北师大附属实验中学

2023－2024 学年度第一学期**高三数学**月考试卷（2023.10.）

班级__________ 姓名___________

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，将正确答案的序号填在答题纸上）

1．已知集合 $A=\{x\mid x<-1或x>1\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，则集合 $A\cup B=$

A．$\{x\mid 0\leqslant x<1\}$　　B．$\{x\mid 1<x<2\}$

C．$\{x\mid x<-1或x\geqslant 0\}$　　D．$\{x\mid x<-1或x>2\}$

2．下列函数中，是偶函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A．$y=-\dfrac{1}{x}$　　B．$y=|x+1|$　　C．$y=\ln(x^2)$　　D．$y=2^x$

3．等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，公比 $q=-2$，则 S_4 等于

A．15　　B．-15　　C．5　　D．-5

4．已知实数 $a>b$，$c>0$，则下列不等式一定成立的是

A．$a-c>b$　　B．$a^c>b^c$　　C．$c^a>c^b$　　D．$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

5．要得到函数 $y=\dfrac{x}{x-1}$ 的图象，只需将函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象

A．向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

B．向右平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

C．向左平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

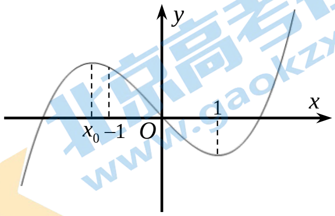
D．向左平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

6．若关于 x 的不等式 $ax+\dfrac{a}{x}\geqslant 1$ 对于任意 $x>0$ 恒成立，则 a 的取值范围是

A．$a\geqslant\dfrac{1}{2}$　　B．$a\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C．$a\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 或 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$　　D．$a\leqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7．函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 的图象如图所示，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 与 $x=1$ 处取得极值，则下列说法正确的是



A．$c>0$

B．$b<0$

C．函数 $y=f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数

D．过点 $(x_0,f(x_0))$ 的图象的切线有且只有 1 条

8．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{2n}=n+1$，$a_{2n+1}=a_{2n}+a_{2n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则集合 $\{m\,|\,a_m\leqslant 20\}$ 中元素的个数为

A．14　　B．20　　C．24　　D．25

9．已知平面直角坐标系中，角 α 的终边不在坐标轴上，则“$\tan\alpha<\sin\alpha<\cos\alpha$”是“$\alpha$ 是第四象限角”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．已知 $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\leqslant 0\\ kx^2-x, & x>0\end{cases}$，$g(x)=f(x)-m$，其中 k,m 是常数，则

A．存在实数 k，使得对任意实数 m，函数 $g(x)$ 都有零点

B．存在实数 m，使得对任意实数 k，函数 $g(x)$ 至少有 2 个零点

C．对于任意实数 m，存在实数 k，使得函数 $g(x)$ 恰有 2 个零点

D．对于任意实数 k，存在实数 m，使得函数 $g(x)$ 恰有 3 个零点

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，将正确答案填在答题纸上）

11．函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}+x^{-\frac{1}{3}}$ 的定义域是______．

12．函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$ 在点 $x=\frac{2}{3}\pi$ 处的切线的斜率为______．

13．用**反证法**证明命题“对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}>a_n$”时，应首先“假设______”，再推出矛盾，从而说明假设不能成立，原命题为真命题．

14．定义在 $[\frac{1}{2},8)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(4x)=3f(x)$，且当 $x\in[\frac{1}{2},2)$ 时，$f(x)=|\log_2 x|$．若方程 $f(x)=t$ 有四个不相等的实数根，则 t 的取值范围是______；这四个实数根的乘积为______．

15．在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{n+1}=f(a_n)$，下列说法正确的是______．

① 若 $f(x)=2x+1$，则 $\{a_n\}$ 一定是递增数列；

② 若 $f(x)=2^x$，则 $\{a_n\}$ 一定是递增数列；

③ 若 $f(x)=x^3+1$，$a_1\in(-1,0)$，则对任意 $c>0$，都存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n>c$．

④ 若 $f(x)=kx^2+2$，$a_1=2$，且存在常数 c，使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n<c$，则 k 的最大值是 $\frac{1}{4}$．

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16．已知 α 是第二象限内的角，$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（Ⅰ）求 $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})$ 的值；

（Ⅱ）已知函数 $f(x)=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$，求 $f(\alpha+\frac{\pi}{12})$ 的值．

17．已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=3$，公差 $d\neq 0$；等比数列 $\{b_n\}$ 中，$b_3=a_1$，b_1 是 a_2 和 a_3 的等差中项，b_2 是 a_1 和 a_2 的等差中项．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

（Ⅲ）记 $c_n=a_n\cdot b_n$，比较 c_{n+1} 与 c_n 的大小．

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{ax^2+4x+4}$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若 $a=0$，求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（Ⅱ）当 $a>1$时，讨论函数 $f(x)$ 的单调区间.

19. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点为 $F(2,0)$，椭圆与 y 轴的一个交点的坐标为 $(0,\sqrt{2})$.

（Ⅰ）求椭圆方程；

（Ⅱ）过点 $M(3,0)$ 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 A，B 两点（点 A 在点 B 左侧），点 A 关于 x 轴的对称点为 C，求△MBC 面积的最大值.

20. 已知函数 $f(x)=ae^{-x}-b\ln(1+x)+x$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-4x+3$.

（Ⅰ）求 a，b 的值；

（Ⅱ）求证：$f(x)>0$ 恒成立.（参考数据：$e^{0.90}\approx 2.46,\ e^{1}\approx 2.72,\ e^{1.10}\approx 3.00$）

21. 已知 N 元正整数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$（$N\geqslant 2$）满足：$a_1<a_2<\cdots<a_N$，且对任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,N\}$，$i<j$，都有 $\dfrac{a_j}{a_j-a_i}\in\mathbf{Z}$.

（Ⅰ）若 $a_1=2$，写出所有满足条件的集合 A；

（Ⅱ）若 a_N 恰有 N 个正约数，求证：$a_N=a_{N-1}+1$；

（Ⅲ）求证：对任意的 $i,j\in\{1,2,\cdots,N-1\}$，$i<j$，都有 $\dfrac{a_j}{a_i}\leqslant\dfrac{j}{i}$.

答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	D	D	A	A	C	C	C	B

11. $[-1,0)\cup(0,3]$

12. $-\frac{\pi}{3}$

13. $\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{n+1}\le a_n$

14. $(0,1)$；16

15. ②③

16.（12 分）

（Ⅰ）因为 α 是第二象限内的角，$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

所以 $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

（Ⅱ）$f(x)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1-\cos x}{2}+\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}).$$

所以 $f(\alpha+\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{6}}{12}-\frac{1}{2}.$$

17.（13 分）

（Ⅰ）依题意

$$\begin{cases} b_2=\frac{a_1+a_2}{2}=3-\frac{d}{2} \\ b_1=\frac{a_2+a_3}{2}=3+\frac{d}{2} \\ b_1=3+\frac{d}{2} \end{cases}\Rightarrow(3+\frac{d}{2})(3-d)=(3-\frac{d}{2})^2.$$

$\Rightarrow d^2=2d\Rightarrow d\neq 0$(舍) 或 $d=2\Rightarrow d=2, a_1=1, b_1=4, q=\dfrac{1}{2}$. .

所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$， $b_n=4\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}$.

（Ⅱ） $S_n=n^2+8-(\dfrac{1}{2})^{n-3}$.

（Ⅲ） $c_n=a_nb_n=\dfrac{2n-1}{2^{n-3}}$， $c_{n+1}=a_{n+1}b_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2^{n-2}}$.

所以 $c_{n+1}-c_n=\dfrac{2n+1}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^{n-3}}=\dfrac{3-2n}{2^{n-2}}$.

所以 $c_2>c_1$； 且当 $n\geq 2$ 时， $c_{n+1}<c_n$

18. （15 分）

（Ⅰ）解：函数 $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{4x+4}$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$， 且 $x\neq -1\}$.

$$f'(x)=\frac{e^{x+1}(4x+4)-4e^{x+1}}{(4x+4)^2}=\frac{4xe^{x+1}}{(4x+4)^2}.$$

令 $f'(x)=0$， 得 $x=0$，

当 x 变化时， $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	↘		↗

故 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,-1)$， $(-1,0)$； 单调增区间为 $(0,+\infty)$.

当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值 $f(0)=\dfrac{e}{4}$.

（Ⅱ）解：因为 $a>1$，

所以 $ax^2+4x+4=(x+2)^2+(a-1)x^2>0$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

求导，得 $f'(x)=\dfrac{e^{x+1}(ax^2+4x+4)-e^{x+1}(2ax+4)}{(ax^2+4x+4)^2}=\dfrac{e^{x+1}x(ax+4-2a)}{(ax^2+4x+4)^2}$，

令 $f'(x)=0$， 得 $x_1=0$， $x_2=2-\dfrac{4}{a}$，

当 $a=2$ 时， $x_2=x_1=0$，

因为 $f'(x)=\dfrac{2e^{x+1}x^2}{(2x^2+4x+4)^2}\geqslant 0$，（当且仅当 $x=0$ 时， $f'(x)=0$ ）

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调递增.

当 $1<a<2$ 时，$x_2<x_1$，

当 x 变化时，$f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,2-\frac{4}{a})$	$2-\frac{4}{a}$	$(2-\frac{4}{a},0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

故函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(2-\frac{4}{a},0)$，单调增区间为 $(-\infty,2-\frac{4}{a})$，$(0,+\infty)$．

当 $a>2$ 时，$x_2>x_1$，

当 x 变化时，$f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2-\frac{4}{a})$	$2-\frac{4}{a}$	$(2-\frac{4}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

故函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0,2-\frac{4}{a})$，单调增区间为 $(-\infty,0)$，$(2-\frac{4}{a},+\infty)$．

综上（略）．

19. （15 分）

解：（Ⅰ）依题意有 $c=2$，$b=\sqrt{2}$，可得 $a^2=6$，$b^2=2$．

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$．

（Ⅱ）直线 l 的方程为 $y=k(x-3)$，显然 k 存在．

联立方程组 $\begin{cases} y=k(x-3), \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1. \end{cases}$

消去 y 并整理得 $(3k^2+1)x^2-18k^2x+27k^2-6=0$．　（*）

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

故 $x_1+x_2=\frac{18k^2}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{27k^2-6}{3k^2+1}$．

已知 $x_1<x_2$，且显然 x_1,x_2 均小于 3．

所以 $S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}\cdot|2y_1|\cdot(3-x_1)=|y_1|(3-x_1)$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|2y_1|\cdot(x_2-x_1)=|y_1|(x_2-x_1)$．

$S_{\triangle MBC}=|S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AMC}|=|y_1|(3-x_2)=|k|(3-x_1)(3-x_2)$

$$=|k|[9-3(x_1+x_2)+x_1x_2]=\frac{3|k|}{3k^2+1}\le\frac{3|k|}{2\sqrt{3k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

等号成立时，可得 $k^2=\frac{1}{3}$，此时方程（*）为 $2x^2-6x+3=0$，满足 $\Delta>0$.

所以 ΔMBC 面积 S 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20.（15 分）

解：已知函数 $f(x)=ae^{-x}-b\ln(1+x)+x$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-4x+3$.

（Ⅰ） $f'(x)=-ae^{-x}-\frac{b}{1+x}+1$.

由 $\begin{cases}f'(0)=-a-b+1=-4\\ f(0)=a=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$

（Ⅱ） $f(x)=3e^{-x}-2\ln(1+x)+x,\ x>-1$. $f'(x)=-3e^{-x}-\frac{2}{1+x}+1$.

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=3e^{-x}+\frac{2}{(1+x)^2}>0$ 恒成立，

所以 $g(x)=f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f'(2)=-\frac{3}{e^2}-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}-\frac{3}{e^2}=\frac{e^2-9}{3e^2}<0$， $f'(3)=-\frac{3}{e^3}-\frac{1}{2}+1=-\frac{3}{e^3}+\frac{1}{2}>0$，

所以 $g(x)=f'(x)$ 存在唯一的零点 x_0， $x_0\in(2,3)$，

且满足 $-3e^{-x_0}-\frac{2}{1+x_0}+1=0$. ①

当 x 变化时， $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-1,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗

所以 $f(x)_{\min}=3e^{-x_0}-2\ln(1+x_0)+x_0$， $x_0\in(2,3)$.

将①带入上式，得 $f(x)_{\min}=\frac{-2}{1+x_0}-2\ln(1+x_0)+x_0+1$， $x_0\in(2,3)$.

令 $t=x_0+1$，并构造函数 $h(t)=\frac{-2}{t}-2\ln t+t$， $t\in(3,4)$.

则有 $h'(t)=\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t}+1=\frac{t^2-2t+2}{t^2}=\frac{(t-1)^2+1}{t^2}>0$.

所以 $h(t)$ 在 $(3,4)$ 上单调递增.

所以 $h(t)>h(3)=-\frac{2}{3}-2\ln3+3\approx\frac{7}{3}-2\times1.10>0$.

即 $f(x)_{\min}>0$，所以 $f(x)>0$ 恒成立.

21．（15 分）

解：（Ⅰ）$\{2,3\}$ 或 $\{2,4\}$ 或 $\{2,3,4\}$．（4 分：正确答案 2+1+1，错误答案每个-1）

（Ⅱ）证明：由题，分别令 $i=N$， $j=1,2,\cdots,N-1$，

知 $\dfrac{a_N}{a_N-a_1},\dfrac{a_N}{a_N-a_2},\cdots,\dfrac{a_N}{a_N-a_{N-1}}\in\mathbf{Z}$，

即 $a_N-a_1,a_N-a_2,\cdots,a_N-a_{N-1}$ 这 $N-1$ 个小于 a_N 的数均为 a_N 的正约数.

因为 a_N 的正约数的个数恰为 N 个（其中最大的是 a_N， 最小的是 1），

而 $a_N>a_N-a_1>a_N-a_2>\cdots>a_N-a_{N-1}$，

所以 $a_N-a_{N-1}=1$.

（Ⅲ）证明：由题 $\dfrac{a_j}{a_j-a_1},\dfrac{a_j}{a_j-a_2},\cdots,\dfrac{a_j}{a_j-a_i}\in\mathbf{Z}$，

且 $1<\dfrac{a_j}{a_j-a_1}<\dfrac{a_j}{a_j-a_2}<\cdots<\dfrac{a_j}{a_j-a_i}$.

所以 $\dfrac{a_j}{a_j-a_1}\ge 2,\ \dfrac{a_j}{a_j-a_2}\ge 3,\ \cdots,\ \dfrac{a_j}{a_j-a_i}\ge i+1$，

最后一个不等式整理得 $ia_j\le(i+1)a_i$， 即 $\dfrac{a_j}{a_i}\le\dfrac{i+1}{i}$.

又 $j>i$，所以 $j\ge i+1$，所以 $\dfrac{a_j}{a_i}\le\dfrac{j}{i}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！