

数 学 2021.05

命题人：高宇

审核人：郑拴平 马超周

本试卷共 4 页，满分 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回。

第一部分 选择题（共 60 分）

一、选择题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 若复数 $z = \frac{2-i}{-i}$ ，则复数 z 所对应的点在（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$ ， $\mathbf{b} = (-2, 3)$ ， $\mathbf{c} = (k, 2)$ ，若 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{c}$ ，则 $k =$ （ ）

- A. -11 B. 11 C. -10 D. 10

3. 已知 \mathbf{e}_1 ， \mathbf{e}_2 是表示平面内所有向量的一组基底，则下列四个向量中，不能作为一组基底的是（ ）

- A. $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$ B. $\{3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2, -6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2\}$
 C. $\{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1\}$ D. $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$

4. 某几何体有 6 个顶点，则该几何体不可能是（ ）

- A. 五棱锥 B. 三棱柱 C. 三棱台 D. 四棱台

5. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ，且 α 为锐角，则 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ （ ）

- A. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

6. 对于任意向量 \mathbf{a} ， \mathbf{b} ，下列命题中正确的是（ ）

- A. 若 $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$ ，则 $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ B. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
 C. $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| > |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ D. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$

7. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1)$ ， $\mathbf{b} = (-1, 3)$ ， $\mathbf{c} = (2, 1)$ ，且 $(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{b}) \parallel \mathbf{c}$ ，则 $\lambda =$ （ ）

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{7}$ D. $-\frac{1}{7}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对边分别为 a, b, c , 且 $a=1, b=\sqrt{3}, A=30^\circ$, 则 $B=$ ()

- A. 60° 或 120° B. 60° C. 30° D. 30° 或 150°

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin(A-B) \cdot \cos B + \cos(A-B) \cdot \sin B \geq 1$, 则 $\triangle ABC$ 一定是 ()

- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形
C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

10. 设 $a = \frac{1}{2} \cos 6^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 6^\circ, b = \frac{2 \tan 13^\circ}{1 + \tan^2 13^\circ}, c = \sqrt{\frac{1 - \cos 50^\circ}{2}}$, 则有 ()

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

11. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, AC=1, \overline{AB} \cdot \overline{AC}=1$, O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且

$\overline{OA} + 2\overline{OB} + 3\overline{OC} = \mathbf{0}$, 则 $\overline{AO} \cdot \overline{BC}$ 的值为 ()

- A. -4 B. -1 C. 1 D. 4

12. 我国古代数学家秦九韶在《数书九章》中记述了“一斜求积术”, 用现代式子表示即为: 在

$\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(ab)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$,

根据此公式, 若 $c \cos B + (b + 3a) \cos C = 0$, 且 $c^2 - a^2 - b^2 = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{3}$

第二部分 非选择题 (共 90 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

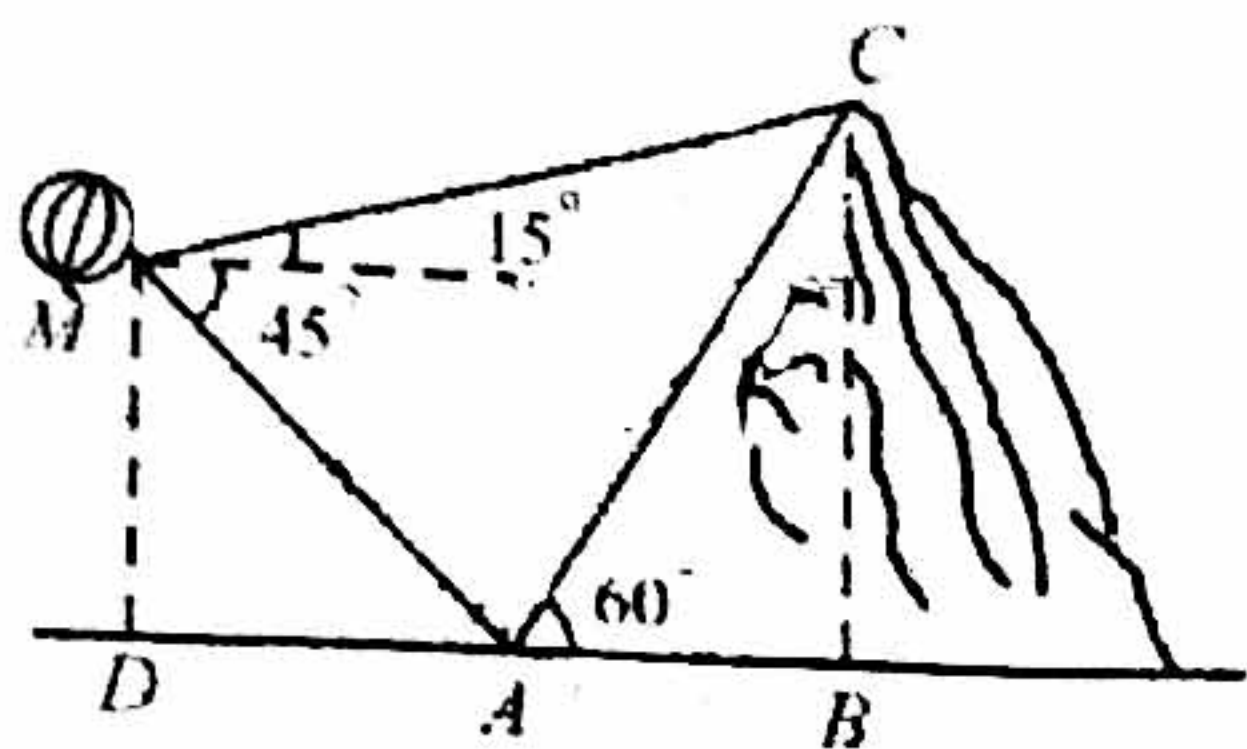
13. $(2+i)(1-i) =$ _____.

14. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ =$ _____.

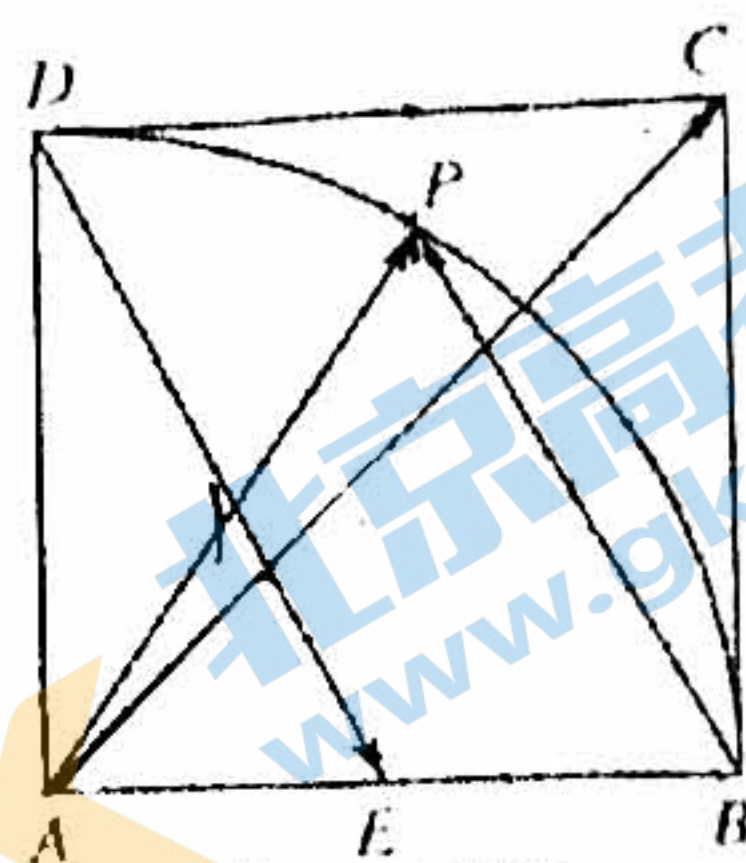
15. 已知 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为单位向量, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{3}$, 则 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的夹角为 _____.

16. 若实数 α, β 满足方程组 $\begin{cases} \cos \alpha = 2 \sin \beta \\ \sin \alpha = 2 \cos \beta - 1 \end{cases}$, 则 β 的一个值是 _____. (答案不唯一, 写出满足条件的一个值即可)

17. 如图, 在离地面高 400 m 的热气球上, 观测到山顶 C 处的仰角为 15° , 山脚 A 处的俯角为 45° , 已知 $\angle BAC = 60^\circ$, 求山的高度 $BC =$ _____ m.



第 17 题图



第 18 题图

18. 如图, 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中, E 为 AB 的中点, P 点在正方形内(含边界), 且 $|\overline{AP}| = |\overline{AB}|$.

①若 $|\overline{BP}| = |\overline{AB}|$, 则 $\overline{AP} \cdot \overline{BP}$ 的值是 _____; ②若向量 $\overline{AC} = \lambda \overline{DE} + \mu \overline{AP}$, 则 $\lambda + \mu$ 的最小值为 _____.

三、解答题共 5 小题, 共 60 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

19. (本小题共 10 分) 已知 i 是虚数单位, 复数 $z = (m^2 - 4) + (m^2 - 3m + 2)i$ ($m \in \mathbb{R}$),

(I) 当 $m = 0$ 时, 求复数 z 的模 $|z|$;

(II) 若 z 为纯虚数, 求实数 m 的值.

20. (本小题共 10 分) 已知 $\overline{OA} = (1, 0)$, $\overline{OB} = (0, 1)$, $\overline{OM} = (t, t)$ ($t \in \mathbb{R}$), O 是坐标原点.

(I) 若点 A, B, M 三点共线, 求 t 的值;

(II) 当 t 取何值时, $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ 取到最小值? 并求出最小值.

21. (本小题共 14 分) 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x - (2 \cos^2 x + 1)$.

(I) 求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值;

(II) 求 $f(x)$ 的最小正周期和对称轴方程;

(III) 求 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域.

22. (本小题共 12 分) 锐角 $\triangle ABC$ 中满足 $(a-b)(\sin A + \sin B) = (c-b)\sin C$, 其中 a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边.

(I) 求角 A ;

(II) 若 $a = \sqrt{3}$, 求 $b+c$ 的取值范围.

23. (本小题共 14 分) 定义向量 $\overline{OM} = (a, b)$ 的“相伴函数”为 $f(x) = a \sin x + b \cos x$, 函数

$f(x) = a \sin x + b \cos x$ 的“相伴向量”为 $\overline{OM} = (a, b)$, 其中 O 为坐标原点, 记平面内所有向量的“相伴函数”构成的集合为 S .

(I) 设函数 $f(x) = -2 \sin(x - \frac{\pi}{6})$, 求证: $f(x) \in S$;

(II) 记向量 $\overline{ON} = (1, 2)$ 的相伴函数为 $g(x)$, 当 $g(x) = 2$ 且 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 求 $\sin x$ 的值;

(III) 将 (I) 中函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把横坐标伸长为原来的 2 倍 (纵坐标不变) 得到 $h(x)$ 的图像. 已知 $A(-3, 3), B(3, 11)$, 问在 $y = h(x)$ 的图像上是否存在一点 P , 使得 $\overline{AP} \perp \overline{BP}$. 若存在, 求出 P 点坐标; 若不存在, 说明理由.