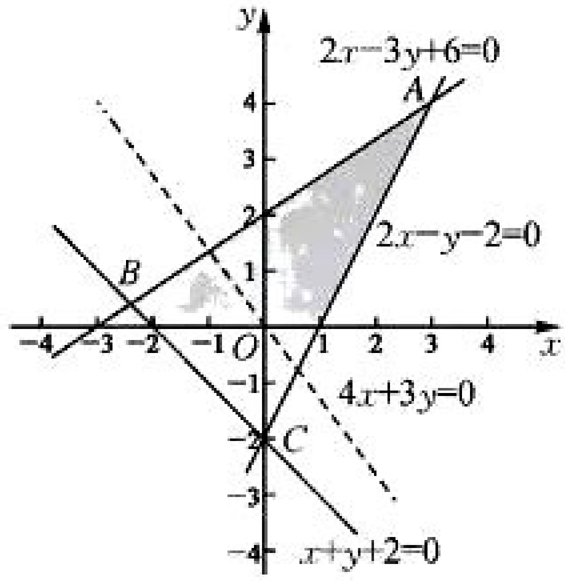
高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　因为 $z=\frac{i^{2023}}{|1+\sqrt{3}i|-2i}=\frac{-i}{2-2i}=\frac{-i(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$，所以 $8z=8\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)=2-2i$，所以 $8z$ 的共轭复数为 $2+2i$. 故选 B.

2. C　$A=\{x|4x^2-7x-2\leqslant 0\}=\left\{x\middle|-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 2\right\}$，$B=\{x|1\leqslant 2^x<8\}=\{x|0\leqslant x<3\}$，所以 $A\cup B=\left\{x\middle|-\frac{1}{4}\leqslant x<3\right\}$，$\complement_{R}(A\cup B)=\left\{x\middle|x<-\frac{1}{4}，或\ x\geqslant 3\right\}$. 故选 C.

3. A　因为 $\log_2 3>\log_2 2\sqrt{2}=\frac{3}{2}=\log_3 3\sqrt{3}>\log_3 4$，所以由 $a>\log_2 3$，可得 $|a|>\log_3 4$，反之则不成立. 所以"$a>\log_2 3$"是"$|a|>\log_3 4$"的充分不必要条件. 故选 A.

4. D　画出可行域如图阴影部分(含边界)所示，平移直线 $4x+3y=0$，当经过点 A 时，目标函数 z 取得最大值，由 $\begin{cases}2x-3y+6=0,\\2x-y-2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=4,\end{cases}$ 即 $A(3,4)$，所以当 $x=3,y=4$ 时，$z_{\max}=4\times 3+3\times 4=24$. 故选 D.



5. B　计算 $\bar{x}=\frac{0+2+4+6+8}{5}=4$，$\bar{y}=\frac{1+(m+1)+(2m+1)+(3m+3)+11}{5}=\frac{6m+17}{5}$，所以这组数据的样本点的中心是 $\left(4,\frac{6m+17}{5}\right)$，又 $(\bar{x},\bar{y})$ 在回归直线上，所以 $\frac{6m+17}{5}=1.3\times 4+0.6=5.8$，解得 $m=2$，所以 y 的取值分别为 1，3，5，9，11，在这 5 个数中，任取两个，取到的两个数都不大于 9 的概率为 $\frac{C_4^2}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. 故选 B.

6. D　根据线面角的定义，线面角是平面外的直线与平面内所有直线所成角中最小的角，故 l 与 α 内直线所成角的最小值为 $\frac{\pi}{6}$，当 l 在 α 内的射影与平面 α 内的直线垂直时，l 与之所成的角为 $\frac{\pi}{2}$，故 l 与 α 内直线所成角的范围为 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$. 故选 D.

7. A　由 $(a_{n+1}+2n)(a_{n+1}-a_n-2n)=0$ 及 $a_n>0$，得 $a_{n+1}-a_n-2n=0$，即 $a_{n+1}-a_n=2n$.
法一：$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=2\times 2$，$a_4-a_3=2\times 3$，$\cdots$，$a_n-a_{n-1}=2(n-1)$，这 $(n-1)$ 个式子累加，得 $a_n-a_1=n^2-n(n\geqslant 2)$，即 $a_n=n^2-n+2(n\geqslant 2)$，又当 $n=1$ 时，$a_1=2$，符合上式，所以 $a_n=n^2-n+2$. 故选 A.
法二：由 $a_1=2$，得 $a_2=4$，$a_3=8$，经逐一验证得 A 正确.

8. C　由题意知，函数图象过原点，且为奇函数的函数满足条件，对于 A，B，D 都是图象过原点，且为奇函数，如图 1，图 2，图 4，是"优美函数"；

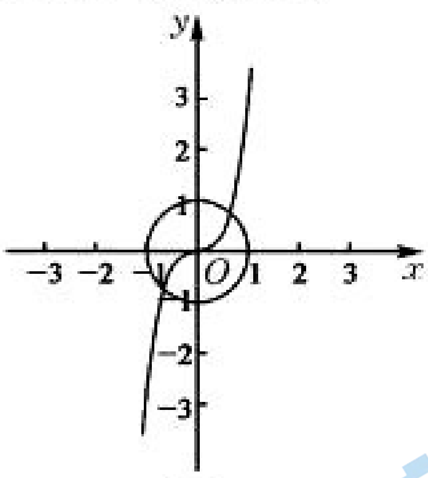


图1

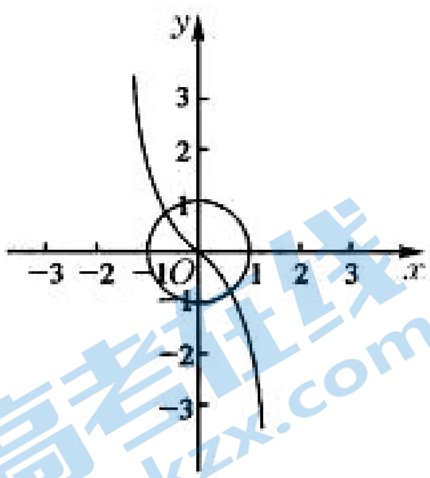


图2

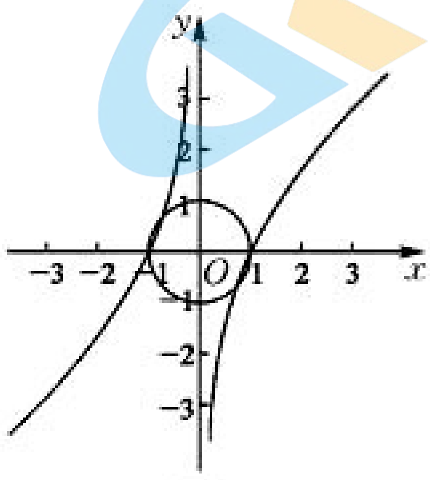


图3

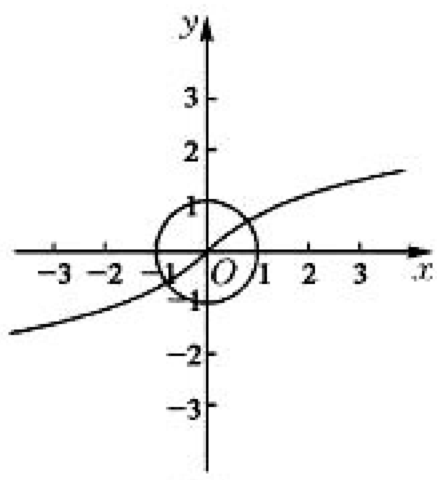
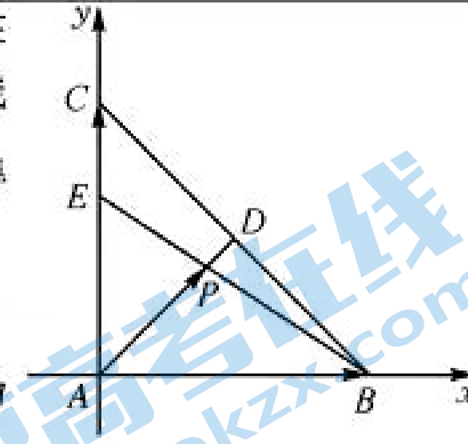


图4

对于 C，如图 3，不是"优美函数". 故选 C.

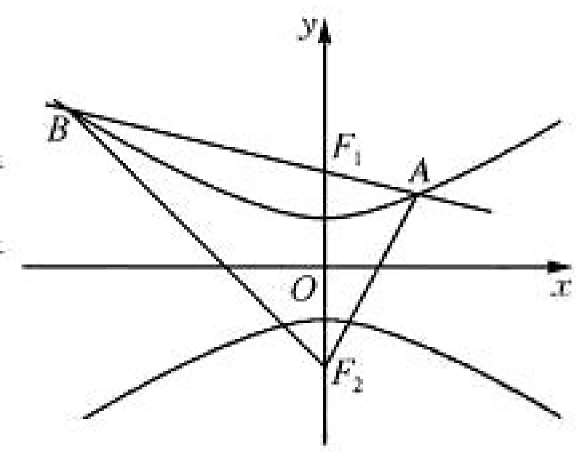
9. C　法一：因为 P 在 AD 上，故 $\overrightarrow{AP}/\!/\overrightarrow{AD}$，所以存在唯一实数 λ，使得 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}$，又 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，故 D 为 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC}$；同理存在 μ，使得 $\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BE}$，又 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\mu(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})=(1-\mu)\overrightarrow{AB}+\frac{2\mu}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\frac{\lambda}{2}=1-\mu=\frac{2\mu}{3}$，所以 $\mu=\frac{3}{5}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，所以 $x=y=\frac{2}{5}$，所以 $xy=\frac{4}{25}$. 故选 C.

法二：不妨设$\triangle ABC$为等腰直角三角形，其中$AB\perp AC$，$AB=AC=6$，以A为原点，AB所在直线为x轴，建立平面直角坐标系，如图，$A(0,0)$，$B(6,0)$，$C(0,6)$，$D(3,3)$，$E(0,4)$，则直线BE，AD的方程分别为$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$，$y=x$，联立解得$P\left(\frac{12}{5},\frac{12}{5}\right)$；由$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，得$\left(\frac{12}{5},\frac{12}{5}\right)=x(6,0)+y(0,6)$，解得$x=y=\frac{2}{5}$，则$xy=\frac{4}{25}$. 故选C.



10. D　因为函数$f(x)=4\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，其图象的两相邻对称中心间的距离为4，所以$f(x)$的最小正周期$T=8$，所以$\omega=\frac{\pi}{4}$，所以$f(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)$，由$f(0)=2\sqrt{3}$，得$4\sin\varphi=2\sqrt{3}$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，从而$f(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)$，则A错误；由$\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得$x=4k+\frac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以$f(x)$的对称轴方程为$x=4k+\frac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$，则B错误；令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得$\frac{2}{3}+8k\leqslant x\leqslant\frac{14}{3}+8k(k\in\mathbf{Z})$，所以$f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{2}{3}+8k,\frac{14}{3}+8k\right](k\in\mathbf{Z})$，$\left[1,\frac{20}{3}\right]$不是$\left[\frac{2}{3}+8k,\frac{14}{3}+8k\right](k\in\mathbf{Z})$的子集，则C错误；由$4\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant 2$，得$8k-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 8k+2(k\in\mathbf{Z})$，即不等式$f(x)\geqslant 2$的解集为$\left\{x\,\middle|\,8k-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 8k+2,k\in\mathbf{Z}\right\}$，故D正确. 故选D.

11. D　因为$\angle AF_2F_1=\angle F_1BF_2$，所以$\triangle AF_2F_1\backsim\triangle ABF_2$，所以$\frac{|AF_1|}{|AF_2|}=\frac{|AF_2|}{|AB|}=\frac{|F_1F_2|}{|F_2B|}$，因为$|AF_2|=2|AF_1|$，且$|AF_2|-|AF_1|=2a$，$|BF_2|-|BF_1|=2a$，所以$|AF_1|=2a$，$|AF_2|=4a$，$|AB|=8a$，$|F_1B|=6a$，$|BF_2|=8a$，$|F_1F_2|=4a$，所以$\frac{|F_1F_2|}{2a}=2$，即离心率$e=2$，$b=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$，所以渐近线的斜率为$\pm\frac{a}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，因为$\triangle ABF_2$为等腰三角形，所以$\triangle ABF_2$的面积$S=\frac{1}{2}\times 4a\times\sqrt{(8a)^2-(2a)^2}=4\sqrt{15}a^2$. 综上，ABC错误，D正确. 故选D.

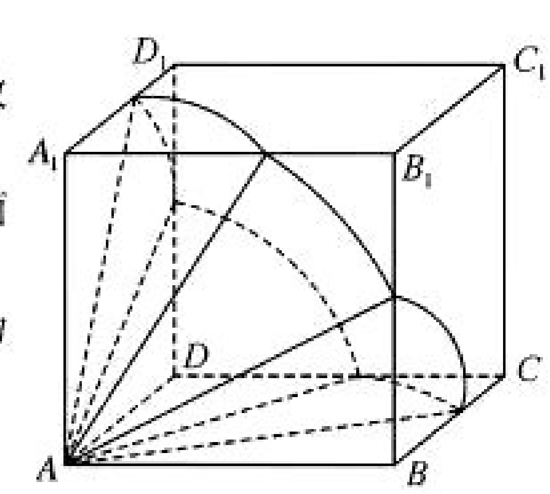


12. A　由题意知，$\forall x\in(1,+\infty)$，不等式$\frac{1+x}{1+e^{kx}}<\frac{kx}{\ln x}$恒成立，即$\forall x\in(1,+\infty)$，$(1+e^{kx})\ln e^{kx}>(1+x)\ln x$恒成立.
设$f(x)=(1+x)\ln x(x>1)$，则$f(e^{kx})>f(x)$. 因为$f'(x)=\ln x+\frac{1+x}{x}=\ln x+\frac{1}{x}+1>0$，所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，于是$e^{kx}>x$对任意的$x\in(1,+\infty)$恒成立，即$k>\frac{\ln x}{x}$对任意的$x\in(1,+\infty)$恒成立. 令$g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$，即$k>g(x)_{\max}$. 因为$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以当$x\in(1,e)$时，$g'(x)>0$；当$x\in(e,+\infty)$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(1,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，所以$g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$，所以$k>\frac{1}{e}$. 故选A.

13. 28　因为$x^2\left(\sqrt{a}+\frac{1}{x^3}\right)^8$展开式中所有项的系数和为256，所以$(\sqrt{a}+1)^8=256$，解得$a=1$，由题意得$x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^8$展开式中$x^{-4}$项的系数与$\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^8$展开式中的$x^{-6}$项的系数相同. $\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^8$展开式的通项$T_{r+1}=C_8^r\cdot x^{-3r}(r=0,1,2,\cdots,8)$，令$-3r=-6$，得$r=2$，所以展开式中$x^{-4}$项的系数为$C_8^2=28$.

14. 4　易知$|F_1F_2|=4\sqrt{2}$，连接PF_2，则$PF_1\perp PF_2$，所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=32$，由椭圆的定义知$|PF_1|+|PF_2|=8$，二者联立并解得$|PF_2|=4$，即圆F_2的半径为4.

15. $\frac{5\sqrt{3}\pi}{2}$　球被面ABB_1A_1，面$ABCD$，面ADD_1A_1所截的曲线长均为$\frac{\pi}{6}\times 2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$，故在此三面上所截得的曲线长为$\frac{\sqrt{3}\pi}{3}\times 3=\sqrt{3}\pi$，球在面$BCC_1B_1$，面$CDD_1C_1$，面$A_1B_1C_1D_1$所截得的曲线长均为$\frac{\pi}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$，故在这三面上所截得的曲线长的和为$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\times 3=\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$，故所截得的曲线总长为$\sqrt{3}\pi+\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}=\frac{5\sqrt{3}\pi}{2}$.



16. 1 011　因为$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{2n}{n+1}$①，所以当$n\geqslant 2$时，$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{n-1}}=\frac{2(n-1)}{n}$②，①－②得$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}$，所以$S_n=\frac{n(n+1)}{2}(n\geqslant 2)$．当$n=1$时，$\frac{1}{S_1}=1$，所以$S_1=1$，此时$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$仍然成立，所以$S_n=\frac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$．所以当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=n$，当$n=1$时，$a_1=S_1=1$，上式也成立，故$a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$．因为$f(x)=\cos\pi x+\cos\frac{\pi}{3}=\cos\pi x+\frac{1}{2}$，所以$f(x)+f(1-x)=1$，设$S=f\left(\frac{a_1}{2\,023}\right)+f\left(\frac{a_2}{2\,023}\right)+f\left(\frac{a_3}{2\,023}\right)+\cdots+f\left(\frac{a_{2\,022}}{2\,023}\right)=f\left(\frac{1}{2\,023}\right)+f\left(\frac{2}{2\,023}\right)+f\left(\frac{3}{2\,023}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right)$，又$S=f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right)+f\left(\frac{2\,021}{2\,023}\right)+f\left(\frac{2\,020}{2\,023}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2\,023}\right)$，两式相加，得$2S=\left[f\left(\frac{1}{2\,023}\right)+f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2\,023}\right)+f\left(\frac{2\,021}{2\,023}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right)+f\left(\frac{1}{2\,023}\right)\right]=2\,022$，所以$S=1\,011$．

17. 解：(1)在$\triangle DAC$中，$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC$，

即$13=4+CD^2+2\sqrt{3}CD$，解得$CD=\sqrt{3}$(负根舍)，……2分

所以$S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin\angle ADC=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．……4分

(2)因为$\angle ABC=120°$，BD平分$\angle ABC$，所以$\angle DBA=\angle DBC=60°$，……5分

又$\angle ADC=150°$，所以$\angle DAB+\angle DCB=360°-120°-150°=90°$，……6分

在$\triangle ABD$中，由正弦定理，得$\frac{BD}{\sin\angle DAB}=\frac{AD}{\sin\angle DBA}$，①……7分

在$\triangle DBC$中，由正弦定理，得$\frac{BD}{\sin\angle DCB}=\frac{CD}{\sin\angle DBC}$，②……8分

①与②，得$\frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle DAB}=\frac{AD}{CD}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，所以$\frac{\sin\angle DCB}{\cos\angle DCB}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，……10分

又$\sin^2\angle DCB+\cos^2\angle DCB=1$，且$\angle DCB\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\sin\angle DCB=\frac{2}{\sqrt{7}}$，……11分

将$\sin\angle DCB=\frac{2}{\sqrt{7}}$代入②，得$\frac{BD}{\frac{2}{\sqrt{7}}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，所以$BD=\frac{4\sqrt{7}}{7}$．……12分

18. 解：(1)由题意得，该校100名学生每日使用手机的时间的平均数为

$\bar{x}=6\times\frac{10}{100}+18\times\frac{38}{100}+30\times\frac{32}{100}+42\times\frac{10}{100}+54\times\frac{7}{100}+66\times\frac{3}{100}=\frac{2700}{100}=27(\text{min})$．……2分

所以估计该校学生每日使用手机的时间的平均数为27 min．……4分

(2)由题意知该校学生每日使用手机的时间在[48，72]内的概率估计为$\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$，

则$X\sim B\left(3,\frac{1}{10}\right)$，……5分

所以$P(X=0)=C_3^0\left(1-\frac{1}{10}\right)^3=\frac{729}{1\,000}$，$P(X=1)=C_3^1\times\frac{1}{10}\times\left(1-\frac{1}{10}\right)^2=\frac{243}{1\,000}$，……7分

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{10}\right)^1=\frac{27}{1\,000}$，$P(X=3)=\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{1}{1\,000}$，……9分

所以X的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{729}{1\,000}$	$\frac{243}{1\,000}$	$\frac{27}{1\,000}$	$\frac{1}{1\,000}$

……10分

所以$E(X)=0\times\frac{729}{1\,000}+1\times\frac{243}{1\,000}+2\times\frac{27}{1\,000}+3\times\frac{1}{1\,000}=\frac{3}{10}$．$\left(\text{或}E(X)=3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{10}\right)$……12分

19. (1)证明：分别取AB，BE的中点F，G，连接CF，FG，DG，则$FG/\!/AE$，且$FG=\frac{1}{2}AE$，……1分

又$CD/\!/AE$，且$CD=\frac{1}{2}AE$，所以$FG/\!/CD$，且$FG=CD$，……2分

所以四边形$CFGD$为平行四边形，所以$CF/\!/DG$．……3分

因为$AE\perp$平面ABC，$CF\subset$平面ABC，所以$AE\perp CF$，

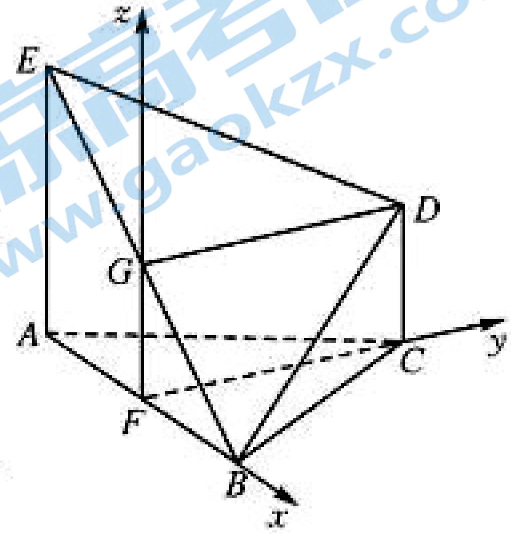
所以 $AE\perp DG$，……… 4 分

因为 $CA=CB=3$，F 为 AB 的中点，所以 $CF\perp AB$，

所以 $DG\perp AB$，……… 5 分

又 $AB,AE\subset$ 平面 ABE，且 $AB\cap AE=A$，所以 $DG\perp$ 平面 ABE，

又 $DG\subset$ 平面 BDE，所以平面 $ABE\perp$ 平面 BDE。…………………………………………………………… 6 分



(2)解：由(1)得 $CF\perp AB$，$CF\perp FG$，$FG\perp AB$，所以 FB,FC,FG 两两垂直，故以直线 FB，FC，FG 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系(如图所示)，则 $B(\sqrt{5},0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,2,1)$，$E(-\sqrt{5},0,2)$，所以 $\overrightarrow{DB}=(\sqrt{5},-2,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{BE}=(-2\sqrt{5},0,2)$。…………………………………………………………… 8 分

设平面 BDE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{5}x-2y-z=0,\\ -2\sqrt{5}x+2z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，解得 $y=0$，$z=\sqrt{5}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,\sqrt{5})$；…………………………………… 9 分

设平面 BDC 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{5}a-2b-c=0,\\ c=0,\end{cases}$

令 $a=2$，解得 $b=\sqrt{5}$，$c=0$，所以 $\boldsymbol{m}=(2,\sqrt{5},0)$。……………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{3\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$。……………………………………………………………… 11 分

设二面角 $E-BD-C$ 的大小为 θ，则 $\theta\in[0,\pi]$，$|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\sqrt{1-\dfrac{6}{81}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$。……………………………………………………… 12 分

20. (1)解：因为点 $A(-2,1)$ 在 E 上，所以 $(-2)^2=2p$，解得 $p=2$，所以 E 的方程为 $x^2=4y$，…………… 1 分

因为 C 为 E 的准线与 y 轴的交点，所以 $C(0,-1)$，

所以直线 AC 的斜率为 -1，…………………………………………………………………………………… 2 分

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，所以 $AB\perp AC$，所以直线 AB 的斜率为 1，

所以直线 AB 的方程为 $y-1=x+2$，即 $y=x+3$，…………………………………………………………… 3 分

联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=x+3,\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-4x-12=0$，

解得 $x=-2$，或 $x=6$，将 $x=6$ 代入抛物线方程得 $y=9$，即 $B(6,9)$，…………………………………… 4 分

所以 $|AB|=\sqrt{(6+2)^2+(9-1)^2}=8\sqrt{2}$。…………………………………………………………………… 5 分

(2)证明：设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，代入 $x^2=4y$，得 $x^2-4kx-4=0$，

$\Delta=16k^2+16>0$，

设点 $M\left(x_1,\dfrac{x_1^2}{4}\right)$，$N\left(x_2,\dfrac{x_2^2}{4}\right)$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$。…………………………………… 6 分

设点 $P\left(t,\dfrac{t^2}{4}\right)$，则 $k_{PM}=\dfrac{\dfrac{x_1^2}{4}-\dfrac{t^2}{4}}{x_1-t}=\dfrac{x_1+t}{4}$，所以直线 PM 的方程为 $y-\dfrac{t^2}{4}=\dfrac{x_1+t}{4}(x-t)$。

令 $y=-1$，得 $x=\dfrac{tx_1-4}{x_1+t}$，所以 $Q\left(\dfrac{tx_1-4}{x_1+t},-1\right)$，同理得 $R\left(\dfrac{tx_2-4}{x_2+t},-1\right)$。…………………… 8 分

设以线段 QR 为直径的圆与 y 轴的交点为 $S(0,s)$，

则 $\overrightarrow{QS}=\left(-\dfrac{tx_1-4}{x_1+t},s+1\right)$，$\overrightarrow{RS}=\left(-\dfrac{tx_2-4}{x_2+t},s+1\right)$，

因为 $QS\perp RS$，则 $\overrightarrow{QS}\cdot\overrightarrow{RS}=0$，即 $\dfrac{tx_1-4}{x_1+t}\cdot\dfrac{tx_2-4}{x_2+t}+(s+1)^2=0$，………………………… 10 分

所以 $(s+1)^2=-\dfrac{tx_1-4}{x_1+t}\cdot\dfrac{tx_2-4}{x_2+t}=-\dfrac{t^2x_1x_2-4t(x_1+x_2)+16}{x_1x_2+t(x_1+x_2)+t^2}=-\dfrac{-4t^2-16tk+16}{-4+4tk+t^2}=4$，

解得 $s=1$ 或 $s=-3$。

故以线段 QR 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点 $(0,1)$ 和 $(0,-3)$。………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $f(x)=ae^x-axe^x+1$，其定义域为 $\mathbf{R}$，

因为 $a=1$，所以 $f(x)=e^x-xe^x+1=(1-x)e^x+1$，…………………………………………………………… 1 分

所以 $f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$，所以 $f'(1)=-e$，……………………………………………………… 2 分

又 $f(1)=1$，所以 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=-\mathrm{e}(x-1)$，即 $\mathrm{e}x+y-1-\mathrm{e}=0$. …………………… 3 分

(2)法一：由题意知 $F(x)=f(x)+\ln x-1=\ln x-a(x-1)\mathrm{e}^x$，且其定义域为 $(0,+\infty)$，

易知 $F(1)=0$，且 $F'(x)=\dfrac{1}{x}-ax\mathrm{e}^x=\dfrac{1-ax^2\mathrm{e}^x}{x}\ (x>0)$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$F'(x)=\dfrac{1-ax^2\mathrm{e}^x}{x}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不可能有 2 个不同零点，不合题意； …………………… 4 分

当 $a>0$ 时，令 $h(x)=1-ax^2\mathrm{e}^x\ (x>0)$，则 $h'(x)=-a(2x+x^2)\mathrm{e}^x<0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

当 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$h(x)=1-x^2\mathrm{e}^{x-1}$，且 $h(1)=0$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)>0$，即 $F'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，即 $F'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $F(x)=\ln x-a(x-1)\mathrm{e}^x$ 在 $x=1$ 处取得极大值，且 $F(1)=0$，

此时函数 $F(x)$ 仅有一个零点，不合题意. …………………… 5 分

当 $a>0$ 且 $a\neq\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$h(0)=1>0$，$h\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)=1-\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}<0$，

所以存在唯一 $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $1-ax_0^2\mathrm{e}^{x_0}=0$，所以 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{ax_0^2}$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)>0$，即 $F'(x)>0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，即 $F'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $F(x)_{\max}=F(x_0)=\ln x_0-a(x_0-1)\mathrm{e}^{x_0}$，

又 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{ax_0^2}$，所以 $F(x)_{\max}=\ln x_0-a(x_0-1)\mathrm{e}^{x_0}=\ln x_0-\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{x_0^2}$. …………………… 6 分

设 $g(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{x^2+x-2}{x^3}=\dfrac{(x+2)(x-1)}{x^3}$

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

于是 $g(x)_{\min}=g(1)=0$，所以 $g(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 0$（当且仅当 $x=1$ 时等号成立）， …………………… 7 分

因为 $a\neq\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $x_0\neq 1$，所以 $F(x)_{\max}=F(x_0)>F(1)=0$，

又 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减. …………………… 8 分

①当 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，由 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{ax_0^2}$，令 $u(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{ax^2}$，显然 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}>1$，$u\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}-1>0$，又 $u(1)=\mathrm{e}-\dfrac{1}{a}<0$，

所以 $x_0>1$，且 $\ln\dfrac{1}{a}=x_0+2\ln x_0>x_0>1$，$F\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)=\ln\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)-\ln\dfrac{1}{a}+1$，

令 $t=\ln\dfrac{1}{a}$，则 $k(t)=\ln t+1-t$，可得 $k'(t)=\dfrac{1}{t}-1$，

所以在 $(1,+\infty)$ 上 $k'(t)<0$，$k(t)$ 单调递减，

从而 $k(t)\leqslant k(1)=0$，即 $\ln t\leqslant t-1$.

所以 $F\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)<0$，从而在 $\left(1,\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 内 $F(x)$ 必有另一个零点，符合题意. …………………… 10 分

②当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，易知 $x_0<1$，此时 $x\in(x_0,1)$ 时，$F(x)>0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$F(x)<0$，

设 $m=\mathrm{e}^{-a}\in(0,1)$，可得 $F(m)=-a+a(1-m)\cdot\mathrm{e}^m$.

令 $H(m)=\mathrm{e}^m(1-m)$，$H'(m)=-m\mathrm{e}^m<0$，所以 $H(m)$ 在 $m\in(0,1)$ 上单调递减，

从而 $H(m)\in(0,1)$，故 $F(m)=F(\mathrm{e}^{-a})<0$，

从而 $\mathrm{e}^{-a}<x_0$，且当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，存在 $x\in(\mathrm{e}^{-a},x_0)$，使得 $F(x)=0$，

也即当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$F(x)$ 有两个零点.

综上，所求实数 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$. …………………… 12 分

法二：由题意知 $F(x)=f(x)+\ln x-1=\ln x-a(x-1)e^x$，且其定义域为 $(0,+\infty)$.

令 $F(x)=\ln x-a(x-1)e^x=0$，显然 $x=1$ 是方程的一个解. ………………………………………… 4 分

当 $x\neq1$ 时，$F(x)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{\ln x}{x-1}e^{-x}$. 令 $G(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}e^{-x}$，则 $G(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

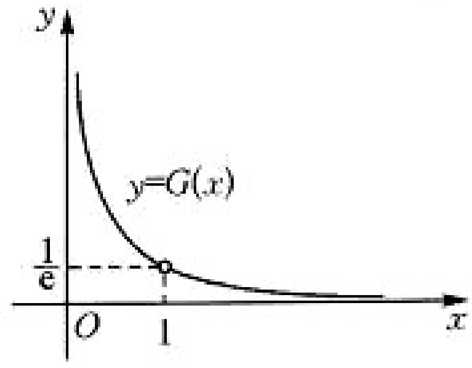
$G'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}e^{-x}-\dfrac{\ln x}{x-1}e^{-x}=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}e^{-x}-\dfrac{\ln x}{x-1}e^{-x}=\dfrac{e^{-x}}{(x-1)^2}\left(1-\dfrac{1}{x}-x\ln x\right)$. ………… 6 分

令 $g(x)=1-\dfrac{1}{x}-x\ln x(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\ln x-1$，$g''(x)=\dfrac{-2}{x^3}-\dfrac{1}{x}<0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $g'(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(1)=0$. 当 $x\neq1$ 时，$g(x)<0$，

所以 $G'(x)<0$，所以 $G(x)$ 在 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………………… 9 分

又 $x>0$，且 $x\to0$ 时，$G(x)\to+\infty$；$x\to1$ 时，$G(x)\to\dfrac{1}{e}$；$x\to+\infty$ 时，$G(x)\to0$，



函数 $G(x)$ 的大致图象如右图：

由题意，知直线 $y=a$ 与函数 $G(x)$ 的图象恰有一个交点，

所以 $a>0$，且 $a\neq\dfrac{1}{e}$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$. ………………………………… 12 分

22. 解：(1)由 $C:\begin{cases}x=1+2\cos\theta,\\y=2\sin\theta,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-1=2\cos\theta,\\y=2\sin\theta,\end{cases}$ 又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

所以 $(x-1)^2+y^2=4$，即曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=4$. ………………………………… 2 分

因为 $3x-2y+1=0$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

所以 $3\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+1=0$，即直线 l 的极坐标方程为 $3\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+1=0$. ………………… 4 分

(2)设 $P(1+2\cos\theta,2\sin\theta)$，………………………………………………………………………… 5 分

由点到直线的距离公式可得点 P 到直线 l 的距离

$d=\dfrac{|4-(4\sin\theta-6\cos\theta)|}{\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}|4-2\sqrt{13}\sin(\theta-\varphi)|$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{3}{2}$. ……………………… 7 分

所以当 $\sin(\theta-\varphi)=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$ 时，$d_{\min}=0$； ………………………………………………………… 8 分

当 $\sin(\theta-\varphi)=-1$ 时，$d_{\max}=\dfrac{4+2\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=2+\dfrac{4\sqrt{13}}{13}$. ……………………………………………… 9 分

所以点 P 到直线 l 的距离的取值范围为 $\left[0,2+\dfrac{4\sqrt{13}}{13}\right]$. ………………………………………… 10 分

23. 解：(1)因为 $f(x)=|x-1|+1$，$f(x)-|x+2|\leqslant3$，

即 $|x-1|-|x+2|\leqslant2$， ……………………………………………………………………………… 1 分

当 $x<-2$ 时，$-(x-1)+(x+2)\leqslant2$，无解； ………………………………………………………… 2 分

当 $-2\leqslant x\leqslant1$ 时，$-(x-1)-(x+2)\leqslant2$，解得 $x\geqslant-\dfrac{3}{2}$，所以 $-\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant1$； ……………………… 3 分

当 $x>1$ 时，$(x-1)-(x+2)\leqslant2$，化简，得 $-3\leqslant2$，所以 $x>1$. ………………………………… 4 分

所以不等式 $f(x)-|x+2|\leqslant3$ 的解集为 $\left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. ………………………………………… 5 分

(2)因为 $|x+a|+2f(x)>x^2+2$，$f(x)=|x-1|+1$，

当 $1\leqslant x\leqslant2$ 时，$|x+a|+2|x-1|>x^2$，可化为 $|x+a|>x^2-2x+2$，………………………… 6 分

所以 $x+a>x^2-2x+2$，或 $x+a<-x^2+2x-2$，

即存在 $x\in[1,2]$，使得 $a>x^2-3x+2$ 或 $a<-x^2+x-2$. ………………………………………… 7 分

若存在 $x\in[1,2]$，使 $a>x^2-3x+2$ 成立，因为 $x^2-3x+2\geqslant-\dfrac{1}{4}$，所以 $a>-\dfrac{1}{4}$； ………………… 8 分

若存在 $x\in[1,2]$，使 $a<-x^2+x-2$ 成立，因为 $-x^2+x-2\leqslant-2$，所以 $a<-2$. ……………… 9 分

综上，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$. …………………………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。