方案一.

19. 解：（Ⅰ）自变量 x 的取值应满足 $1-\cos 2x>0$， ……………………………………………… 2 分

解这个不等式，得 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$. …………………………………………………………… 4 分

所以函数 $f(x)=\ln(1-\cos 2x)+\cos(x+\theta)$ 的定义域是 $\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$. …………… 5 分

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 是偶函数，

所以 $f(x)=f(-x)$ 对于 $x\in\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ 恒成立，

即 $\ln(1-\cos 2x)+\cos(x+\theta)=\ln[1-\cos 2(-x)]+\cos(-x+\theta)$. ……………………… 7 分

由此可得 $\cos(x+\theta)=\cos(-x+\theta)$，

所以 $2\sin x\sin\theta=0$.

所以 $\sin\theta=0$. ………………………………………………………………………………… 9 分

因为 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\theta=0$. …………………………………………………………………………………… 10 分

（Ⅲ）不存在 θ，使得函数 $f(x)$ 是奇函数. 原因如下： …………………………………… 11 分

$f(x)$ 是奇函数，等价于 $f(x)+f(-x)=0$ 对于 $x\in\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ 恒成立. ……… 12 分

因为 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\theta\neq 0$.

所以

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\ln\left[1-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

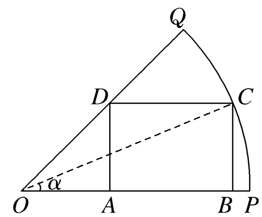
$=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta$

$=\sqrt{2}\cos\theta\neq 0.$ ………………………………………………………… 14 分

即 $\forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)+f(-x)=0$ 对于 $x\in\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ 不恒成立.

所以不存在 θ，使得函数 $f(x)$ 是奇函数. …………………………………………… 15 分

20. 解：（Ⅰ）连接 OC，设 $\angle POC=\alpha$，则 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. ………………… 1 分



在 Rt$\triangle OBC$ 中，$BC=\sin\alpha$，$OB=\cos\alpha$. ………………………… 3 分

在 Rt$\triangle OAD$ 中，$OA=AD=BC$.

所以 $AB=OB-OA=OB-BC=\cos\alpha-\sin\alpha$. ………………………… 4 分

因为矩形 $ABCD$ 为正方形，

所以 $AB=BC$，即 $\cos\alpha-\sin\alpha=\sin\alpha$，

所以 $\cos\alpha=2\sin\alpha$. ………………………………………………………………………… 5 分

由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，得

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，即 $AB=BC=\frac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………………… 7 分

所以正方形 $ABCD$ 的面积 $S_{\text{正方形}ABCD}=AB^2=\frac{1}{5}$. ……………………………………… 8 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，矩形 $ABCD$ 的面积

$S_{\text{矩形}ABCD}=AB\cdot BC=(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\alpha$

$=\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha$ ………………………………………………………… 9 分

$=\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ ……………………………………………… 11 分

$=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$. ……………………………………………………… 13 分

因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $2\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，

所以当 $2\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{8}$ 时，$S_{\text{矩形}ABCD\text{最大}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. ………………… 15 分

21. 解：（Ⅰ）由已知可得 $f(2)=\lg(2a+3)=0$，

所以 $2a+3=1$，

所以 $a=-1$. ………………………………………………………………………… 3 分

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 是减函数. 理由如下：

由（Ⅰ）知 $f(x)=\lg(-x+3)$.

令 $-x+3>0$，得 $x<3$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,3)$. …………………………………………… 5 分

因为 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,3)$，且 $x_1<x_2$，有 $-x_1+3>-x_2+3>0$.

所以 $\lg(-x_1+3)>\lg(-x_2+3)$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数 $f(x)$ 是减函数. ………………………………………………………… 9 分

（Ⅲ）$2f(x)>\lg(kx^2)$ 在区间 $[-4,-3]$ 上有解等价于

$2\lg(-x+3)>\lg(kx^2)$ 在区间 $[-4,-3]$ 上有解，

即 $(-x+3)^2>kx^2$ 在区间 $[-4,-3]$ 上有解，……………………………………… 11 分

亦即 $\left(-1+\dfrac{3}{x}\right)^2>k$ 在区间 $[-4,-3]$ 上有解. ……………………………… 12 分

令 $g(x)=\left(-1+\dfrac{3}{x}\right)^2$，$x\in[-4,-3]$，则 $\left(-1+\dfrac{3}{x}\right)^2>k$ 在区间 $[-4,-3]$ 上有解等价于 $k<g(x)_{\max}=g(-3)=4$. …………………………………………………… （14 分）

所以 k 的取值范围是 $\{k\mid 0<k<4\}$. ………………………………………… （15 分）

注：解答题学生若有其它解法，请酌情给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。